

〈연구논문〉

## 섬유현탁액의 섬유배향이 압출팽창에 미치는 영향

이성재 · 이승종

서울대학교 화학공학과  
(1992년 4월 10일 접수)

### The Effect of Fiber Orientation on the Extrudate Swell of Fiber Suspensions

Seong Jae Lee and Seung Jong Lee

*Department of Chemical Engineering, Seoul National University, Seoul 151-742, Korea*  
(Received April 10, 1992)

#### 요 약

비교적 묽은 섬유현탁액의 압출팽창 유동을 수치모사하기 위하여, 유동장과 섬유배향 사이의 상호작용을 고려하고 연속체이론에 기초한 유변방정식을 사용하였다. 또한 섬유배향분포를 얻기 위하여 배향텐서로 표시된 섬유배향방정식을 사용하였는데, 이때 섬유간 상호작용의 효과를 고려해 주기 위하여 현상학적 확산항을 추가하였다. 실험결과와 비교가 용이한 원통관을 통과하는 섬유현탁액의 압출팽창 유동을 수치모사한 결과, 관 입구에서 섬유가 유선방향으로 정렬되어 유입될 때 현탁강도가 증가함에 따라 팽창비는 감소함을 알 수 있었다. 하지만 관 길이가 짧고 또한 관 입구에서 섬유가 임의 배향상태로 유입될 경우에는 반대로 팽창비가 증가함을 보였다. 관 입구에서의 다른 배향상태에 의해 발생하는 팽창비의 서로 다른 경향은 외부 표면부분과 내부중심부분의 신장점도의 차이로 설명할 수 있었다.

**Abstract**—The extrudate swell of semiconcentrated fiber suspensions was investigated numerically by using a constitutive equation based on the continuum theory, which takes the interaction effect between flow and fiber orientation into account. And the orientation equation expressed in terms of the orientation tensor was solved simultaneously to obtain the fiber orientation distribution, in which the interaction effect among fibers was taken into account by adding a phenomenological diffusion term. In the simulations of the axisymmetric extrudate swell of fiber suspensions, the die swell ratio decreased as the suspension intensity increased when the fibers at the die inlet were aligned. But in the case of random orientation states of fibers at the die inlet, roughly thought as the case of short dies, the swell ratio increased, however. Different trends in the swell ratio caused by the different fiber orientation states at the die inlet could be explained in terms of the elongational viscosity difference between the outer surface part and the inner core part.

**Keywords:** Extrudate swell, Fiber suspensions, Fiber orientation distribution, Flow/fiber interaction, Fiber/fiber interaction

## 1. 서 론

최근들어 금속, 유리, 목재 등의 대체재로서 가볍고 강한 기계적 성질을 지니는 고분자 복합재료를 사용하려는 추세가 점점 증가하고 있다. 특히 단섬유강화 고분자 복합재료는 가공이 용이한 고분자와 섬유의 강한 기계적 성질을 결합한 장점 때문에 널리 사용되고 있다. 이러한 단섬유강화 고분자 복합재료의 기계적 성질은 최종제품의 섬유배향분포 상태와 밀접한 관계가 있는데 섬유배향 역시 가공공정시의 유동장에 영향을 받으므로 섬유현탁액의 유동과 섬유배향분포간의 상호관계를 살펴보는 것은 매우 중요한 일이라 하겠다.

유동장내의 섬유입자에 대한 해석적인 연구는 대부분이 뉴튼매질 유체속에 부유하는 타원체 입자의 운동을 기술한 Jeffery 모델[1]에 기초하는데, 이 모델은 입자간의 상호작용과 입자와 유체간의 상호작용이 무시되는 희박현탁액에만 적용될 수 있다. 그 후에 Goldsmith와 Mason[2]은 Jeffery의 방정식을 사용하여 다양한 유동장을 대상으로 하여 타원체 입자의 배향을 예측하기 위한 정량적인 해석을 하였다. Givler 등[3]은 섬유배향을 구하기 위한 수치기법을 개발했는데, 정상상태에서의 속도장을 풀고서 유선을 따라 Jeffery식을 적분하여 주어진 시간에서의 섬유배향을 구하였다. Folgar와 Tucker[4]는 Jeffery식에 확산항을 추가하여 섬유현탁액의 섬유간 상호작용을 고려하는 현상학적 모델을 제시하였는데, 이 확산항은 섬유입자의 무질서화하려는 효과를 주기 위한 것이다.

유체와 섬유간 상호작용을 고려하려는 시도로써, Batchelor[5]는 통계적 관점에서 균질유동장인 경우 타원체입자에 대한 응력텐서를 유도하였다. Dinh과 Armstrong[6]은 섬유가 임의배향으로 유입되는 경우에 대하여 섬유현탁액의 적분형 유변방정식에 대한 해의 형태를 얻었는데, Papanastasiou와 Alexandrou[7]는 이 방법을 유선 유한요소법에 적용하여 압출유동을 대상으로 수치모사하였다. 하지만 이 방법은 와류가 존재하는 수축유동과 같은 복잡한 유동에는 사용할 수 없는 한계를 지니고 있다. Lipscomb 등[8]은 수축관을 통과하는 섬유현탁액의 유

동을 수치모사했는데, 배향방정식을 직접 풀지않고 섬유배향이 유선방향으로 완전히 정렬된 것으로 가정하고 처리하였다. 섬유의 배향상태를 나타내기 위한 방법으로 배향분포함수가 널리 사용되어 왔는데 이것은 너무 많은 계산시간을 요구한다. 섬유배향을 보다 간편하고 효율적인 형태로 표현하기 위하여 Advani와 Tucker[9]는 분포함수의 모멘트로 표현되는 배향텐서의 개념을 도입하였다.

유체가 임의의 구조를 지닌 관을 통하여 압출될 때 압출된 단면적이 구조물의 단면적보다 커지는 현상인 압출팽창은 여러가지 고분자 가공공정에 있어서 제품의 치수 결정에 매우 큰 영향을 주는데, 특히 유체에 단섬유 등의 복합재를 함께 넣어 가공할 경우에는 치수 뿐만 아니라 섬유의 배향분포에도 큰 영향을 미치게 되어 최종제품의 강도에 결정적 역할을 하므로 대단히 중요하다. 압출팽창 현상에 대한 수치모사 연구는 유한요소법을 사용하여 Nickell 등[10]이 비압축성 뉴튼유체의 미동흐름에 대하여 발표한 아래로 계속되어 왔다. 삼차원 압출팽창 현상에 대한 수치모사 연구는 최근까지 별로 이루어지지 않았는데 그 이유는 이 유동문제를 삼차원적으로 풀기에는 문제가 너무 크고 복잡하며, 자유표면을 결정해주는 방법과 자유표면을 구한 다음 내부의 좌표들을 조절해주는 적절한 방법이 없었기 때문이다. 이 분야에서 삼차원 유동문제를 처음으로 다룬 것은 경계요소법을 사용한 Bush와 Phan-Thien[11]이었고, 유한요소법을 이용하여 삼차원 압출팽창 문제를 다룬 것은 Karagiannis 등[12, 13]과 Shiojima와 Shimazaki[14], Lee와 Lee[15]에서 찾아볼 수 있다.

본 연구에서는 유한요소법을 이용하여 실험결과와 비교하기 위하여 원통관을 통과하는 섬유현탁액의 압출팽창 문제를 수치모사하였는데, 섬유배향이 유동에 미치는 영향과 이로 인해 생기는 유동이 섬유배향에 미치는 영향을 동시에 고려하였다. 현탁강도계수와 섬유상호계수의 크기에 따라 달라지는 팽창비는 입구에서의 섬유 유입조건에도 영향을 받게 되는데, 섬유배향이 압출팽창에 미치는 영향에 초점을 두어서 살펴보고자 한다.

## 2. 섬유현탁액에 대한 이론적 배경

### 2.1. 유변방정식

본 연구에서는 희박현탁액 또는 비교적 묽은 현탁액을 대상으로 개발된 유변방정식을 사용하였다. 일반적으로 섬유현탁액에 대한 세가지 섬유 농도영역[16]은 희박현탁액, 비교적 묽은 현탁액, 진한 현탁액으로 나뉘는데 다음과 같이:  $\phi < 1/r^2$  일 때 희박현탁액;  $1/r^2 < \phi < 1/r$  일 때 비교적 묽은 현탁액;  $\phi > 1/r$  일 때 진한 현탁액으로 정의된다. 여기서  $\phi$ 는 섬유 부피분율이고  $r$ 은 섬유의 종횡비인데 종횡비는 타원체의 단축에 대한 장축의 길이비를 의미한다. 섬유현탁액의 세 영역을 종횡비와 부피분율로 나타내면 Fig. 1과 같다.

섬유현탁액에 대한 연속체모델 유변방정식[17]은 입자로 병진과 회전을 하는 타원체 주위의 응력장에 대한 이론에 기초를 두고 있는데 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{T} = 2\mu\mathbf{D} + 2\mu\phi\{C_1\mathbf{D} : \langle \mathbf{pppp} \rangle + C_2(\mathbf{D} \cdot \langle \mathbf{pp} \rangle + \langle \mathbf{pp} \rangle \cdot \mathbf{D}) + C_3\mathbf{D}\} \quad (1)$$

여기서  $\mathbf{T}$ 는 타원체 입자의 존재를 포함하는 extra 응력텐서,  $\mu$ 는 뉴턴매질 유체의 점도,  $\mathbf{D}$ 는  $(\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^T)/2$ 로 표시되는 변형율텐서,  $\mathbf{p}$ 는 타원체 입자의 축을 따르는 단위벡터이고,  $\langle \rangle$ 는 배향분포함수를 곱하여 모든 배향방향에 대하여 적분한다는 것을 의미한다. 즉,

$$\langle \mathbf{pp} \rangle = \int \mathbf{pp}\Psi(\mathbf{p}) d\mathbf{p} \quad (2a)$$

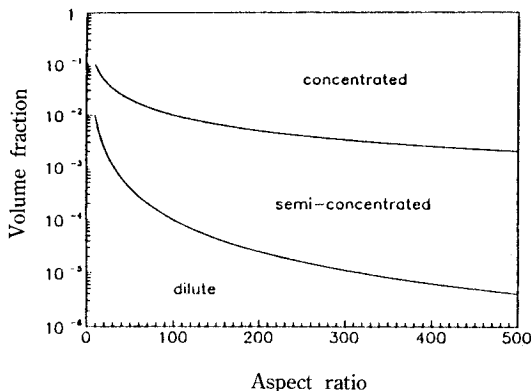


Fig. 1. Concentration regimes for fiber suspensions.

$$\langle \mathbf{pppp} \rangle = \int \mathbf{pppp}\Psi(\mathbf{p}) d\mathbf{p} \quad (2b)$$

종횡비의 함수로 표시되는 응력형상계수  $C_1, C_2, C_3$ 는  $r \gg 1$ 인 경우에 다음과 같다.

$$C_1 = \frac{r^2}{2(\ln 2r - 1.5)} \quad (3a)$$

$$C_2 = \frac{6\ln 2r - 11}{r^2} \quad (3b)$$

$$C_3 = 2 \quad (3c)$$

그런데 이 경우  $C_2, C_3$ 는  $C_1$ 보다 훨씬 작으므로 무시할 수 있게 되어, 결국 식 (1)은 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{T} = 2\mu\mathbf{D} + \mu\alpha\mathbf{D} : \langle \mathbf{pppp} \rangle \quad (4a)$$

$$\alpha = \phi \frac{r^2}{\ln 2r - 1.5} \quad (4b)$$

이때  $\alpha$ 는 현탁액의 유동에서 섬유의 역할을 나타내는 현탁강도계수(suspension intensity coefficient)이다.

### 2.2. 배향방정식

Fokker-Plank식으로 알려진  $\Psi$ 에 대한 지배방정식은 섬유가 배향을 변화시킬 때 섬유배향의 보존을 나타내는 연속방정식으로 다음처럼 표시된다.

$$\frac{D\Psi}{Dt} = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot (\Psi \dot{\mathbf{p}}) \quad (5)$$

윗 식에 나타나는 미분 연산자  $\partial/\partial \mathbf{p}$ 는 Bird 등[18]에 잘 정의되어 있다. 단일입자에 대한 운동방정식은 다음과 같다.

$$\dot{\mathbf{p}} = -\mathbf{W} \cdot \mathbf{p} + \lambda(\mathbf{D} \cdot \mathbf{p} - \mathbf{D} : \mathbf{ppp}) - D_r \frac{1}{\Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{p}} \quad (6)$$

여기서  $\mathbf{W}$ 는  $(\nabla\mathbf{v} - \nabla\mathbf{v}^T)/2$ 로 표시되는 vorticity 텐서,  $\lambda$ 는 입자의 형상에 관련되는 인자로  $(r^2 - 1)/(r^2 + 1)$ 로 표시되며,  $D_r$ 은 Brownian 운동과 관련된 회전 확산계수를 의미한다.

식 (6)을 식 (5)에 대입하고  $\mathbf{pp}$ (텐서곱)에  $\Psi$ 를 곱해 배위공간의 모든 방향에 대해 적분하면 다음과 같은 배향방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{D\langle pp \rangle}{Dt} = & -W \cdot \langle pp \rangle + \langle pp \rangle \cdot W + \lambda(D \cdot \langle pp \rangle \\ & + \langle pp \rangle \cdot D - 2D : \langle pppp \rangle) \\ & + 2D_r(I - v\langle pp \rangle) \end{aligned} \quad (7)$$

여기서  $I$ 는 단위텐서,  $v$ 는 삼차원 배향에서는 3이고 이차원 배향에서는 2이다. 본 연구에서는 섬유간 상호작용을 고려하고 대류항을 포함시켜서 해를 구하고자 하는데,  $D_r$ 을 Folgar와 Tucker[4]가 제안한  $C_I \dot{\gamma}$ 로 대체하면 다음의 배향방정식을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} v \cdot \nabla a_2 = & -W \cdot a_2 + a_2 \cdot W + \lambda(D \cdot a_2 + a_2 \cdot D \\ & - 2D : a_4) + 2C_I \dot{\gamma}(I - va_2) \end{aligned} \quad (8)$$

여기서  $a_2$ 는 2차 배향텐서  $\langle pp \rangle$ ,  $a_4$ 는 4차 배향텐서  $\langle pppp \rangle$ 를 나타내고,  $C_I$ 는 섬유간 상호작용을 나타내는 섬유상호계수이고  $\dot{\gamma}$ 는 변형율텐서의 스칼라 양을 나타낸다.

### 3. 지배방정식과 경계조건

섬유현탁액의 정상상태 등온유동에 대한 지배방정식은 다음의 연속방정식, 운동방정식, 유변방정식 그리고 배향방정식에 의하여 주어진다. 비압축성 유체에 대한 연속방정식은

$$\nabla \cdot v = 0 \quad (9)$$

이고, 운동방정식은 다음과 같다.

$$-\nabla p + \nabla \cdot T + f = \rho v \cdot \nabla v \quad (10)$$

여기서 관성력과 중력에 의한 효과는 무시하였다. 유변방정식은 앞의 식 (4)에 의해 주어지며, 배향방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} v \cdot \nabla a_2 = & -W \cdot a_2 + a_2 \cdot W + \lambda(D \cdot a_2 + a_2 \cdot D \\ & - 2D : a_4) + 2C_I \dot{\gamma}(I - va_2) \end{aligned} \quad (11)$$

여기서 4차 배향텐서는 quadratic closure 근사를 이용하여  $a_4 \approx a_2 a_2$ 로 표시하였다.

원통관을 통과하는 유동을 축대칭 이차원 유동(2-D 유동)으로 모사할 경우, 섬유배향을 이차원 배향(2-D 배향) 또는 삼차원 배향(3-D 배향)으로 모사할 수 있다. 유동장이 섬유배향에 영향을 받지 않는다고 가정한 경우에, 이차원 유동에 삼차원 배향분포 함수를 사용한 연구가 많이 있었다. 하지만 유동장이

섬유배향에 의해 영향을 받을 경우에는 배향텐서의 3-방향 성분( $a_{13}$ 와  $a_{23}$ )이 이차원 유동을 삼차원 유동으로 만들어주게 되므로 이차원 유동/삼차원 배향으로 모사하는데에는 한계가 있다. 이때 배향분포를 이차원으로 고정시키고 3-방향으로의 섬유간 상호작용을 무시할 수 있다는 가정을 한다면 이차원 유동에 이차원 섬유배향(2-D/2-D)으로 모사할 수 있다. 한편, 배향텐서의 3-방향 성분에 의해 발생하는 3-방향 속도성분( $w$ )을 무시한다면 이차원 유동에 삼차원 섬유배향(2-D/3-D)으로 문제를 설정할 수도 있다. 본 연구에서는 두가지 경우를 모두 수치모사했는데, 만일 어떠한 제약이나 가정이 없다면 유동장과 섬유배향을 모두 삼차원으로 처리해야 할 것이다.

축대칭 압출팽창유동에 대한 대상계는 Fig. 2에 주어져 있다. 관의 반지름( $R_0$ )은 1 cm이고 관의 길이는 3 cm, 압출물의 길이는 5 cm로 잡았다. 유동장에 대한 경계조건은 다음과 같다. 관의 입구(A-B)에서는 다음과 같이 충분히 전개된 Poiseuille 유동조건을 부과했다:

$$v = 1 - r^2, u = 0 \quad (12)$$

여기서  $u$ 는  $r$ -방향 속도성분,  $v$ 는  $z$ -방향 속도 성분이다. 중심선(B-C)을 따라서는 대칭조건을 부과했고, 압출물의 끝(C-D)에서는 플러그 유동조건을 다음과 같이 부과했다:

$$t_z = 0, u = 0 \quad (13)$$

자유표면(D-E)에서는 자유표면에 수직인 속도성분이 없으며 힘이 작용하지 않는 조건을 부과했다:

$$t_r = t_z = 0 \quad (14)$$

그리고 관벽(E-A)에서는 no-slip 경계조건을 부과했다:

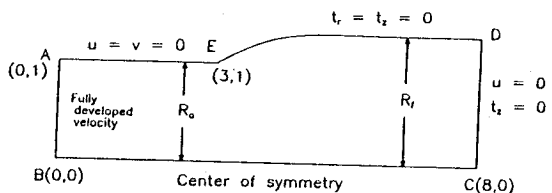


Fig. 2. Axisymmetric extrudate swell problem.

$$u=v=0$$

(15)

섬유배향에 대한 경계조건은 관의 입구(A-B)에 부과해야 하는데, 이차원 배향의 경우, 임의배향유입일 때  $a_{11}=a_{22}=1/2$ ,  $a_{12}=0$ , 유동방향에 대해 정렬배향 유입일 때  $a_{22}=1$ ,  $a_{11}=a_{12}=0$ 으로 주어진다(여기서 1, 2, 3은 r, z,  $\theta$  방향을 나타낸다). 삼차원 배향의 경우에는, 임의배향유입일 때  $a_{11}=a_{22}=a_{33}=1/3$ ,  $a_{12}=0$ , 정렬배향유입일 때  $a_{22}=1$ ,  $a_{11}=a_{33}=a_{12}=0$ 이다. 이때 3-방향 속도성분이 없기 때문에  $a_{13}$ 와  $a_{23}$  성분은 무시하였다.

#### 4. 유한요소해석

##### 4.1. 축대칭 이차원 유동과 이차원 배향분포

섬유현탁액에 대한 유동장과 섬유 배향분포방정식, 식 (9)-(11)을 표준형 Galerkin 유한요소법을 사용하여 해를 구하는데, 속도성분  $u$ 와  $v$ , 압력  $p$ , 배향텐서성분  $a_{11}$ 과  $a_{12}$ 는 다음의 형상함수로 근사적으로 표시하였다.

$$u=\sum u_j\psi_j, \quad v=\sum v_j\psi_j, \quad p=\sum p_j\phi_j,$$

$$a_{11}=\sum a_{11j}\psi_j, \quad a_{12}=\sum a_{12j}\psi_j, \quad (16)$$

여기서  $u_j$ ,  $v_j$ ,  $p_j$ ,  $a_{11j}$ ,  $a_{12j}$ 는 각각 질점에서의 속도 성분, 압력, 배향텐서성분을 나타내고,  $\psi_j$ 는 삼각형 요소에서는 6 질점 quadratic 형상함수, 사각형 요소에서는 9 질점 biquadratic 형상함수이며,  $\phi_j$ 는 삼각형 요소에서는 3 질점 linear 형상함수, 사각형 요소에서는 4 질점 bilinear 형상함수이다.

운동방정식에 가중함수  $r\psi_i$ 를 스칼라곱하고 적분하여 divergence 정리를 이용하면 다음의 Galerkin 형태를 얻을 수 있다.

$$\langle r\psi_{i,1}; -p+T_{11} \rangle + \langle r\psi_{i,2}; T_{12} \rangle + \langle \psi_i; T_{33} \rangle - \langle \psi_i; p \rangle = \langle r\psi_i; t_1 \rangle \quad (17a)$$

$$\langle r\psi_{i,1}; T_{12} \rangle + \langle r\psi_{i,2}; -p+T_{22} \rangle = \langle r\psi_i; t_2 \rangle \quad (17b)$$

여기서  $\langle : \rangle$ 는 면적분을,  $\langle : \rangle$ 은 선적분을 의미하고,  $t_1$ 과  $t_2$ 는 contact force의 r과 z성분을 의미한다. 적분기법은 사각형 요소에서는 9-점 Gaussian quadrature를, 삼각형 요소에서는 7-점 Gaussian quadrature를 사용하였다. 식 (4)의 유변방정식으로부

터 응력텐서성분  $T_{ij}$ 는 다음과 같이 된다.

$$T_{11}=2\mu u_{,1}+\mu\alpha\{a_{11}a_{11}u_{,1}+a_{11}a_{12}(u_{,2}+v_{,1})+a_{11}(1-a_{11})v_{,2}\} \quad (18a)$$

$$T_{12}=\mu(u_{,2}+v_{,1})+\mu\alpha\{a_{11}a_{12}u_{,1}+a_{12}a_{12}(u_{,2}+v_{,1})+a_{12}(1-a_{11})v_{,2}\} \quad (18b)$$

$$T_{22}=2\mu v_{,2}+\mu\alpha\{a_{11}(1-a_{11})u_{,1}+a_{12}(1-a_{12})(u_{,2}+v_{,1})+(1-a_{11})(1-a_{11})v_{,2}\} \quad (18c)$$

$$T_{33}=2\mu u/r \quad (18d)$$

가중함수  $r\phi_i$ 를 사용하면 연속방정식은 다음과 같이 되고,

$$\langle r\phi_i; u_{,1}+u/r+v_{,2} \rangle = 0 \quad (19)$$

가중함수  $r\psi_i$ 를 사용하면 섬유에 대한 배향분포방정식의 각 성분식은 다음처럼 된다.

$$\begin{aligned} \langle r\psi_i; ua_{11,1}+va_{11,2} \rangle = & -\langle r\psi_i; 2\omega_{12}a_{12} \rangle \\ & + \langle r\psi_i; \lambda[2d_{11}a_{11}+2d_{12}a_{12}-2\{d_{11}a_{11}a_{11} \\ & + 2d_{12}a_{12}a_{11}+d_{22}(1-a_{11})a_{11}\}] + 2C_f\dot{\gamma}(1-2a_{11}) \rangle \end{aligned} \quad (20a)$$

$$\begin{aligned} \langle r\psi_i; ua_{12,1}+va_{12,2} \rangle = & \langle r\psi_i; 2\omega_{12}a_{11}-\omega_{12} \rangle \\ & + \langle r\psi_i; \lambda[d_{11}a_{12}+d_{12}+d_{22}a_{12}-2\{d_{11}a_{12}a_{11} \\ & + 2d_{12}a_{12}a_{12}+d_{22}(1-a_{11})a_{12}\}] - 4C_f\dot{\gamma}a_{12} \rangle \end{aligned} \quad (20b)$$

여기서  $a_{22}$ 는  $1-a_{11}$ 으로 바꾸어 쓸 수 있고,

$$\dot{\gamma}=[2(d_{11}^2+d_{22}^2+d_{33}^2+2d_{12}^2)]^{0.5} \quad (21)$$

이다.

근사식 식 (16)을 식 (17)-(20)에 대입하면 비선형 대수방정식계가 되는데 이것은 반복적 방법으로 해를 얻을 수 있다. 운동방정식과 배향방정식은 Newton 반복법으로 각각 구하게 되고, 이 두 식은 Picard형 반복법으로 서로 해를 교환하면서 풀게 된다. 즉, 먼저  $\alpha=0$ 일 때 식 (17)-(19)는 뉴턴유동에 대한 선형방정식계가 되어 해를 얻는다. 이 해를 이용하여  $\alpha>0$ 일 때의 식 (20)에서  $a_{11}$ 과  $a_{12}$ 를 얻는다. 그러나 quadratic closure 근사에 의해 배향방정식이 비선형이 되므로 이 해는 아직 수렴된 해는 아니다. 이 해를 다시 식 (17)-(19)에 사용하여 유동장에 대한 해를 구한다. 이 과정을 속도성분,

압력, 배향성분들이 모두 주어진 허용범위에 수렴될 때까지 반복하여 해를 구하며 보다 큰  $\alpha$ 에서 해를 얻도록 점차적으로  $\alpha$ 를 증가시키면서 해를 구한다.

#### 4.2. 축대칭 이차원 유동과 삼차원 배향분포

이 경우에는 식 (16)에 다음 성분을 추가로 근사시킨다.

$$a_{22} = \sum a_{22j} \psi_j \quad (22)$$

운동방정식의 Galerkin 형태는 식 (17)과 같고 연속방정식도 식 (19)와 같은데, 유변방정식의  $T_{ij}$  성분은 다음과 같이 된다.

$$T_{11} = 2\mu u_{,1} + \mu \alpha \{ a_{1111} u_{,1} + a_{1112} (u_{,2} + v_{,1}) + a_{1122} v_{,2} + a_{1133} u/r \} \quad (23a)$$

$$T_{12} = \mu (u_{,1} + v_{,1}) + \mu \alpha \{ a_{1112} u_{,1} + a_{1122} (u_{,2} + v_{,1}) + a_{1222} v_{,2} + a_{1233} u/r \} \quad (23b)$$

$$T_{22} = 2\mu v_{,2} + \mu \alpha \{ a_{1122} u_{,1} + a_{1222} (u_{,2} + v_{,1}) + a_{1122} v_{,2} + a_{2233} u/r \} \quad (23c)$$

$$T_{33} = 2\mu u/r + \mu \alpha \{ a_{1133} u_{,1} + a_{1233} (u_{,2} + v_{,1}) + a_{2233} v_{,2} + a_{3333} u/r \} \quad (23d)$$

그리고 배향분포방정식은 다음과 같이 된다.

$$\langle r\psi_i; u a_{11,1} + v a_{11,2} \rangle = -\langle r\psi_i; 2\omega_{12} a_{12} \rangle + \langle r\psi_i; \lambda [2d_{11} a_{11} + 2d_{12} a_{12} - 2\{ d_{11} a_{1111} + 2d_{12} a_{1112} + d_{22} a_{1122} + d_{33} a_{1133} \}] \rangle + \langle r\psi_i; 2C_I \dot{\gamma} (1 - 3a_{11}) \rangle \quad (24a)$$

$$\langle r\psi_i; u a_{12,1} + v a_{12,2} \rangle = \langle r\psi_i; \omega_{12} (a_{11} - a_{22}) \rangle + \langle r\psi_i; \lambda [d_{12} a_{11} + (d_{11} + d_{22}) a_{12} + d_{12} a_{22} - 2\{ d_{11} a_{12} a_{11} + 2d_{12} a_{12} a_{12} + d_{22} (1 - a_{11}) a_{12} \}] \rangle - \langle r\psi_i; 6C_I \dot{\gamma} a_{12} \rangle \quad (24b)$$

$$\langle r\psi_i; u a_{22,1} + v a_{22,2} \rangle = \langle r\psi_i; 2\omega_{12} a_{12} \rangle + \langle r\psi_i; \lambda [2d_{12} a_{12} + 2d_{22} a_{22} - 2\{ d_{11} a_{1122} + 2d_{12} a_{1122} + d_{22} a_{2222} + d_{33} a_{2233} \}] \rangle + \langle r\psi_i; 2C_I \dot{\gamma} (1 - 3a_{22}) \rangle \quad (24c)$$

여기서  $a_{ijkl}$  성분은  $a_{ij} a_{kl}$ 로 근사시키고  $a_{33}$ 는  $1 - a_{11} - a_{22}$ 로 바꾸어 쓸 수 있다.

## 5. 결과 및 검토

사각형요소 150개로 이루어진 초기메쉬와 섬유가

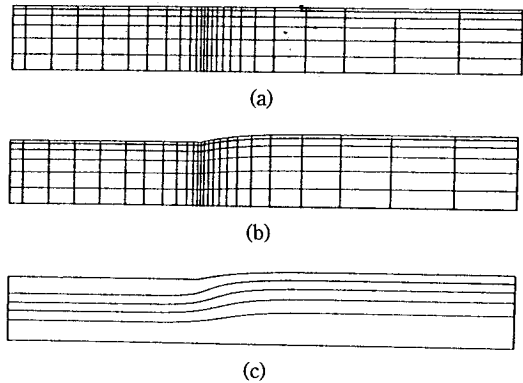


Fig. 3. Axisymmetric extrudate swell of Newtonian fluid at  $Re=0$ : (a) initial mesh, (b) final mesh, (c) streamlines.

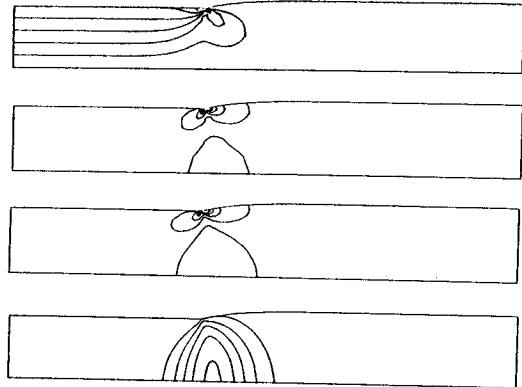


Fig. 4. Contour lines of  $\tau_{12}$ ,  $\tau_{11}$ ,  $\tau_{22}$ , and  $\tau_{33}$  components (divided by  $\mu$ ) for axisymmetric extrudate swell of Newtonian fluid at  $Re=0$ .

없는 순수한 뉴턴유체에 대한 압출팽창의 결과로 수렴된 최종메쉬, 유선이 Fig. 3에 나타나 있다. 원통관을 통과하는 압출팽창에서 팽창비는 다음과 같이 관반경( $R_0$ )에 대한 압출물의 반경( $R_f$ )과 관반경의 차를 %로 나타내어 정의하였다.

$$SR(\%) = \frac{R_f - R_0}{R_0} \times 100 \quad (25)$$

수렴된 13.49%의 팽창비는 Batchelor[19]의 실험결과인 13.5%와 잘 일치한다. 이 경우에 대한 응력장은 Fig. 4에 나타나 있는데, 전단응력( $\tau_{12}$ )과 11-, 22-, 33-성분의 수직응력( $\tau_{11}$ ,  $\tau_{22}$ ,  $\tau_{33}$ )에 대한 등고선을

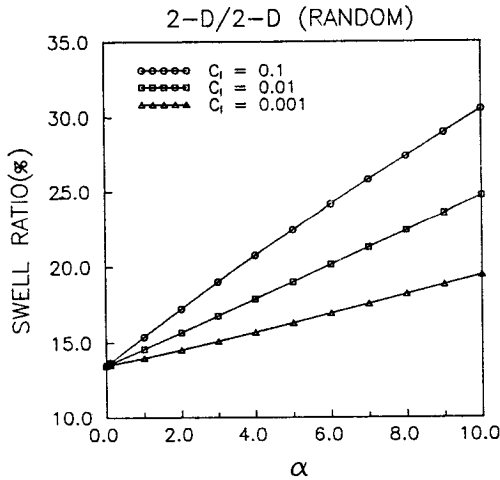


Fig. 5. Swell ratio vs. suspension intensity coefficient  $\alpha$  for various  $C_I$  values in case of axisymmetric 2-D flow and 2-D orientation with random fiber input.

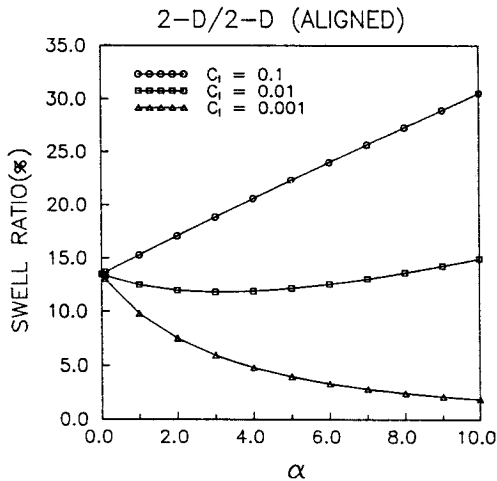


Fig. 6. Swell ratio vs. suspension intensity coefficient  $\alpha$  for various  $C_I$  values in case of axisymmetric 2-D flow and 2-D orientation with aligned fiber input.

보여준다. 응력의 최고, 최저값 모두 관의 출구 부근에 집중되어 나타났는데 이것은 이곳이 경계조건의 불일치로 인한 singular point이기 때문이다. 또한 압출물의 끝부분은 예상하듯이 전단응력과 수직응력이 없는 부분임을 알 수 있다.

관 입구에서 섬유를 임의배향으로 유입한 이차원 유동/이차원 배향의 경우에 대한 팽창비를 Fig. 5에 현탁강도계수  $\alpha$ 의 함수로써 여러 섬유상호계수  $C_I$

값에 대해 나타내었다. 팽창비는 약간의 섬유첨가에도 많이 변화되었으며  $\alpha$ 가 증가함에 따라 팽창비가 커짐을 알 수 있다. 이것은 관의 길이가 짧고 입구에서의 섬유를 임의배향으로 유입시킬 경우 더 큰 압출팽창이 일어남을 의미한다. 그러나 섬유를 정렬배향으로 유입할 경우인 Fig. 6은 좀 다른 결과를 보여주는데, 섬유상호계수  $C_I$ 가 클 때( $C_I=0.1$ )는  $\alpha$ 가 증가함에 따라 팽창비가 증가하지만 작은 값( $C_I=0.001$ )에서는 감소함을 보이고 있다. 중간정도의 값( $C_I=0.01$ )에서는 처음에는 감소하다가 점차로 증가함을 보여준다. 수치모사할 경우  $C_I$ 값이 줄어들수록 점점 수렴시키기가 힘들어지는데 그 이유는 배향방정식이 점탄성 유동문제의 유변방정식과 비슷한 hyperbolic형 편미분 방정식이어서  $C_I$ 값이 줄어들수록 대류항이 상대적으로 커지기 때문이다. 보다 작은  $C_I$ 값에서도 수렴되게 하려면 배향방정식의 대류항은 streamline-upwind 방법[20]으로 처리하는 것도 하나의 방법이 될 것이다.

섬유의 배향분포를 도식적으로 보여주기 위하여 배향텐서의 고유치와 고유벡터를 이용하였는데, 고유벡터는 축의 방향, 고유치는 축의 길이를 나타낸다. 이때 그려진 장축과 단축은 배향타원체를 구성하는데 이것은 각 방향으로의 배향분포의 정도를 나타내는 것이다. 또한 섬유배향분포를 보다 간단하고 쉽게 이해하기 위한 척도로서, 주유동방향을 따른 정렬의 정도를 나타내는 배향인자( $f$ )를 사용하였다. 여기서는 주유동방향이 2-방향( $z$ )이므로 배향인자( $f$ )는 이차원 배향과 삼차원 배향에서 각각 다음과 같이 표시된다.

$$f = 2a_{22} - 1 \quad (26)$$

$$f = (3a_{22} - 1)/2 \quad (27)$$

Fig. 7과 8은 이차원 유동/이차원 배향에 대한 결과인데, 각각 임의배향과 정렬배향유입의 경우  $C_I=0.001$ 과  $\alpha=10$ 에서의 수렴된 메시, 섬유의 배향분포, 배향인자값에 대한 등고선을 나타낸 것이다. 임의배향 유입의 경우가 정렬배향 유입의 경우보다 큰 팽창비를 보여주는데, 이것은 팽창비가 압출물의 외부 표면부분과 내부 중심부분의 신장점도의 차이에 의해 영향을 받는 것으로 설명할 수 있었다. 최대 신장점도는 섬유가 유선방향으로 정렬되어 있을 때

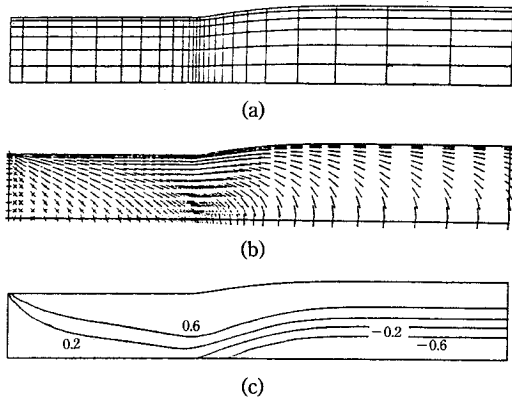


Fig. 7. Axisymmetric extrudate swell of fiber suspensions at  $C_f=0.001$  and  $\alpha=10$  with random fiber input (2-D flow and 2-D orientation): (a) final mesh, (b) fiber orientation distributions, (c) contour of orientation parameter.

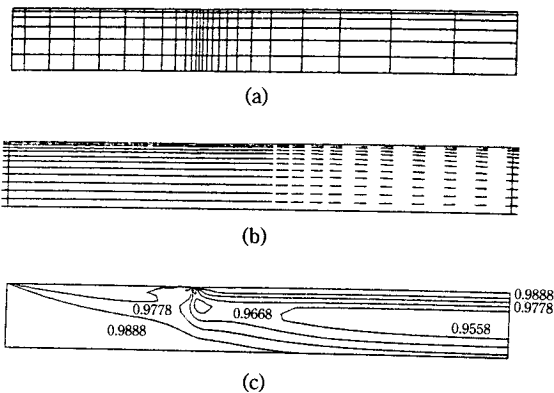


Fig. 8. Axisymmetric extrudate swell of fiber suspensions at  $C_f=0.001$  and  $\alpha=10$  with aligned fiber input (2-D flow and 2-D orientation): (a) final mesh, (b) fiber orientation distributions, (c) contour of orientation parameter.

얻어지고, 최소 신장점도는 섬유가 유선방향에 직각방향으로 정렬되어 있을 때 얻어진다. 바깥부분이 안쪽보다 훨씬 큰 신장점도를 가질 때 큰 팽창을 보여주며, 조금 클 때에는 작은 팽창을 보여준다. 벽 근처의 섬유는 판 출구를 지날 때 급격한 속도 상승으로 인해 매우 강한 신장유동을 겪으므로 섬유 유입조건에 관계없이 곧장 정렬된 형태로 자유표면으로 이동된다. 하지만 중심선에서는 두 경우가 판이하게 다르다. 정렬유입의 경우에는 섬유가 압출

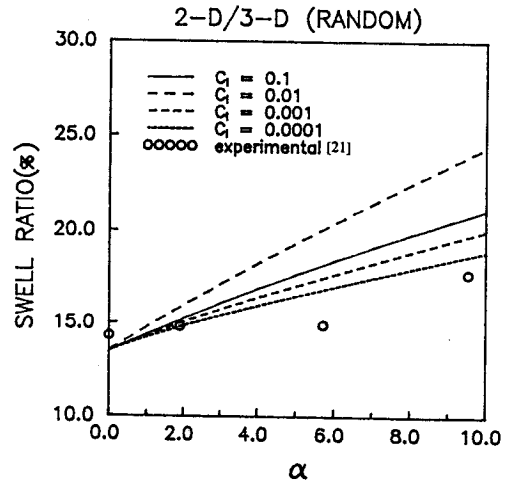


Fig. 9. Swell ratio vs. suspension intensity coefficient  $\alpha$  for various  $C_f$  values in case of axisymmetric 2-D flow and 3-D orientation with random fiber input.

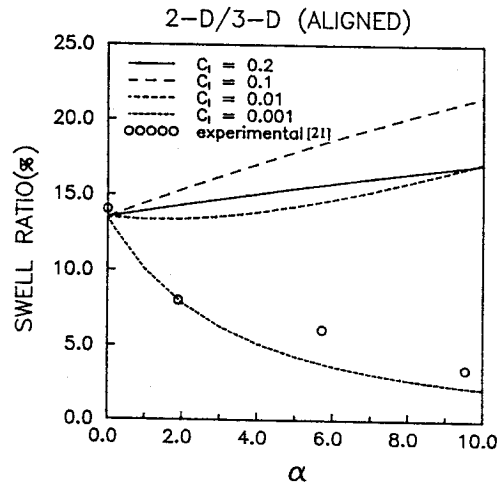


Fig. 10. Swell ratio vs. suspension intensity coefficient  $\alpha$  for various  $C_f$  values in case of axisymmetric 2-D flow and 3-D orientation with aligned fiber input.

물의 끝에서도 여전히 정렬된 분포를 보여주지만, 임의유입의 경우는 직각방향으로 정렬됨을 알 수 있다. 그러므로 임의배향 유입의 경우에 내부와 외부의 신장점도의 차이가 훨씬 커 큰 팽창을 보여주게 된다. 배향인자의 등고선(Figs. 7c와 8c)는 이것을 잘 뒷받침해준다.

이차원 유동/삼차원 배향의 조건을 써 임의배향



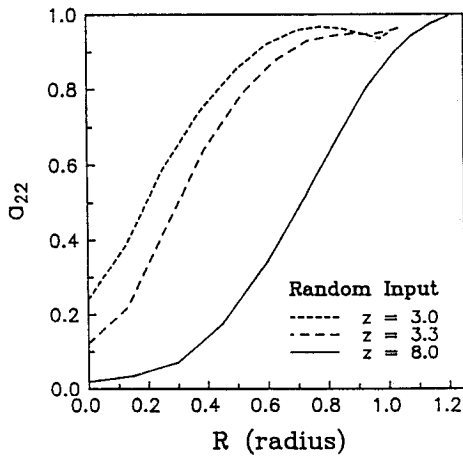


Fig. 11. Orientation tensor component in z-direction along the radial position at different locations of  $z$  with random fiber input ( $\alpha=10$  and  $C_I=0.01$ ).

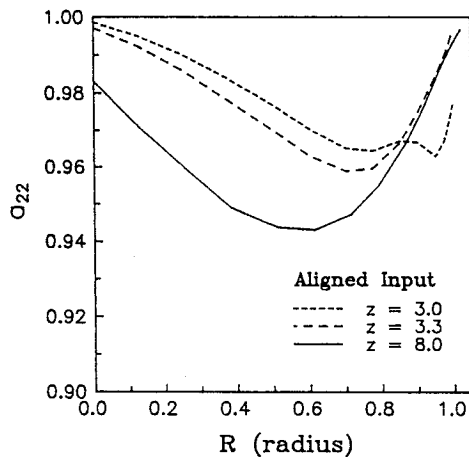


Fig. 12. Orientation tensor component in z-direction along the radial position at different locations of  $z$  with aligned fiber input ( $\alpha=10$  and  $C_I=0.01$ ).

으로 유입한 경우, 팽창비  $\alpha$ 의 함수로 여러  $C_I$  값에 대해 Fig. 9에 나타내었다. 이차원 배향의 조건을 사용한 경우와 비슷하게 팽창비는  $\alpha$ 가 증가함에 따라 증가함을 알 수 있다. 그래프속의 실험치[21]는 섬유 종횡비가 83이고 부피분율이 0, 0.001, 0.003, 0.005인 것인데, 4점만으로는 직접적인 비교가 힘들지만 증가하는 경향을 보여주고 있다. 실험치들이 수치결과보다 아래에 위치하는 것은 실험시 관 입

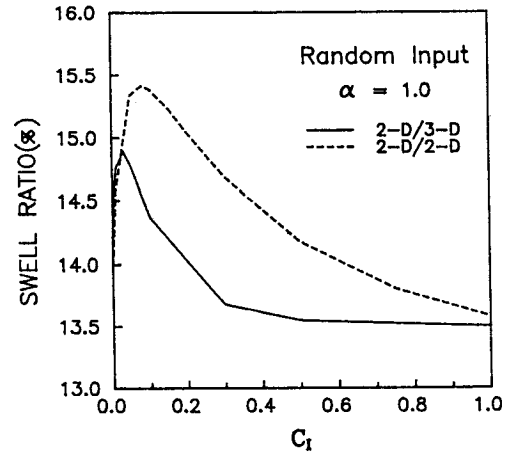


Fig. 13. Swell ratio vs. fiber/fiber interaction coefficient  $C_I$  at  $\alpha=1$  with random fiber input.

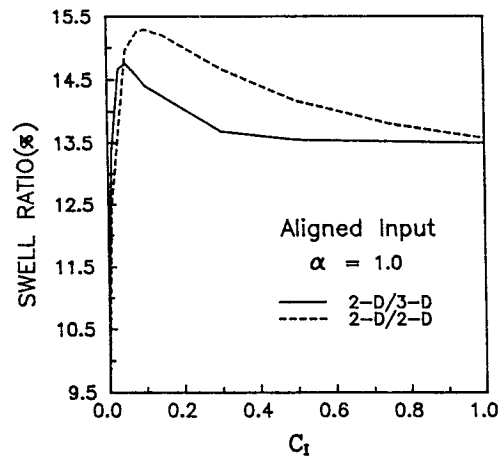


Fig. 14. Swell ratio vs. fiber/fiber interaction coefficient  $C_I$  at  $\alpha=1$  with aligned fiber input.

구조건을 완전한 임의배향상태로 만들어 주기가 어렵기 때문에 생각된다. 정렬배향유입의 경우인 Fig. 10도 이차원 배향의 조건을 사용한 경우와 비슷하지만 약간 다른 경향을 보여주는데, Fig. 6과 비교해 볼 때  $C_I=0.1$ 에서는 삼차원 배향의 경우가 이차원 배향의 경우보다 팽창이 덜 일어나지만  $C_I=0.001$ 에서는 팽창이 더 많이 일어나는 것을 보여준다. 실험치도 임의배향유입과 달리  $\alpha$ 에 따라 감소함을 보이는데 대략  $C_I=0.001$ 인 수치결과와 유사함을 알 수 있다.

Fig. 11과 12는  $\alpha$ 가 10이고  $C_I$ 가 0.001일 때 세가지

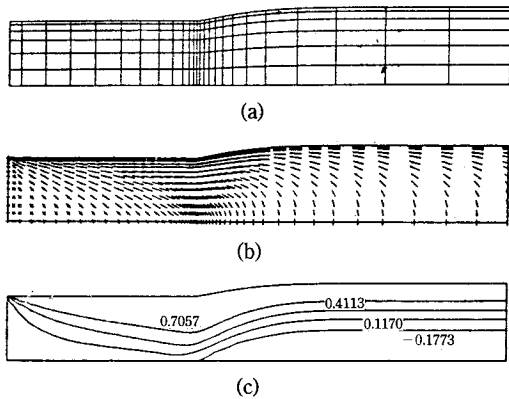


Fig. 15. Axisymmetric extrudate swell of fiber suspensions at  $C_f=0.001$  and  $\alpha=10$  with random fiber input (2-D flow and 3-D orientation): (a) final mesh, (b) fiber orientation distributions, (c) contour of orientation parameter.

다른  $z$  위치( $z=3.0$  cm이 관 출구)에서 반경방향을 따른 주유동 배향텐서 성분( $a_{22}$ )을 그린 것인데, 관 입구에서의 배향조건이 다를 때 팽창이 다르게 일어나는 이유를 설명해준다. Fig. 11에서 보듯이 임의배향유입의 경우 섬유가 출구를 지날 때 표면과 중심간의 큰 차이로 인해 20% 정도의 팽창이 일어났으나, 정렬배향유입 경우인 Fig. 12는 두 부분의 차이가 거의 없기 때문에 단지 2% 정도의 팽창이 일어난 것이다.

$\alpha=1$ 일 때  $C_f$ 에 대한 팽창비를 Figs. 13과 14에 그려보았는데 두 경우 모두 최대팽창비를 주는  $C_f$ 가 존재했다. 임의배향유입의 경우인 Fig. 13은 모든 영역에서 뉴턴유체의 경우보다 큰 팽창비를 보여주었다. 정렬배향유입의 경우인 Fig. 14에서는  $C_f$ 가 무시할 수 있을 정도로 작을 때 뉴턴유체보다 작은 팽창비를 보여주었지만 이 경우에도 관의 반경보다는 여전히 큰 팽창비를 보여주었다.

이차원 유동/삼차원 배향의 임의배향유입과 정렬배향유입의 경우,  $C_f=0.001$ ,  $\alpha=10$ 에서의 수렴된 최종매쉬, 섬유의 배향분포, 배향인자에 대한 등고선을 Figs. 15와 16에 나타내었다. 임의배향유입의 경우 압출물 끝부분의 중심선에서 섬유배향분포(Fig. 15b)를 이차원 유동/이차원 배향의 결과(Fig. 7 b)와 비교해 볼 때, 삼차원 배향인 경우가 두 고유

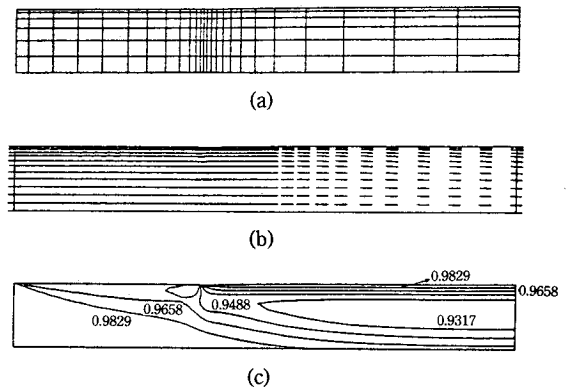


Fig. 16. Axisymmetric extrudate swell of fiber suspensions at  $C_f=0.001$  and  $\alpha=10$  with aligned fiber input (2-D flow and 3-D orientation): (a) final mesh, (b) fiber orientation distributions, (c) contour of orientation parameter.

치의 합(장축과 단축의 길이의 합)이 작는데 이것은  $a_{33}$  성분이 상당한 값으로 존재한다는 사실을 의미하며 이 중심선에서  $a_{33}$ 은  $a_{11}$ 과 같은 값을 나타내고 있다.

## 6. 결 론

비교적 묽은 섬유현탁액이 원통관을 통과하여 압출될 때, 섬유배향이 압출팽창에 미치는 영향을 유한요소법을 이용하여 조사하였다. 유동장과 섬유간의 상호작용을 나타내는 현탁강도계수와 섬유와 섬유간 상호작용을 나타내는 섬유상호계수에 의한 효과를 동시에 고려하였다. 약간의 섬유 첨가에도 팽창비가 상당히 변했는데 섬유상호계수가 작을 때 섬유를 유선방향으로 정렬시켜 유입하면 팽창비는 감소하는 결과를 나타내었다. 반대로 관의 길이가 짧고 섬유가 임의로 배향되어 유입될 경우 팽창비가 증가하는 현상을 발견했는데 이것은 실험치와 비슷한 경향이 었다. 이러한 두가지 경우에서 섬유배향에 의한 팽창비의 차이를 자유표면과 중심부의 신장점도의 차이로 설명할 수 있는데, 신장점도의 차이가 클수록 큰 팽창비를 보였다. 수치모사 결과 현탁강도계수는 팽창비에, 섬유상호계수는 배향분포에 더 큰 영향을 미쳤는데 실제의 섬유현탁액에서는 현탁강도계수와

섬유상호계수는 밀접한 관계가 있으므로 두 계수를 독립적으로 사용할 수는 없을 것이다. 앞으로 섬유 상호계수가 작은 경우에서도 수립할 수 있는 알고리즘의 개발과 진한 현탁액 및 섬유/고분자 현탁액에 대한 유변방정식의 개발 등의 분야에 더욱 연구가 진행되어야 할 것이다.

## 감 사

본 연구는 한국과학재단 및 (주)럭키의 연구비 지원에 의하여 이루어졌음을 밝히고 이에 감사의 뜻을 표합니다.

## 기 호

$\mathbf{a}_2$	second-order orientation tensor
$\mathbf{a}_4$	fourth-order orientation tensor
$a_{ij}$	ij-component of 2nd-order orientation tensor
$a_{ijkl}$	ijkl-component of 4th-order orientation tensor
$C_i$	phenomenological interaction coefficient among fibers
$C_1, C_2, C_3$	stress shape coefficients
$\mathbf{D}$	rate of deformation tensor
$D_r$	rotary diffusivity due to Brownian motion
$d_{ij}$	ij-component of rate of deformation tensor
$\mathbf{f}$	body force per unit volume
$f$	orientation parameter
$\mathbf{p}$	unit vector along the axis of a fiber
$p$	pressure
$R_f$	final extrudate radius
$R_o$	die radius
$r$	radius, or fiber aspect ratio
$\mathbf{T}$	extra stress tensor
$T_{ij}$	ij-component of extra stress tensor
$t_i$	i-component of contact force per unit area on the boundary
$u$	radial velocity in $r, z, \theta$ coordinates
$v$	axial velocity in $r, z, \theta$ coordinates
$\mathbf{W}$	vorticity tensor
$\alpha$	suspension intensity coefficient
$\dot{\gamma}$	scalar magnitude of the rate deformation

tensor

$\lambda$	parameter related to the shape of the particle
$\mu$	viscosity of Newtonian fluid
$\rho$	density of fluid
$\phi$	fiber volume fraction
$\phi_i$	linear, bilinear shape function
$\Psi$	probability distribution function for orientation
$\psi_i$	quadratic, biquadratic shape function
$\omega_{ij}$	ij-component of vorticity tensor

## 참고문헌

1. G.B. Jeffery, *Proc. Roy. Soc.*, **A102**, 161 (1923).
2. H. Goldsmith and S.G. Mason, "Rheology: Theory and Applications," ed. by F.R. Eirich, Vol. 4, Academic Press, 1967, Chapter 2.
3. R.C. Givler, M.J. Crochet and R.B. Pipes, *J. Compos. Mat.*, **17**, 330 (1983).
4. F.P. Folgar and C.L. Tucker, *J. Reinf. Plast. Compos.*, **3**, 98 (1984).
5. G.K. Batchelor, *J. Fluid Mech.*, **41**, 545 (1970).
6. S.M. Dinh and R.C. Armstrong, *J. Rheol.*, **28**, 207 (1984).
7. A.C. Papanastasiou and A.N. Alexandrou, *J. Non-Newt. Fluid Mech.*, **25**, 313 (1987).
8. G.G. Lipscomb, M.M. Denn, D.U. Hur and D.V. Boger, *J. Non-Newt. Fluid Mech.*, **26**, 297 (1988).
9. S.G. Advani and C.L. Tucker, *J. Rheol.*, **31**, 751 (1987).
10. R.E. Nickell, R.I. Tanner and B. Caswell, *J. Fluid Mech.*, **65**, 189 (1974).
11. M.B. Bush and N. Phan-Thien, *J. Non-Newt. Fluid Mech.*, **18**, 211 (1985).
12. A. Karagiannis, A.N. Hrymak and J. Vlachopoulos, *AIChE J.*, **34**, 2088 (1988).
13. A. Karagiannis, A.N. Hrymak and J. Vlachopoulos, *Rheol. Acta*, **28**, 121 (1989).
14. T. Shiojima and Y. Shimazaki, *J. Non-Newt. Fluid Mech.*, **34**, 269 (1990).
15. Seong Jae Lee and Seung Jong Lee, *Korean J. Rheol.*, **2**(2), 35 (1989).
16. M. Doi and S.F. Edwards, *J. Chem. Soc. Faraday Trans. II*, **74**, 560 (1978).
17. E.J. Hinch and L.G. Leal, *J. Fluid Mech.*, **52**, 683 (1972).

18. R.B. Bird, C.F. Curtiss, R.C. Armstrong and O. Hassager, "Dynamics of Polymeric liquids, Vol. 2, Kinetic Theory", Wiley, 1987, Chapter 14.
19. J. Batchelor, J.P. Berry and F. Horsfal, *Polymer*, **14**, 297 (1973).
20. A.N. Brooks and T.J.R. Hughes, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **32**, 199 (1982).
21. Joon Sung Yoon, MS Thesis, Seoul National University (1992).