

I.I.D. 신호의 고차 스펙트럼을 이용한 비선형 시스템 추정

Nonlinear System Estimation Using Higher Order Spectra of I.I.D. Signals

조 용 수*
(Yong Soo Cho)

要 約

본 논문에서는 i.i.d. 신호의 고차 모멘트와 스펙트럼의 성질에 대하여 4차까지 고찰하였으며, 이의 결과를 이용하여 2차 Volterra 급수로 표시되고 i.i.d. 입력 신호를 갖는 사분변 비선형 시스템의 파라메타들을 추정하는 알고리즘을 시간 영역과 주파수 영역에서 각각 제안하였다. 비록 2차 Volterra 급수가 i.i.d. 입력 신호에 대하여 orthogonal 모델이 아닐지라도 (정상 분포를 갖는 백색 입력 신호 제외), 입력 신호의 각종 시간지연에 대한 모멘트(또는 고차 스펙트럼의 모멘트)나 역행렬의 계산등이 요구되지 않으며 선형 전달함수와 2차 전달함수를 추정할 수 있는 알고리즘이 존재하는 것을 보였다.

ABSTRACT

The properties of higher order moment sequences and higher order spectral moments of an i.i.d. (independent, identically distributed) process up to fourth order are discussed. These properties are utilized to develop algorithms to identify time-invariant nonlinear systems, which can be represented by second-order Volterra series and which are subjected to an i.i.d. input, in both the time and frequency domain.

A relatively simple solution for estimating the time and frequency domain. A relatively simple solution for estimating the linear and quadratic transfer functions, which requires neither the calculation of the moment sequences for various time lags (or higher order spectral moments) of the input nor the calculation of the inverse of matrix, is shown to exist, even though the second-order Volterra series is not an orthogonal model for an i.i.d. input (unless the input is a white Gaussian process).

I. 서 론

최근 오디오 시스템이나 통신 시스템이 고품질화 되어감에 따라 시스템의 비선형성에 의해 발생하는 여러가지 형태의 왜곡에 대한 관심도가 높아지고 이

에 대한 연구가 진행되었는데, 이러한 비선형성을 해석하기 위해 고차 스펙트럼(higher order spectrum)이 종종 이용되었다. 이 고차 스펙트럼은 고차 cumulant 함수의 Fourier 변환으로 정의되며 주파수 영역에서 널리 사용되고 있는 스펙트럼의 연장으로 볼 수 있다. 최근 잇단 연구결과에 의하면 고차 스펙트럼은 (1) Gaussian 잡음을 감소 (suppress) 시키고자 할 때, (2) nonminimum phase 시스템의 계수

*중앙대학교 전자공학과
접수일자: 1992년 6월 28일

를 추정하고자 할 때, (3) 랜덤신호에 의한 시스템의 비선형성을 분석하고자 할 때에 유용하게 이용될 수 있다[1],[2]. 특히 고차 스펙트럼은 비선형 시스템을 모델링하고 이러한 비선형 시스템에서 발생된 데이터를 분석하며 비선형 시스템의 계수를 구하는데 효과적으로 이용되어 왔는데 이 부분을 본 논문에서 다루고자 한다.

주파수 영역에서 2차 비선형 시스템은 선형 전달함수와 2차 전달함수의 합으로 표현되는데[3], 비정규 분포의 입력을 갖는 시스템에서 이 선형 전달함수와 2차 전달 함수를 적절하게 추정하기 위해서는 입력의 고차 스펙트럼에 대한 정보가 4차까지 필요하다[4],[5]. 즉, 어떤 특정 주파수에서의 선형 전달함수와 2차 전달함수를 추정하기 위해서는 그 주파수에 해당되는 입력의 각종 고차스펙트럼을 4차까지 추정하여 행렬을 구성하고 또 그 역행렬을 계산하여야 하며, 다른 주파수에서의 전달함수들을 계산하기 위해서는 이러한 과정을 반복하여야 한다. 그러나 일반적으로 비정규 분포의 입력을 갖는 경우에 있어서 고차 스펙트럼 모멘트를 정확하게 추정하기 위해서는 많은 데이터와 계산량이 필요하며, 역행렬을 계산하는데 또한 많은 시간이 소요된다. 따라서 본 논문에서는 i.i.d. 신호가 입력에 가해질 경우, 단지 몇 개의 파라메타(2차 비선형 시스템의 경우 3개의 상수)로서 관심 대역내 모든 주파수에서 입력의 고차 스펙트럼을 결정할 수 있는 식을 제시하고 이의 결과들을 이용하여, 선형 전달함수와 2차 전달함수를 추정할 수 있는 간단한 해를 제안한다. 또한 제안한 방법은 입력이 정규분포를 갖는 백색신호일 경우 과거의 (정규분포를 갖는 입력신호에 대한) 해에 비해 더욱 간단하게 표시 될 수 있음을 보인다.

본 논문의 II 장에서는 비선형 시스템의 추정을 위해서 입력신호로 사용될 i.i.d. (independent identically distributed)신호의 고차 모멘트와 고차 스펙트럼 모멘트의 성질들에 대해서 4차까지 고찰한다. 이러한 i.i.d. 신호에 대한 예로서는 정규분포를 갖는 백색잡음을 들 수 있는데 이 신호는 통신시스템에서 잡음에 대한 해석시 널리 이용되어 왔다[6]. 또한 음향학 분야에서 자주 이용되는 잡음 발생기에서 발생하는 신호는 i.i.d. 신호로 간주할 수 있으며, 컴퓨터 시뮬레이션에서 이용되는 많은 서브루틴들도 여러 형태의 분포함수를 갖는 i.i.d. 신호를 발생한다.

II 장에서 전개된 i.i.d. 신호의 고차 모멘트와 고차 스펙트럼 모멘트에 대한 결과들은 시불변 2차 비선형

시스템의 계수들을 시간영역과 주파수영역에서 추정하는데 사용된다. III 장에서는 시간영역의 해석방법으로서[7] i.i.d.의 입력신호가 주어질때 1차와 2차 Volterra kernels를 추정하는 실제적인 디지털 방법이 i.i.d.신호의 4차까지의 고차 모멘트의 성질을 이용하여 제안된다. VI 장에서는 주파수영역의 해석방법으로서 i.i.d.신호의 고차 스펙트럼에 대한 결과를 이용하여 선형 전달함수와 2차 전달함수를 추정할 수 있는 실제적인 디지털 방법이 제안된다. 2차 Volterra 급수에 i.i.d.신호가 입력신호로 가해질 때(정규분포를 갖는 백색잡음 제외) 시간영역 또는 주파수영역에서 orthogonal 모델로 표현될 수 없을 지라도[8], Volterra kernel 또는 전달함수를 추정할 수 있는 비교적 간단한 해법은 존재하는 것을 보인다. 제안된 시간영역 방법은 자기상관함수 추정시 시간 지연에 대한 모멘트 계산을 필요로 하지 않으며, 일반적인 입력의 경우 주된 계산의 부담이 되는 역행렬 계산을 요하지 않는다는 장점들이 있다. 본 논문에서 제안된 결과들과 알고리즘에 대한 여러가지 시뮬레이션 결과들이 V 장에 설명되어 있으며 VI 장에서 결론을 맺는다.

II. I.I.D.신호의 고차 모멘트와 고차 스펙트럼

4차까지 모든 모멘트 성분이 존재하며, 평균이 0인 이산 stationary 확률과정 $x(n)$ 에 대해서 생각해 보자. 확률과정 $x(n)$ 이 실수이며 i.i.d.분포를 갖을 때 다음의 성질들을 쉽게 증명할 수 있다.

$$E[x(n_1)x(n_2)] = \begin{cases} \mu_2 & n_1=n_2 \text{ 일때,} \\ 0 & \text{기타.} \end{cases} \quad (1)$$

$$E[x(n_1)x(n_2)x(n_3)] = \begin{cases} \mu_3 & n_1=n_2=n_3 \text{ 일때,} \\ 0 & \text{기타.} \end{cases} \quad (2)$$

$$E[x(n_1)x(n_2)x(n_3)x(n_4)] = \begin{cases} \mu_4 & n_1=n_2=n_3=n_4 \text{ 일때,} \\ \mu_2^2 & (n_1=n_2 \neq n_3=n_4) \text{ 또는} \\ & (n_1=n_3 \neq n_2=n_4) \text{ 또는} \\ & (n_1=n_4 \neq n_2=n_3) \text{ 일때,} \\ 0 & \text{기타.} \end{cases} \quad (3)$$

여기서 μ_r 은 $x(n)$ 의 r 차 모멘트 $E[x^r(n)]$ 을 의미한다. 식(2)와 (3)에서 랜덤변수 $x(n)$ 가 독립적이면 그

랜덤변수의 함수들 또한 독립적이라는 사실이 이용되었다. 위 식으로부터 i.i.d. 신호의 4차까지의 고차 모멘트는 μ_2, μ_3, μ_4 가 주어진다면 그 값들이 결정될 수 있다는 것을 알 수 있다. 또한 $x(n)$ 의 이산 Fourier 변환이 아래 식으로 정의될 때

$$X_N(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp(-j2\pi nk/N) \quad (4)$$

$x(n)$ 이 i.i.d. 신호라면 $X_N(k_1)$ 과 $X_N(k_2)$ 의 상관함수(2차 스펙트럼 모멘트)는 식(1)을 이용하여 아래와 같이 표현될 수 있다.

$$E[X_N(k_1)X_N(k_2)] = N\mu_2\delta(k_1+k_2) \quad (5)$$

여기서 $\delta(\cdot)$ 는 Kronecker delta 함수이다. Stationary 확률과정에서는 식(5)의 왼쪽항이 $k_1 = -k_2$ 일 때에만 스펙트럼의 값이 존재하기 때문에 $E[|X_N(k)|^2]$ 은 전주파수 영역에서 일정한 $N\mu_2$ 를 갖는다는 것을 알 수 있다. 마찬가지로 $X_N(k_1), X_N(k_2), X_N(k_3)$ 사이의 상관관계는 식(2)를 이용해서 다음 식으로 표현할 수 있다.

$$E[X_N(k_1)X_N(k_2)X_N(k_3)] = N\mu_3\delta(k_1+k_2+k_3) \quad (6)$$

식(6)의 오른쪽 항으로부터 i.i.d. stationary 확률과정의 3차 스펙트럼 모멘트는 $\mu_3 \neq 0$ 과 $k_1+k_2+k_3=0$ (stationarity에 따른 주파수 선택 규칙) 경우 외에는 0이 되는 것을 알 수 있다. 즉 i.i.d. 신호의 3차 스펙트럼 모멘트 $E[X_N(k_1)X_N(k_2)X_N(k_3)]$ 는 주파수 선택 규칙을 만족시키는 모든 주파수 영역내에서 일정한 $N\mu_3$ 를 갖는 것을 알 수 있다. 이 확률과정이 정규 분포를 갖는 경우에는 위의 상수 μ_3 또는 3차 스펙트럼 모멘트가 0이 된다.

또한 $x(n)$ 이 i.i.d. 신호일 경우 4개의 스펙트럼 성분 $X_N(k_1), X_N(k_2), X_N(k_3), X_N(k_4)$ 사이의 상관관계는 식(3)을 이용하면 다음의 특수한 구조를 갖는다는 것을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} E[X_N(k_1)X_N(k_2)X_N(k_3)X_N(k_4)] = & N^2\mu_2^2 \\ & \{\delta(k_1+k_2)\delta(k_3+k_4) + \delta(k_1+k_3)\delta(k_2+k_4) \\ & + \delta(k_1+k_4)\delta(k_2+k_3)\} + N(\mu_4 - 3\mu_2^2)\delta(k_1+k_2+k_3+k_4) \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 오른쪽의 마지막 항은 $\mu_4 - 3\mu_2^2 \neq 0$ 과 $k_1+k_2+k_3+k_4=0$ 인 경우 외에는 0이 된다. Stationary 확

률과정은 주파수 선택 규칙인 $k_1+k_2+k_3+k_4=0$ 을 항상 만족하여야 하므로 이 신호의 4차 스펙트럼 모멘트는 항상 일정한 값 $N(\mu_4 - 3\mu_2^2)$ 을 가질 것이며 ($x(n)$ 이 정규분포를 갖는 백색잡음일 때 이 값이 0이 됨) 계산하고자 하는 주파수에 따라 오른쪽의 첫번째 항에 해당하는 상수값 $N^2\mu_2^2$ 이 이에 더하여 나타난다. 첫번째항에 따르면 각각의 성분이 다른성분의 복소공액수($E[|X_N(k_i)|^2 | X_N(k_j)|^2], i \neq j$)로 이루어져 있는 경우 4차 스펙트럼 모멘트는 이러한 주파수들에서 상수 $N^2\mu_2^2$ 의 추가치를 갖는다. 위의 내용을 요약하여 보면 i.i.d. 신호의 2차와 3차 스펙트럼 모멘트는 주파수선택 규칙을 만족시키는 모든 영역에서 일정한 값을 갖고 평평한 형태를 취하나, 4차 스펙트럼 모멘트는 주파수선택 규칙을 만족시키는 영역내에서 여러 단계의 값을 갖게 된다는 것이다. 또한 μ_2, μ_3, μ_4 가 주어진 경우 4차까지의 고차 스펙트럼 모멘트를 모두 계산할 수 있으며, 정규 분포를 갖는 백색잡음의 경우에는 단지 μ_2 의 값으로서만 4차까지의 고차 스펙트럼 모멘트를 결정지을 수 있다.

III. I.I.D. 입력을 갖는 VOLTERRA KERNEL의 추정

시간 영역에서 이산 2차 Volterra 시스템을 고려하자.

$$y(n) = \sum_{i=0}^{P-1} h_1(i)x(n-i) + \sum_{i=0}^{P-1} \sum_{j=0}^{P-1} h_2(i,j)x(n-i)x(n-j) + e(n) \quad (8)$$

여기서 $x(n)$ 과 $y(n)$ 은 각각 이 시스템의 입력과 출력이며 $y(n)$ 은 오른쪽의 첫번째 항과 두번째 항의 합으로 이루어진 모델 응답을 의미한다. h_1 과 $h_2(i,j)$ 는 이 시스템의 1차와 2차 Volterra kernel이라 각각 불려지며 P 는 이 시스템의 memory 길이를 나타낸다. 입력 $x(n)$ 이 i.i.d. 신호인 경우에 (8)식의 Volterra kernel은 II장에서 설명한 i.i.d. 신호의 고차 모멘트의 성질을 이용하여 다음과 같이 계산될 수 있다.

$$E[y(n)x(n-1)] = h_1(1)\mu_2 + h_2(1,1)\mu_3 \quad (9)$$

$$E[y(n)x(n-1)x(n-m)] = 2\mu_2^2 h_2(1,m), \quad 1 \neq m \text{ 일 때} \quad (10)$$

$$E[y(n)x^2(n-1)] - E[y(n)x(n-1)] \frac{\mu_3}{\mu_2} = h_2(1,1) \left(\mu_4 - \frac{\mu_3^2}{\mu_2} - \mu_2^2 \right) + \mu_2^2 \sum_{i=0}^{P-1} h_2(i,i), \quad 1=m \text{ 일 때} \quad (11)$$

여기서

$$h_2(i, j) = \frac{\sum_{l=0}^{P-1} \{E[y(n)x^2(n-1)] - E[y(n)x(n-1)]\} \frac{\mu_3}{\mu_2}}{\mu_1 - \frac{\mu_3^2}{\mu_2} + (P-1)\mu_2^2} \quad (12)$$

그러므로 2차 Volterra kernel $h_2(1, m)$ ($1=m$ 의 경우)의 추정은 $x(n)$ 의 μ_2, μ_3, μ_4 가 주어졌을 경우 입력과 출력사이의 cross-bicorrelation $E[y(n)x^2(n-1)]$ 과 cross-correlation $E[x(n)y(n-1)]$ 을 추정한 후 식 (11)과 (12)에 의해 이루어 질 수 있다. 또한 $1 \neq m$ 의 경우에는 $E[y(n)x(n-1)x(n-m)]$ 의 추정된 값을 식 (10)에 대입시킴으로 이 때의 Volterra kernel을 계산할 수 있다. 한편 1차 Volterra kernel $h_1(1)$ 을 추정하기 위한 식(9)에 2차 Volterra kernel인 $h_2(1, 1)$ 이 존재하는 이유는 식(8)이 비정규 분포의 입력신호에 대하여 orthogonal 모델이 아니기 때문이다. 만약 입력이 정규분포를 갖는 백색신호라면 식(9)와 (11)에서 μ_3 의 값이 0이 되어 orthogonal 모델이 되므로 임의의 i, j 에 대해서 1차와 2차 Volterra kernel인 $h_1(i)$ 와 $h_2(i, j)$ 를 독립적으로 추정할 수 있다. II장에서 언급한 바와 같이 i.i.d. 신호의 4차까지의 고차 모멘트는 μ_2, μ_3, μ_4 에 의해서 완전히 결정될 수 있고, 위에서 유도된 알고리즘은 어떠한 형태의 행렬 연산도 필요로 하지 않기 때문에(참고문헌 [8] 참조), 큰 P의 값을 갖는 시스템의 1차와 2차 Volterra kernel의 값들도 큰 계산량의 부담없이 단지 cross-correlation과 cross-bicorrelation만의 추가 정보에 의해서 식 (9)~(12)을 이용하여 쉽게 추정할 수 있다.

IV. I.I.D.입력을 갖는 전달 함수의 추정

주파수 영역에서 2차 Volterra 급수는 다음과 같이 정의된다.

$$Y_N(m) = H_1(m)X_N(m) + \sum_{\substack{i,j \\ i+j=m}} H_2(i, j)X_N(i)X_N(j) + \epsilon_N(m) \quad (13)$$

여기서 $H_1(m)$ 와 $H_2(i, j)$ 은 각각 선형 전달함수와 2차 전달함수이다. $\epsilon_N(m)$ 은 실제의 출력과 모델의 출력(식(13)의 오른쪽 첫번째 항의 합)과의 차이를 나타낸다. 식 (13)은 입력신호에 대해서는 비선형이지

만 전달함수에 대하여는 선형으로 이루어져 있기 때문에 MSE(mean square error) $[|\epsilon_N(m)|^2]$ 를 최소화함으로써 최적 전달함수를 추정할 수 있다. 입력 $x(n)$ 이 i.i.d. 신호인 경우에는 선형 전달함수와 2차 전달함수는 다음 식으로 부터 구할 수 있다.

$$E[X_N^*(1)Y_N(m)] = H_1(m)N\mu_2 + \sum_{\substack{i,j \\ i+j=m}} H_2(i, j)N\mu_3 \quad (14)$$

$$E[X_N^*(k)X_N^*(1)Y_N(m)] = H_1(m)N\mu_3 + \sum_{\substack{i,j \\ i+j=m}} H_2(i, j)N(\mu_4 - 3\mu_2^2) + 2H_2(k, 1)N^2\mu_2^2 \quad (15)$$

위 식들은 식(5)~(7)에서 구한 i.i.d. 신호의 고차 스펙트럼 모멘트에 대한 성질들을 이용하여 유도되었다. 식(14)와 (15)에서 $\sum_{\substack{i,j \\ i+j=m}} H_2(i, j)$ 는 다음 식에 의해서 구해진다.

$$\sum_{\substack{i,j \\ i+j=m}} H_2(i, j) = \frac{N\mu_2 \sum_{\substack{i,j \\ i+j=m}} \{E[X_N^*(i)X_N^*(j)Y_N(m)] - N\mu_3(N-m+1)E[X_N^*(m)Y_N(m)]\}}{[N^2\mu_2(\mu_4 - 3\mu_2^2) - N^2\mu_3^2](N-m+1) + 2N^3\mu_2^3} \quad (16)$$

따라서 입력이 i.i.d. 신호이고 μ_2, μ_3, μ_4 가 주어진 경우, 선형 전달함수와 2차 전달함수는 입력과 출력간에 cross-spectrum과 cross-bispectrum(각각 식 (14), (15)의 왼편에 위치)을 추정한후 식(14)~(16)으로 부터 계산된다. 위의 결과와 일반 입력인 경우의 방법을 m 이 짝수일때 비교하기 위해서 식(14)과 (15)의 합을 전개하여 다음의 행렬식의 형태로 표현하였다.

$$E \begin{bmatrix} X_N^*(m)Y_N^*(m) \\ X_N^*(\frac{m}{2})X_N^*(\frac{m}{2})Y_N(m) \\ X_N^*(\frac{m}{2}+1)X_N^*(\frac{m}{2})Y_N(m) \\ \vdots \\ X_N^*(M)X_N^*(m-M)Y_N(m) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_2 & a_3 & a_3 & \dots & a_3 \\ a_3 & 2a_2^2+b & b & \dots & b \\ a_3 & b & a_2^2+b & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_3 & b & b & \dots & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1(m) \\ H_2(\frac{m}{2}, \frac{m}{2}) \\ 2H_2(\frac{m}{2}+1, \frac{m}{2}-1) \\ \dots \\ 2H_2(M, m-M) \end{bmatrix} \quad (17)$$

여기서

$$a_1 = N\mu_1, b = N(\mu_4 - 3\mu_2^2), M = N/2$$

로 주어진다. 그러므로 선형 전달함수와 2차 전달함수는 m 이 짝수일때 위의 행렬식을 계산함으로써 추정할 수 있으며 이는 식(14)~(16)을 계산한 결과와 동일하다. 그러나 입력이 i.i.d. 신호가 아닐 경우에는 식(17)에 주어진 행렬의 각각의 요소에 상응하는 입력 스펙트럼 모멘트를 각 주파수 성분에 따라 4차까지 추정하여야 한다. 특히 일반적인 입력인 경우 이 행렬은 다음에 주어진 "고차 스펙트럼 모멘트 행렬"에 의해 대체되어야 한다.[4]

$$E[X_N^T] = \begin{bmatrix} S(m) & C^H(m) \\ C(m) & D(m) \end{bmatrix} \quad (18)$$

여기서, 첨자 H 는 Hermitian 연산자를 나타내며 m 이 짝수일때 벡터 $X_N(m)$ 은 다음과 같이 정의된다.

$$X_N(m) = [X_N(m) \ X_N(\frac{m}{2}) \ X_N(\frac{m}{2}) \ X_N(\frac{m}{2}+1) \ X_N(\frac{m}{2}-1) \ \dots \ X_N(m) \ X_N(0) \ \dots \ X_N(M) \ X_N(m-M)] \quad (19)$$

또한 식(18)에 정의된 부행렬의 각각의 요소는 다음 식들에 의해 주어진다.

$$s(m) = E[X_N(m)X_N^*(m)] \quad (20)$$

$$c_k(m) = E[X_N(k)X_N(m-k)X_N^*(m)] \quad (21)$$

$$d_{k_1}(m) = E[X_N(k)X_N(m-k)X_N^*(m-1)] \quad (22)$$

여기서 왼편의 첨자 $k(m/2$ 에서 M 까지 변함)는 식(21)과 (22)의 오른편에서 나타난 첫번째의 주파수 변수를 나타내며, 왼편의 첨자 1은 식(22)의 오른편에서 나타난 세번째의 주파수 변수를 나타내는 것이다. 일반적으로 식(18)의 스펙트럼 모멘트 행렬은 m 에 따라 다른 값을 취하기 때문에 각각의 m 에 따른 식(18)의 행렬을 반복하여 추정한 후 이 m 에 해당하

는 전달함수를 계산하여야 한다. 반면 식(17)에 주어져 있는 행렬은 입력이 i.i.d. 신호일 때 모든 짝수 m 에 대한 전달함수를 계산하기 위해서 사용될 수 있다. 홀수 m 에 대해서도 마찬가지로 식(14)와 (15)을 행렬식의 형태로 나타낸 후, 홀수 m 에 대한 식(18)의 스펙트럼 모멘트 행렬과 비교하여 비슷한 결론을 유도할 수 있다.

한 주파수에서의 전달함수를 추정하는 과정은 상수 a_3 와 b 에 의해서 다른 주파수에서의 전달함수의 추정과 긴밀한 관계가 있다는 것을 위의 행렬식(17)로부터 알 수 있는데 그 이유는 식(13)이 i.i.d. 입력(정규분포를 갖는 백색잡음 제외)에 대해 orthogonal 모멘이 아니기 때문이다. 입력이 정규 분포를 갖는 백색잡음인 경우에는 식(14)와 (15)는 보다 더 간략하게 표현될 수 있는데, 이때 선형 전달함수와 2차 전달함수는 다음의 식으로부터 쉽게 추정될 수 있다.

$$H_1(m) = E[X_N^*(m)Y_N(m)]/N\mu_2 \quad (23)$$

$$H_2(k, 1) = E[X_N^*(1)Y_N(m)]/N^2\mu_2^2 \quad (24)$$

본 절에서 제안한 전달함수의 추정방법을 요약하여 보면 다음과 같다.

- (i) 시스템의 입, 출력으로부터 샘플된 데이터를 segment 단위로 분할한다.
- (ii) 각 segment 마다 입력신호의 μ_2, μ_3, μ_4 를 계산하고, 입, 출력간의 샘플 cross-spectrum과 cross-bispectrum을 계산한다.
- (iii) (ii)의 과정을 segment 수 만큼 반복한 후 평균치를 취하여 μ_2, μ_3, μ_4 와 cross-spectrum과 cross-bispectrum의 추정치를 계산한다.
- (iv) (iii)에서 구한 추정치를 식(16)에 대입하여 $\Sigma H_2(i, j)$ 를 계산한 후 이를 이용하여 식(14)와 (15)로부터 선형 전달함수와 2차 전달함수를 계산한다.

V. 시뮬레이션 결과

본절에서는 II장에서 유도한 i.i.d. 신호의 고차 스펙트럼 모멘트에 대한 성질들을 IMSL RNEXP에 의해 발생된 지수함수 분포를 갖는 i.i.d. 신호를 사용해서 확인되었으며 다음 수치들은 i.i.d. 신호 128,000 개를 사용하여 추정된 값이다.

$$\mu_2 = 1.0014, \mu_3 = 1.9948, \mu_4 = 8.7838 \quad (25)$$

이 신호의 고차 스펙트럼 모멘트를 알기 쉽게 표현하기 위하여 식(18)에서 정의된 고차 스펙트럼 모멘트 행렬을 계산한 후 이 결과를 그림1에 나타내었다. 식(18)의 행렬을 이 시물레이션에서 사용한 이유는 (1) i.i.d. 신호의 4차까지 고차 스펙트럼 모멘트를 한 장의 그래프를 통하여 쉽게 알 수 있고 (2) 전달함수 추정기(estimator)의 전반적인 성능(정확도와 계산 속도)이 주로 식(18)의 고차 스펙트럼 모멘트 행렬을 추정하는 과정에 의해서 결정되므로 본 논문에서 제안한 i.i.d. 입력을 사용한 선형 전달함수 및 2차 전달함수 추정기와 일반적인 전달함수 추정기의 성능을 비교할 수 있기 때문이다. N과 M의 값은 64와 32로 각각 설정되었다. 본 시물레이션에서는 m을 0과 M사이에서 변화시키며 식(20)~(22)를 이용한 FFT 계산방법과 식(5)~(7)를 이용한 i.i.d. 방법에 의해 추정된 고차 스펙트럼 모멘트 행렬 값을 비교하였는데 예측한 바와 같이 m의 값에 관계없이 비슷한 결과를 얻었다. 그림1에는 m을 12로 선택해서 얻어진 결과가 나타나 있다. 이 경우 S(m), C(m), D(m) 그리고 식(18)의 좌측 행렬은 각각 1×1, 27×1, 27×27, 28×28 행렬이 된다. FFT 방법에서 여러 샘플

플 고차 스펙트럼을 계산하기 위해서 샘플된 데이터는 64개의 데이터를 갖는 2,000개의 segment로 분할되었다. 분할된 segment는 FFT 방법을 통해 Fourier 변환이 되었으며, 변환된 2,000개의 샘플 스펙트럼에 평균을 취해 4차까지의 고차 스펙트럼을 추정하였다.

그림1은 FFT 방법에 의하여 추정된 고차 스펙트럼 모멘트의 실수부를 3차원 그림으로 나타낸 것이며 우측과 아래쪽의 4개의 열과 행은 기준값을 나타내기 위해서 0의 값을 취해 첨가되었다. FFT 방법에 의해서 추정된 값들이 5개의 다른 위치에서 나타나 있고 i.i.d. 방법에 의해서 추정된 값들은 괄호속에 나타나 있다. 이 값들을 비교함으로써 식(5)~(7)에 주어져 있는 i.i.d. 방법에 의해 계산된 값들이 FFT 방법에 의해서 얻어진 값들과 근사하다는 것을 알 수 있다. 또한 i.i.d. 신호의 2차, 3차 스펙트럼 모멘트는 주파수 선택규칙이 만족되는 영역, 즉 S(m)와 C(m)의 영역에서 일정한 값을 갖고 평평한 형태를 취하나 4차 스펙트럼 모멘트로 구성되어 있는 D(m)는 주파수 선택규칙이 만족하는 영역에서도 여러 다른 값을 갖는 것을 그림1을 통해 알 수 있다.

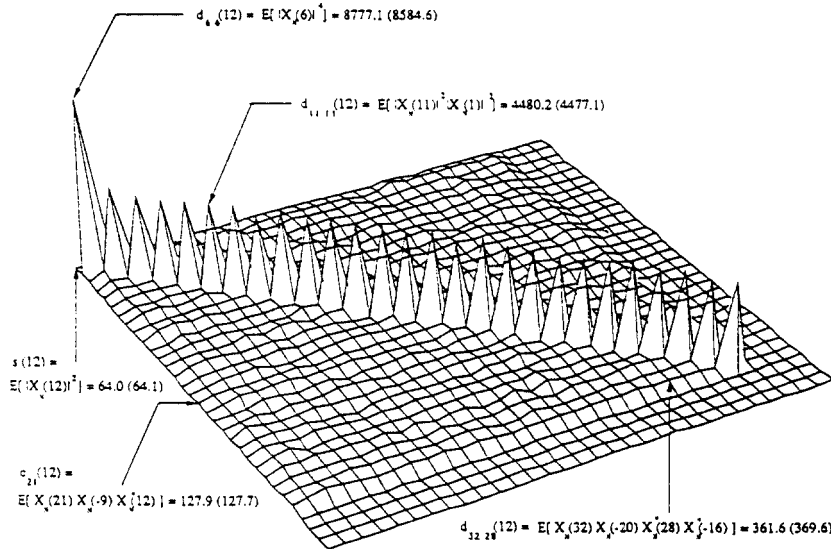


그림 1. FFT 방법과 i.i.d. 방법(괄호내의 값)에 의해 추정된 고차 스펙트럼 모멘트 행렬

Fig 1. Higher order spectral moment matrix estimated by the FFT approach (in parentheses) and the i.d. approach

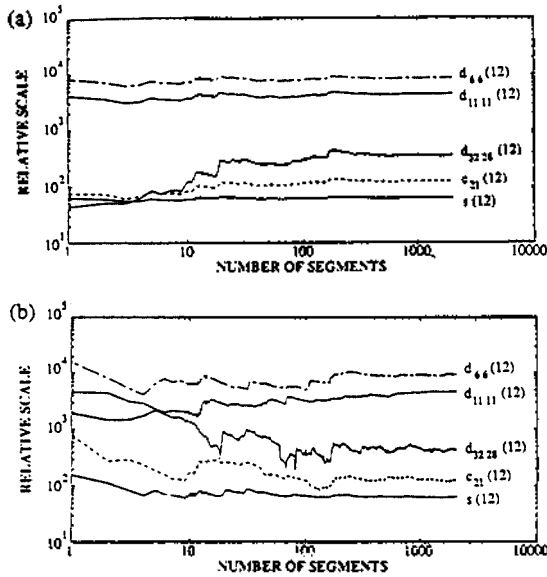


그림 2. Segment 수에 따른 고차 스펙트럼 모멘트의 수렴 속도 (a) i.i.d. 방법 (b) FFT 방법

Fig 2. Convergence rate of higher order spectral moments estimated by (a) the i.i.d. approach and (b) the FFT approach, depending on the number of segments

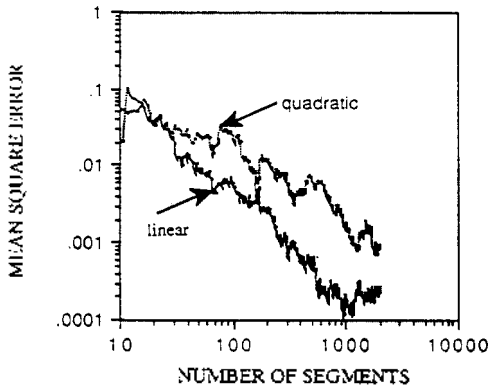


그림 3. 제안된 i.i.d. 방법을 이용하여 선형 전달함수와 2차 비선형 전달함수를 추정할 경우 segment 수에 따른 MSE 값

Fig 3. MSE versus number of segments for the case where the proposed i.i.d. approach is used to estimate linear and quadratic transfer functions

다음으로 같은 데이터를 사용하여 segment 수와 고차 스펙트럼 모멘트 추정값과의 관계를 고찰하였다. 그림2(a)는 i.i.d. 방법 즉 식(5)~(7)을 이용하여 구하여진 그림1의 5개의 값에 대하여 segment 수에

다른 수렴 속도를 보이고, 그림2(b)는 FFT 방법에 의한 수렴속도를 나타낸다. 이 그림으로부터 i.i.d. 방법이 FFT 방법에 비해서 매우 적은 계산량을 필요로 하지만, i.i.d. 방법이 FFT 방법에 비해 더 빠른 수렴 속도를 갖고 수렴값들의 분산이 적다는 것을 알 수 있다. 또한 그림2(a)의 i.i.d. 방법에 의해서 추정된 5개의 값들은 m 의 값과 관계가 없으므로 모든 주파수 성분에서 전달함수를 추정하기 위해 반복적으로 사용될 수 있으나, FFT 방법에서는 주파수 변수에 해당하는 m 에 따라 고차 스펙트럼 모멘트의 모든 성분 값들이 다른 값을 취하므로 각각의 m 에 대한 선형 전달함수와 이차 전달함수를 결정하기 위해 매번 재추정되어야 한다.

마지막으로 본 논문의 IV장에서 제안된 선형 전달함수와 2차 전달함수 추정 알고리즘의 성능을 살펴보기 위하여 위에서 사용된 데이터를 시스템의 입력신호로 이용하여 시뮬레이션을 행하였으며 이의 결과가 그림3에 나타나 있다. 출력신호는 참고문헌[4]에서 이용된 2차 비선형 시스템에 입력신호를 가함으로서 발생되었다. 여기서 MSE는 원래의 전달함수와 추정된 전달함수 사이의 오차를 사용하여 계산되었으며, 그림3으로부터 제안된 방법이 FFT 방법(참고문헌 [4] 참조)에 비해 적은 MSE 값을 갖는 것을 알 수 있다. 또한 약 1,000개의 segment 사용한 후 μ_2 , μ_3 , μ_4 의 비교적 정확한 값의 추정으로 MSE 값이 최소값에 도달한 것을 알 수 있으며, 그 후 cross-spectrum과 cross-bispectrum의 추정의 영향으로 최소값 근처에서 MSE 값이 흔들리고 있는 것을 알 수 있다.

본 논문에서 제한한 i.i.d. 방법과 참고문헌 [4]에서 제안한 알고리즘은 서로 다른 구조를 가지고 있기 때문에 정량적으로 성능을 비교하기 쉽지 않다 (참고문헌 [4]의 방법에서는 식 (18)-(22) 계산이외에 역행렬 계산과 행렬식 연산이 필요하나 i.i.d. 방법에서는 식 (14)-(16) 이용). 그러나 본 절에서는 전달함수 추정기의 전반적인 성능(정확도와 수렴속도)에 가장 큰 영향을 미치는 고차 스펙트럼 모멘트를 각각의 방법으로 추정함으로써 수렴속도(그림 2)와 수렴후 추정치(그림1, 그림3)에 대해 분석할 수 있었다. 요약하면, 수렴후 선형 전달함수 추정오차(MSE)는 제안한 방법의 경우 약 0.0002, 참고문헌 [4]의 경우 0.07 이었고, 2차 전달함수 추정오차는 제안한 방법의 경우 약 0.001, 참고문헌 [4]의 경우 0.04 이었다. 고차 스펙트럼 모멘트를 계산하기 위하여 필요한 곱셈수를 한 segment에 대하여 비교하여 보면 i.i.d.의 경우

약 3N(본 시뮬레이션의 경우 192)이 필요하고 참고 문헌 [4]의 경우 $4^3M^3 (2 \times 10^6)$ 이다. 물론 제안된 방법은 입력신호가 i.i.d. 신호로 잘 근사화 될 때에만 적은 MSE 또는 좋은 성능을 제공한다.

VI. 결 론

i.i.d. 신호의 고차 모멘트와 고차 스펙트럼의 성질에 대하여 4차까지 고찰하였다. 실제 음향기구나 통신시스템에서 자주 발생하는 이 i.i.d. 신호의 2차와 3차 스펙트럼 모멘트는 주파수 선택 규칙을 만족시키는 모든 영역에서 일정한 값을 갖고 평평한 형태를 취하나 이 신호의 4차 스펙트럼 모멘트는 주파수 선택 규칙을 만족시키는 영역내에서 다른 값들을 갖게 된다는 것을 보였다. 이러한 i.i.d. 신호의 고차 모멘트와 고차 스펙트럼에 대한 결과식들은 시간영역과 주파수영역에서 이차 비선형 시스템을 모델링하고 시스템의 파라메타들을 추정하는데 이용되었다. 비록 2차 Volterra 함수가 i.i.d. 입력(정규분포를 갖는 백색 잡음 제외)에 대하여 orthogonal 모델이 아닐지라도 전달함수를 추정할 수 있는 간단한 알고리즘이 존재한다는 것을 보였고 이 방법의 성능을 일반적인 입력의 경우의 방법과 비교하였다. 시뮬레이션 결과를 통해 2차 비선형 시스템에 가해지는 입력이 i.i.d. 신호로 잘 근사화가 될 경우 제안한 방법이 과거의 방법에 비해 보다 적은 계산량과 높은 정확도로 선형 전달함수와 2차 비선형 전달함수를 추정할 수 있음을 보였다. 본 논문에서는 4차까지의 스펙트럼 모멘트 성질을 이용하여 i.i.d. 입력을 갖는 2차 비선형 시스템을 추정할 수 있는 간단한 알고리즘을 제시하였지만, 6차까지의 스펙트럼 모멘트의 성질을 계산한 후 이를 이용하여 3차 비선형 시스템을 추정할 수 있는 알고리즘을 비슷한 전개 방법으로 유도할 수 있다.

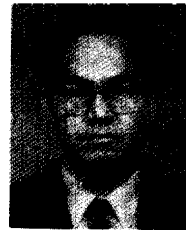
참 고 문 헌

1. C. L. Nikias and M. R. Raghuver, "Bispectrum Estimation: A Digital Signal Processing Framework," Proc. IEEE, vol. 75, no. 7, pp. 869-891, July 1987.
2. Y. C. Kim and E. J. Powers, "Digital Bispectral Analysis and Its Applications to Nonlinear Wave Interaction," IEEE Trans. on Plasma Science, Vol. PS-7, No. 2, pp. 120-131, June 1979.
3. J. S. Bendat, Nonlinear System Analysis and Identifi-

fication From Random Data, New York: Wiley Interscience, 1990.

4. K. I. Kim and E. J. Powers, "A Digital Method of Modeling Quadratically Nonlinear System with a General Random Input," IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Vol. 36, No. 11, pp. 1758-1769, Nov. 1988.
5. Y. S. Cho, S. B. Kim, E. L. Hixson, and E. J. Powers, "A Digital Technique to Estimate Second-Order Distortion Using Higher-Order Coherence Spectra," IEEE Trans. on Signal Processing, Vol. 40, No. 5, pp. 1029-1040, May 1992.
6. A. D. Whalen, Detection of Signals in Noise, New York: Academic Press, 1971.
7. J. Pitas and A. N. Venetsanopoulos, Nonlinear Digital Filters: Principles and Applications, Boston: Kluwer Academic Publisher, 1990.
8. T. Koh and E. J. Powers, "Second-Order Volterra Filtering and Application to Nonlinear System Identification," IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Vol. 33, No. 6, pp. 1445-1445, Dec. 1985.

▲趙 鎔 洙 (Yong Soo Cho) 1959년 9월 15일생



1984년 2월: 중앙대학교 전자공학과 졸업(공학사)
 1987년 8월: 연세대학교 전자공학과 졸업(공학석사)
 1991년 5월: 미국 The University of Texas at Austin, Department of Electrical and Computer Engineering (Ph.D)

1992년 3월 ~ 현재: 중앙대학교 전자공학과 조교수