

〈강 좌〉

수공학에서의 신뢰도 분석방법(I)

김 문 모* · 조 원 철** · 이 원 환***

*본 강좌의 구성은 다음과 같다. 그러나, 지면 관계상 이번호에는 3.3절까지만 게재하고, 나머지는 다음호에 실기로 한다.

1. 서론
2. 시스템의 위험도와 신뢰도의 정의
3. 신뢰도 분석방법
 1. 직접 적분법(Direct Integration Method)
 2. Monte Carlo Simulation Method
 3. Mean Value First-Order Second Moment(MVFOSM) Method
 - 3.1 MVFOSM법에 기초한 확률산정
 - 3.2 MVFOSM법의 장점과 단점
 4. Advanced First-Order Second Moment(AFOSM) Method
 - 4.1 파괴점을 찾기 위한 방법
 - 4.2 AFOSM방법에 기초한 확률계산
 - 4.3 AFOSM방법의 장점
4. 신뢰도분석방법의 수공학에의 적용 예
 1. 직접적분법의 적용
 2. Monte Carlo Simulation방법의 적용
 3. MVFOSM방법의 적용
 4. AFOSM방법의 적용
5. 맺음말
6. 참고문헌

1. 서 론

신뢰도 분석방법은 지난 30여년 동안 구조물의 안전 여부를 판단하기 위한 과학적인 근거를 제시하기 위해 구조공학자 들에 의해 주로 발전되어 왔다. 그러나, 최근에는 수공구조물의 안전을 산정하기 위해 수공학자들도 많은 관심을 보이고 있으며 비약적인 발전을 보이고 있다. 최근에 Computer분야의 급격한 발전에 따라 이전에는 기대하기 어려웠던 추계학적인 방법에 의해 수문량의 확충이나 수자원의 계획, 설계를 하고 있으며, 각종 수공구조물의 설계를 위해서는 기왕의 수문사상을 통계적으로 분석하여 적당한 설계

빈도에 따른 계획수문량을 결정하는 확정론적인 방법을 많이 이용하게 된다.

그러나, 이러한 수공계획에서는 불확실성(Uncertainties)이 항상 포함되게 되며, 이에 따른 위험도(Risk)가 생기게 된다. 예로서 수문모형화(강우-유출모형의 설정)에 따른 불확실성의 요소를 생각해 보면 크게 강우자료 자체에 포함된 것, 수문모형의 매개변수에 포함된 것, 수문모형의 구조자체에 내재된 것 등을 들 수 있겠다. 이러한 불확실성을 해석하여 수공구조물의 신뢰도(Reliability)를 평가하게 되며, 최근까지 개발된 신뢰도 분석방법을 살펴보면 크게 4가지로 나눌 수 있겠다.

*정희원, 신구전문대학 토목과 전임강사

**정희원, 연세대학교 토목공학과 부교수

***전희장, 연세대학교 토목공학과 교수

즉, 직접적분법(Direct Integration Method), Monte Carlo Simulation 법, MVFOSM 법(Mean Value First Order Second Moment Method), AFOSM 법(Advanced First Order Second Moment Method) 이다. 본 기고에서는 신뢰도 분석방법의 이론과 그 적용분야에 대해 살펴보기로 하겠다.

2. 시스템의 위험도와 신뢰도의 정의

공학시스템과 관계된 위험도란 시스템이 설계된 기능을 수행하지 못할 확률을 말한다. 공학시스템에서, 시스템파괴의 개념은 일반적으로, 시스템에 작용하는 하중(Load), L이 시스템의 저항능력(Resistance Capacity), R을 초과하는 것으로 정의된다. 따라서, 시스템 위험도, R_s 는 다음과 같이 정의된다.

$$R_s = 1 - R_r = P_r(L > R) \tag{2.1}$$

여기서, $P_r(x)$ 는 사건 x 가 발생할 확률이며, R_r 은 시스템의 신뢰도이다.

시스템의 파괴위험도를 산정하기 위한 간편한 방법은 시스템의 기본변량(즉, 시스템을 설명하는 자료, 모형의 매개변수, 모형 보정계수)을 하중과 저항에 연관시킨 시스템 실행함수, Z를 이용하는 것이다. 실행함수는 음의 값이 시스템파괴를 나타내도록 하는 수학적, 예를 들어, $R-L$, $(R/L)-1$, $\ln(R/L)$ 등으로 나타낼 수 있다. 따라서, 시스템의 위험도는 다음과 같이 정의될 수 있다.

$$R_s = P_r(Z < 0) \tag{2.2}$$

여기서, $Z = g(x_1, x_2, \dots, x_p) = g(x)$

x = 시스템 기본변량의 내터

p = 시스템에서 기본변량의 수

파괴확률, 즉 시스템의 위험도는 다음 식(2.3)과 같이 표현된다.

$$R_s = \int_0^\infty \int_0^c f_{R,L}(r, \epsilon) dr d\epsilon \tag{2.3}$$

여기서, $f_{R,L}(r, \epsilon)$ 은 R과 L의 결합 확률밀도 함수(jpdf)이다. 만일, 저항 R이 하중 L에 통계학적으로

독립이라면 식(2.3)은 다음과 같이 간단하게 쓸 수 있다.

$$R_s = \int_0^\infty f_L(\epsilon) [\int_0^\epsilon f_R(r) dr] d\epsilon \tag{2.4}$$

실행함수 Z를 사용하여 식(2.2)의 위험도를 다시 쓰면, 식(2.5)와 같다.

$$R_s = P_r(Z < 0) = \int_{-\infty}^0 f_Z(Z) dZ \tag{2.5}$$

따라서, 만일 Z가 정규분포화되어 있다면 식(2.6)과 같이 나타낼 수 있다.

$$P_r = \Phi(-\beta) = 1 - \Phi(\beta) \tag{2.6}$$

여기서,

$$\beta = \frac{\mu_z}{(\text{Var}(Z))^{1/2}} \tag{2.7}$$

식(2.7)에서 β 는 신뢰도 지수(Reliability Index)이며, μ_z 는 평균, $\text{Var}(Z)$ 는 분산이다. $\Phi(\beta)$ 는 β 에 따른 누가 정규분포함수이며, β 가 증가할수록 그 값도 증가하므로 따라서 신뢰도도 증가한다. 만일, L과 R이 정규분포를 하고, 실행함수 Z를 $R-L$ 로 하면, Z도 정규분포를 갖는다. 따라서,

$$\beta = \frac{(\mu_R/\mu_L) - 1}{((\mu_R/\mu_L)^2 \Omega_R^2 + \Omega_L^2)^{1/2}} \tag{2.8}$$

여기서, Ω 는 변동계수(σ/μ)이다. 만일, L과 R이 대수정규분포를 이룬다면,

$$\beta = \frac{\ln[(\mu_R/\mu_L)(1 + \Omega_L^2)/(1 + \Omega_R^2)]^{1/2}}{[\ln((1 + \Omega_L^2)/(1 + \Omega_R^2))]^{1/2}} \tag{2.9}$$

변동계수 Ω 가 매우 작은 경우, 식(2.9)의 1계 근사치는 식(2.10)과 같다.

$$\beta = \frac{\ln(\mu_R/\mu_L)}{(\Omega_L^2 + \Omega_R^2)^{1/2}} \tag{2.10}$$

위에서 정의된 변수들에 대한 확률값을 도시하면 그림2.1-2.4와 같다.

그림2.1은 R과 L의 확률 밀도함수를 나타내는 것으로, 주어진 위험하중 $L=A$ 인 경우에, $R < A$ 인 누

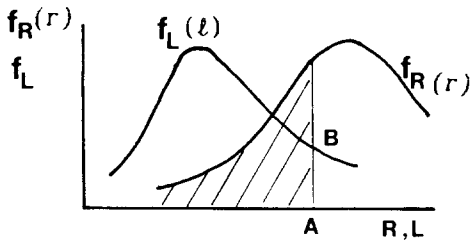


그림2.1 저항과 하중에 대한 확률밀도함수

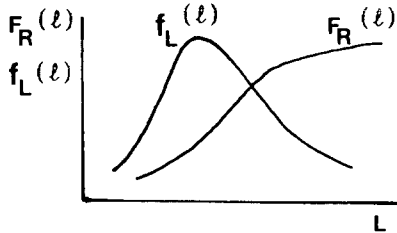


그림2.2 저항의 누가분포함수와 하중의 확률밀도함수

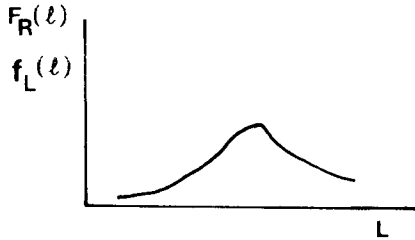


그림2.3 파괴의 확률밀도함수

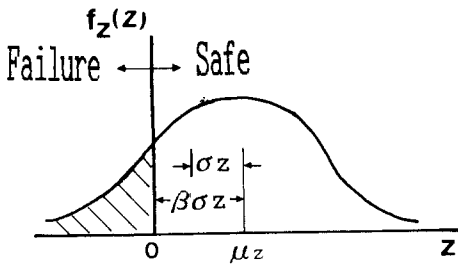


그림2.4 실행변수 Z의 확률밀도함수

가확률은 A의 왼쪽, $f_R(r)$ 밑인 빗금친 부분으로 나타난다. 그림2.2는 또 다른 $L=A$ 값에서 $f_R(r)$ 의 빗금친 부분이 $F_R(l)$ 의 누가확률함수로 나타난다는 것을 의미한다. $L=A$ 에 대한 파괴확률은 $F_L(l)=B$ 와 그림1

에서 빗금친 부분을 곱한 것이다. 따라서, 전체 위험도는 $F_L(l)$ 과 R의 누가확률밀도함수인 $F_R(r)$ 의 곱의 총합으로 나타낼 수 있으며, 이는 식(2.11)과 같다.

$$P_f = \int_a^b f_L(l) \cdot F_R(r) \, dl \quad (2.11)$$

$f_L(l) \cdot F_R(r)$ 의 곱에 대한 곡선이 그림2.3에 나타나 있으며, 위험도는 이 결과곡선의 아래부분의 면적이다. 그림2.4는 실행변수 Z를 사용하여 위험도 관계를 보다 자세히 나타내고 있다. 식(2.5)에 의하면, 위험도는 수직축 $Z=0$ 왼쪽에 빗금친 부분의 면적이다. 신뢰도지수 β 는 Z의 변동계수의 역수, 즉 $\beta = 1/\Omega_Z$ 이다. 이것은 그림2.4에서도 나타나듯이 표준편차의 단위로 측정되어진 원점($Z=0$)에서 부터 평균 μ 까지의 거리를 의미한다.

3. 신뢰도 분석방법

3.1 직접 적분법(Direct Integration Method)

만일, 하중과 저항을 올바르게 묘사하는 적절한 분포함수를 알 수 있다면 식(2.4)에 의해 산정되는 위험도는 엄밀해를 나타내게 된다. 그러나, 이 방법에는 여러가지 문제점이 있다. 이 방법에서 가장 크게 어려운 점은 적절한 분포함수를 선정하는 것이다. 산정된 위험도는 선정된 분포함수에 아주 민감하게 되며, 실제로 분포함수의 부적절한 가정들 때문에 직접적분법의 가장 큰 장점인 정확도를 얻을 수 없게 될 수도 있다. CIRIA(1977)¹⁾는 하중과 저항을 결정하기 위한 확률 밀도함수의 선정은 각각의 기본변량의 확률분포에 의존하며, 저항과 하중에 대해 기본변량에 관계하는 함수들의 특성 때문에 보다 복잡해질 수 있으며 또한, 실제로 많은 경우에 하중과 저항은 동일한 기본변량에도 관계될 수 있을 뿐 아니라 상관도(degree of correlation)에도 종속될 수 있다고 하였다.

Shinozuka(1983)²⁾는 모든 공학적인 문제의 경우에 있어서, 일반적으로 불규칙한 영역에 걸쳐 다차원 적분을 수치적으로 수행하기는 불가능하며, 가능하다 하더라도 아주 비용이 많이 든다는 점을 지적하였다. 만일, 직접적분법의 적용에 이러한 실제적인 문제들

의 특성이 주어졌다면 이 방법은 아주 간단한 시스템이나 총 시스템 신뢰도의 일부분을 분석하는 데 사용될 수 있다.

직접적분법을 사용한 대부분의 새로운 방법들도 아직 하중과 저항을 위한 적절한 분포형을 어떻게 선택할 것인가와 수치적분을 가능하게 하는 문제에 직면하고 있다. 그러나, 분포형을 적절하게 선택함으로써 암거(1980)³⁾와 제방(1981)⁴⁾에서 Tung과 Mays가 보여준 바와 같이 시스템 신뢰도의 평가를 만족하게 할 수 있다.

수리시스템이나 다른 구조시스템에서 상대적으로 성공을 거둬도 불구하고 여러학자들(Cornell, 1972⁵⁾; Rackwitz, 1976⁶⁾; CIRIA, 1977¹⁾; Cheng, 1982⁷⁾)의 일반적인 견해는 직접적분법이 이론적, 수치적으로 어렵기 때문에 평범한 설계목적에 위해서는 적당치 않다는 것이다. 시스템 설계를 위해서, 직접적분법은 특별한 경우에 단순화된 신뢰도분석의 정도와 타당성을 검증하는 간단한 시스템이나 고도로 정밀한 위험도 결정을 요하는 시스템에 유용하다. 실시간 홍수예보에 적용된 수문모형의 확실성 분석에서도 유사한 결론에 도달할 수 있다. 직접적분법은 Wood(1976)⁸⁾가 사용한 것과 같은 아주 간단한 수문모형에서 만이 사용될 수 있다. 때문에, 홍수경보와 같은 실제적인 적용을 할 경우, 직접적분법은 현실적이지 못하다.

3.2 Monte Carlo Simulation Method

Monte Carlo Simulation은 각각의 모의에 있어 대응하는 기본변량의 확률분포에 따라 발생하는 무작위변량값의 특정집합을 사용하는 과정이다.

각각의 모의발생에서, 실행함수는 적절한 기본변량값을 사용하여 계산되며, 위험도는 모의갯수에 대한 실패수의 비율로 계산된다. Monte Carlo Simulation 방법은 매우 신축성 있는 방법이다(즉, 이것은 여러 가지 다양한 문제를 해결하기 위해 사용될 수 있다).

사실 이 방법은 고차의 비선형 또는 복잡한 시스템 관계를 가진 경우에 위험도를 계산할 수 있는 유일한 방법일 수도 있다. 신축성에도 불구하고, Monte Carlo Simulation Method는 시스템의 위험도를 분석하기 위해 많이 추천되는 방법은 아니다. 이 방법에 의해

산정되는 위험도는 유일한 해를 가지지 않는다. 즉, 이것은 표본의 크기와 시행횟수에 따라 결정되기 때문이다. 이러한 단점을 극복하기 위해, 시행횟수를 늘려야만 하며, 따라서 요구되는 Computer time은 대단히 크게 된다. 이렇게 과도한 계산비용이 들게 되므로 Monte Carlo Simulation Method의 신축성은 의미가 없게 된다. 더우기 Monte Carlo Simulation Method는 기본변량의 가정된 분포에 대단히 민감하게 작용한다. 때문에 Monte Carlo Simulation Method는 일반적으로 나머지 방법의 적용이 불가능한 경우에 최후의 수단으로 사용하게 된다.

1계(First Order) 방법에 의한 결과들은 Monte Carlo Simulation에 의한 결과들과 적절하게 비교되었으며, 이들은 Monte Carlo Simulation의 과도한 비용을 피하기 위해 1계 방법을 사용할 것을 권장하였다.

3.3 Mean Value First-Order Second Moment (MVFOSM) Method

First-Order Second Moment(FOSM) 신뢰도 분석 방법의 개념은 오래전에 제안되었으며, Mayer(1926)⁹⁾는 구조물의 안전도 분석에 무작위 변량의 평균과 분산의 사용을 제안하였다.

그러나, Mayer의 제안은 30년 이상이나 무시되어 왔는데 그 이유는 아마도 공학자들이 공학설계문제에서 물리적인 면으로 보다 나은 식을 얻기 위해 노력해 왔기 때문일 것이다. 1959년에 Su¹⁰⁾는 여러가지 구조적인 문제에서 물리적인 면은 현재 잘 구명되었으나, 구조적인 설계에 대한 전통적인 방법은 아직도 만족스럽게 해명되지 못하고 있다고 주장하였다. 그는 정규분포에 기초하여 MVFOSM식을 개발하였으며, 구조적인 안전계수의 보다 합리적인 결정을 위해 사용할 것을 제안하였다. 그러나, Cornell(1967)¹¹⁾이 Su의 방법과 매우 유사한 식을 제안한 후에야 MVFOSM 법은 구조공학에서 사용되기 시작했다. MVFOSM법이 처음으로 수리시스템의 위험도산정에 사용된 것은 Tang과 Yen(1972)¹²⁾에 의해서이다. 1계 방법에서, 실행함수의 Taylor 급수확장은 1차항 이후를 절단하게 되며, 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$Z = g(x) + \sum_{i=1}^p (x_i - \bar{x}_i) \frac{\partial g}{\partial x_i} \quad (3.1)$$

여기서, \bar{x}_i 는 기본변량의 평균치이다.

MVFOSM법에서 확장점(Expansion Point)은 기본변량의 평균치에 위치하게 되며, 실행함수의 기대값과 분산은 다음과 같다.

$$E[Z] = g(\bar{x}) \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \text{VAR}(Z) = & \sum_{i=1}^p C_i^2 \text{VAR}(x_i) \\ & + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p C_i C_j \text{COV}(x_i, x_j) \end{aligned} \quad (3.3)$$

여기서, C_i 와 C_j 는 각각 $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_p$ 에서 계산된 $\partial g / \partial X_i$ 와 $\partial g / \partial X_j$ 의 편도함수 값이다. 만일, 변량들이 통계적으로 독립이라면 공분산항은 없어지게 되고, 식(3.3)은 다음과 같이 된다.

$$\text{VAR}(Z) = \sigma_z^2 = \sum_{i=1}^p C_i^2 \text{VAR}(x_i) \quad (3.4)$$

이러한 근사치는 만일 기본변량의 변동계수가 크지 않고, 시스템의 실행함수 Z 가 근사적으로 선형이라면 타당한 것이다. 그러나, 실제적인 많은 공학문제에서 편도함수 C_i 는 정확하게 구할 수 없다. 이러한 경우에 C_i 는 w 점에서 전방차분법에 의해 수치적으로 근사될 수 있다.

$$C_i = \frac{\partial g}{\partial x_i} \Big|_{x=x_w} = \frac{g(x_w, x_w + \Delta x_i) - g(x_w)}{\Delta x_i} \quad (3.5)$$

여기서, $\Delta x_i = x_i$ 값의 미소 변화량, x_w 는 다른 모든 기본변량이 w 점에서 고정되어 있다는 것을 의미한다. 이 방법은 Garen과 Burges(1981)¹³가 단순화된 Stanford Watershed 모형에 의한 예측에서 오차범위의 결정에 유용하게 사용하였다.

3.3.1 MVFOSM 법에 기초한 확률산정

신뢰도는 다음과 같이 정의되는 신뢰도지수 β 의 항으로 측정된다.

$$\beta = \frac{E[Z]}{\sigma_z}$$

이것은 Z 의 변동계수 (Cov)의 역수이다.

여러가지 공학시스템의 설계에서, 여러가지 선택에 따른 신뢰도를 비교하기 위해 β 값 만을 사용하게 된다. 홍수예보의 불확실성 분석 같은 경우에도, 시스템 위험도의 산정은 필요하게 된다. 이러한 경우에 확률분포는 실행함수 Z 로 가정되고 β 는 시스템의 평균상태로부터 시스템 파괴수준(Failure Level)까지 거리를 정규적(normal)으로 측정함으로써 얻어지므로, β 값에 대한 확률이 시스템의 신뢰도로 채택된다. MVFOSM법에서, 기본변량에 대한 어떠한 분포의 가정도 필요치 않기 때문에, Z 의 분포는 정의되지 않은 상태로 남게 되고, 따라서 β 에 포함된 확률 정보는 부족하다. 일반적으로, Z 는 정규분포로 가정되며, 시스템의 위험도는 식(3.7)과 같이 된다.

$$R_s = 1 - \Phi(\beta) \quad (3.7)$$

여기서, $\Phi(\cdot)$ 는 표준 정규적분이다 (예를 들어, Ang과 Tang(1975)).¹⁴

이러한 가정은 실제적으로 여러가지 잇점이 있다. 만일 시스템의 실행함수가 선형(즉, $Z=R-L$)이고, 하중과 저항이 정규분포를 한다면 식(3.7)은 정확한 위험도를 나타낸다. 만일, 시스템의 실행함수가 $Z = \ln(R/L)$ 과 같이 비선형이고, 하중과 저항이 대수분포를 하며, L 과 R 의 변동계수가 상대적으로 작으면 식(3.7)은 정확한 위험도에 매우 근접한 값을 갖게 된다. 때문에, Z 를 정규분포로 선택하는 것은 아주 합리적이며 유용하다. 왜냐하면, 많은 자연적인 시스템이나 변량들은 정규 또는 대수정규분포를 나타낼 수 있기 때문이다.

Yen등(1986)¹⁵은 일반적으로 기본변량의 분포특성에 대한 어떤 정보를 알 수 있으며, 비록 불완전하고 정확하지 않을 지라도 이러한 제한된 정보는 허용할 만한 정도 이내로 위험도 평가를 하는데 도움을 준다고 했다. 예를 들면, 만일 기본변량 분포가 시작범위 근처에서 평균을 가지는 단일 형태라면, $Z = \ln(R/L)$ 로 놓고, Z 를 정규분포로 가정하는 것이 위험도의 산정에 좋다. 만일, 기본변량분포가 작은 왜곡도를 가지는 단일 형태라면, $Z=R-L$ 로 놓고 Z 를 정규분포로 가정하는 것이 좋다. 또한, Cheng(1982)⁷

은 다음과 같은 경우에도 $Z=R-L(R=X_1+X_2, L=X_3X_4)$ 로 하고 Z 를 정규분포로 가정하면 위험도가 큰 경우(예를 들면, $R_0 > 0.01$)에 엄밀해에 비해 상대적으로 좋은 값을 준다고 하였다.

$$Z=X_1+X_2-X_3X_4 \quad (3.8)$$

여기서, X_1 과 X_2 는 균등분포이며, X_3 와 X_4 는 대수 정규분포이다.

결론적으로, Z 의 분포를 가정해야 하는 필요성에도 불구하고 MVFOSM법을 사용함으로써 아주 타당한 시스템 위험도의 값을 알 수 있다.

3.3.2 MVFOSM 법의 장점과 단점

MVFOSM법의 가장 큰 장점은 단순성에 있다. 시스템의 기본변량에 대하여 어떤 고차 모멘트나 분포에 대한 정보도 필요치 않으며, 시스템 위험도의 합리적인 값을 얻기 위해서는 단지 기본변량의 평균과 분산만 알면 된다. 반면에 여러 학자들은 1차법이 너무 단순화 되었고 사용에 부정확하다고 했으며, Cornell¹¹ (1972)은 실제적인 측면에서 이것을 강하게 뒷받침하는 결과를 발표하였다. 그는 평균과 분산에 기초한 접근 방법은 다음과 같은 사항을 알고 있을 경우에 적당하다고 하였다.

(1) 변량의 완전한 확률법칙을 설정하는데 자료와 물리적 전제가 부족한 경우

(2) 대부분의 공학적인 분석은 중요한 실제적이고, 전문적인 불확실성 요소를 포함하나 측정하기 어려운 경우

(3) 최종결과, 즉 결정 또는 설계 매개변수가 평균과 분산보다 높은 모멘트에 대해 민감하지 않을 경우 공학설계문제에 적용할 때, MVFOSM방법은 Rackwitz(1976)¹²와 Cheng(1982)¹³이 지적했듯이 여러가지 이론적, 개념적인 문제를 가지고 있다. 문제점은 아래와 같으며 특히 1)~3)은 가장 심각한 문제이다.

- 1) 1계 Taylor 급수근사의 상대적인 정확도.
- 2) 공학시스템에서의 파괴사건은 일반적으로 평균 근처에서의 하중과 저항보다는 극치에서 발생.
- 3) 대부분의 실제공학 시스템은 비선형적인 거동을 함.
- 4) 이 방법에 의한 결과는 Z 를 나타내는 특정의

수학식과 신뢰도 문제에서의 차원(즉, 변량의 수)에 의해 변화 함.

5) 신뢰도 지수, β 는 파괴확률에 대한 미약한 정보를 제공하기 때문에 적절한 시스템 확률분포를 가정해야 함.

6) 이 방법은 기본변량의 확률분포에 대한 유용한 정보를 포함하는 논리적인 방법을 제공하지는 않음.

또한, Cheng(1982)¹²과 Yen 등(1986)¹⁵은 $Z=(R/L-1)$ 로 하는 것은 $Z=R-L$ 또는 $Z=ln(R/L)$ 로 하는 것보다 항상 더 좋지 않은 추정치를 준다고 했다.

4. 참고문헌

1. CIRIA, (1977) "Rationalization of Safety and Serviceability Factors in Structural Codes", Report 63, London.
2. M. Shinozuka, (1983) "Basic Analysis of Structural Safety", Vol.109, No.3, pp.721-740.
3. Y.K. Tung, and L. W. Mays, (1980) "Risk Analysis for Hydraulic Design", Vol.106, No.HY5, pp.893-913.
4. Y.K. Tung and L. W. Mays, (1981) "Risk Models for Flood Levee Design", Vol.17, No.4, pp.833-841.
5. C. A. Cornell, (December 1972) "First-Order Analysis of Model and Parameter Uncertainty", Proceedings, International Symposium on Uncertainties in Hydrologic and Water Resources Systems, Vol.2, Tucson, Arizona, pp.1245-1272.
6. R. Rackwitz, (1976) "Practical Probabilistic Approach to Design", Bulletin 112, Comite European du Beton, Paris, France.
7. S.T. Cheng, (1982) "Overtopping Risk Evaluation for an Existing Dam", Ph. D. Thesis, Department of Civil Engineering, University of Illinois at Urbana-Champaign.
8. E.F. Wood, (1976) "An Analysis of the Effects of Parameter Uncertainty in Deterministic Hydrologic Models", Vol.12, No.5, pp.925-932.
9. H. Mayer, (1926) "Du Sicherheit der Bauwerk (The Safety of Structures)", Springer Verlag, Berlin.
10. H.L. Su, (1959) "Statistical Approach to Structural Design", Proceedings, Institution of Civil Engineers, London, Vol.13, pp.353-362.
11. C.A. Cornell, (February 1967) "Bounds on the Reliability of Structural Systems", Journal of the

- Structural Division, ASCE, Vol.93, No.ST1, pp. 171-200.
12. W.H. Tang, and B. C. Yen, (December 1972) "Hydrologic and Hydraulic Design Under Uncertainties", Proceedings, International Symposium on Uncertainties in Hydrologic and Water Resources Systems, Vol.2, Tucson, Arizona, pp.868-882.
 13. D.C. Garen, and S. J. Burges, (1981) "Approximate Error Bounds for Simulated Hydrographs", Vol.107, No.HY11, pp.1519-1534.
 14. A.H-S. Ang, W. H. Tang, (1984) "Probability Concepts in Engineering Planning and Design : Vol. I Basic Principles, Vol.II. Decision, Risk, and Reliability", John Wiley & Sons.
 15. B.C. Yen, (1986) "Stochastic and Risk Analysis in Hydraulic Engineering", WRP.
 16. A.M. Haosfer, and N. C. Lind, (February 1974) "Exact and Invariant Second-Moment Code Format", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol.100, No.EM1, pp.111-121.
 17. S.H. Wang, J. T. P. Yao, and W. F. Chen, (1983) "Reliability of Antenna Structures", Recent Advances in Engineering Mechanics and Their Impact on Civil Engineering Practice, edited by W. F. Chen and A. D. M. Lewis, Vol.II, West Lafayette, Indiana, pp.855-858.
 18. J. Abadie, and J. Carpentier, (1969) "Generalization of the Wolfe Reduced Gradient Method to the Case of Nonlinear Constraints", in Optimization, edited by R. Fletcher, Academic Press, London.
 19. E. Sandgren, and K. M. Ragsdell, (July 1980) "The Utility of Nonlinear Programming Algorithms : A Comparative Study", Journal of Mechanical Design, ASME, Vol.102, No.3, pp.540-551.
 20. R. Rackwitz, and B. Fiessler, (1978) "Non-normal Vectors in Structural Reliability", SFB 96 Report 29, Technical University of Munich, pp.1-22.
 21. A.M. Haosfer, (1974) "Reliability Index and Failure Probability", Journal of Structural Mechanics, Vol.3, No.1, pp.25-27.
 22. D.R. Davis, and S. Ninaji, (1982) "The Information Needed to Evaluate the Worth of Uncertain Information, Predictions and Forecasts", Vol.21, pp. 461-470.
 23. D. Kooan, J. K. Vrijling, T. Maldir, and L. de Quelij, (1978) "Probabilistic Approach to Determine Loads and Safety Factors", Symposium on Foundation Aspects of Coastal Structures, Delft.
 24. B.C. Yen, S. T. Cheng, and W. H. Tang, (May 1980) "Reliability of Hydraulic Design of Culverts", Proceedings, International Conference on Water Resources Development, IAHR Asian Pacific Division Second Congress, Vol.2, Taipei, Taiwan, pp.991-1001.
 25. S.J. Burges, (February 1979) "Analysis of Uncertainty in Flood Plain Mapping", Water Resources Bulletin, Vol.15, No.1, pp.227-243.
 26. E.A. McBean, J. Penel, and K. L. Siu, (1984) "Uncertainty Analysis of a Delineated Floodplain", Canadian Journal of Civil Engineers, Vol.11, pp.387-395.
 27. B.W. Oegema, E. A. McBean, (1986) "Uncertainties in Flood Plain Mapping", presented at the International Symposium on Flood Frequency and Risk Analysis, May 14-17, Baton Rouge, Louisiana.
 28. Y.K. Tung, (1987) "Uncertainty Analysis of National Weather Service Rainfall Frequency Atlas", Vol.113, No.2, pp.179-189.
 29. B.C. Yen, W. H. Tang, (1977) Reliability of Flood Warning", Stochastic Processes in Water Resources Engineering, Proceedings of the 2nd International Symposium on Stochastic Hydraulics, Lund, Sweden, 1976, Water Resources Publications, Littleton, Colorado, pp.333-347.
 30. J.K. Vrijling, (1982) "Design of Concrete Structures : Probability Design Method", Cement, Vol.34, No.11, pp.721-728.
 31. A. Mol, H. Ligteringen, A. Paape, (1983) "Risk Analysis in Breakwater Design", Proceedings, Conference on Breakwaters-Design Construction, London, May 4-6, 1983, Thomas Telford Ltd., London, pp.81-86, also Delft Hydraulics Laboratory Publication No.301.
 32. C.S. Melching, H. G. Wenzel, and B. C. Yen, (1986) "Application of System Reliability Analysis to Flood Forecasting", presented at the International Symposium on Flood Frequency and Risk Analysis, May 14-17, Baton Rouge, Louisiana, 1986.