

〈論 文〉

분포형 모델을 이용한 유역내 이동강우(MOVING STORM)의 유출해석(1)

- 모델의 개발 -

Simulation of Moving Storm in a Watershed Using A Distributed Model

- Model Development -

崔 桂 滢* 李 熙 昇** 安 相 鎭***

CHOI, Gye Woon, LEE, Hee Seung, AHN, Sang jin

Abstract □ In this paper for simulating spatially and temporally varied moving storm in a watershed a distributed model was developed. The model is conducted by two major flow simulations which are overland flow simulation and channel network flow simulation. Two dimensional continuity equation and momentum equation of kinematic approximation are used in the overland flow simulation. On the other hand, in the channel network simulation two types of governing equations which are one dimensional continuity and momentum equations between two adjacent sections in a channel, and continuity and energy equations at a channel junction are applied. The finite element formulations were used in the overland flow simulation and the implicit finite difference formulations were used in the channel network simulation. The finite element formulations for the overland flow are analyzed by the Gauss elimination method and the finite difference formulations for the channel network flow are analyzed by the double sweep method having advantages of computational speed and reduced computer storages. Several recurrent coefficient equations for channel network simulation are suggested in the paper.

要旨 □ 유역내 공간적 및 시간적 분포특성을 가진 이동강우를 해석하기 위하여 분포형 모델을 개발하였으며 이 유역모델은 지표면 흐름과 하천망 흐름으로 나누어 유출을 해석하였다. 지표면의 흐름은 2차원의 연속방정식과 운동량방정식을 이용하여 데 kinematic 이론을 도입하여 운동량 방정식을 간략화 하였으며 하천망 흐름은 하천망을 일체로 하여 1차원의 연속방정식과 운동량방정식들을 이용하였다. 기본방정식들의 수치해석법으로 지표면의 흐름은 유한요소법을 이용하였으며 하천망에 대한 해석은 음해법의 유한차분법을 이용하였다. 모델은 특히 이동강우에 있어서 중요한 특색인 공간적 및 시간적 특성을 효과적으로 해석할수 있도록 개발되었다. 또한 모델은 구성된 행렬의 특징을 이용하였는데, 지표면 유출 모델은 Gauss 소거법을 이용하여 그 해를 구하였으며 하천망 해석은 double sweep방법을 적용 하기 위한 여러종류의 순환계수방정식을 제안하였고 이를 이용하여 그 해를 구하였다.

1. 서 론

유역내 강우에 의한 유출은 인간생활에 상당한 영

향을 미치므로 이에 대한 유출해석은 오랫동안 수리 및 수문학자들을 비롯하여 여러분야의 연구자들에 의하여 연구되어 왔다. 그중에서 가장 간단하며 오랫동안

*정회원, 한국수자원공사 수자원연구소, 책임연구원

**정회원, 한국수자원공사 기술본부장

***정회원, 충북대학교 공과대학 토목공학과 교수

동안 사용되어져온 방법은 Kuichling(1889)에 의하여 제안된 합리식이며 이 방법에서 유출량은 유출계수, 지속시간이 t 인 강우강도 및 유역면적의 곱으로 표시한다. 그후 사용 computer의 발전과 함께 이에 대한 해석은 2개의 큰 집단으로 나누어져 발전해 왔는데 첫번째가 매개변수(parameter) 모델이며 두번째가 확정론적(deterministic) 모델이다. 매개변수 모델은 대상 시스템의 물리적 현상을 그대로 적용하여 나타낸 모델이 아니라 입력과 출력사이의 관계를 나타내는 매개변수방정식을 사용하여 개발된 모델이다. 이에 반하여 확정론적 모델은 대상 시스템의 진행과정을 나타내는 물리 법칙에 근거하여 나타내는 모델이다. 따라서 넓은 지역의 전반적인 특성을 구하고자 할때는 매개변수모델이 주로 이용되고 있으며, 유역내의 물리적 변화과정에 대한 구체적 연구에는 확정론적 모델이 주로 적용된다.

확정론적 모델에서는 물리적 변화가 올바르게 방정식으로 표현되는것과 이의 적절한 해석방법의 선택이 중요한 요소이다. 특히 유역내 유출해석에 있어서도 유출의 원천인 강우에 대한 고려가 필요한바, 강우는 지면에 도달한후 증발, 증산, 침투등에 의하여 그의 일부가 손실되고 나머지 부분만 유출하게 되며 특히 이동강우(moving storm)는 비교적 짧은 기간 동안 지속되므로 침투에 비하여 증발, 증산은 적은 편이다. 오히려 이동강우는 증발이나 증산보다는 시간적 및 공간적 분포특성을 가지고 있으므로 이에 대한 적절한 고려가 필요하다. 기존의 전형적인 해석방법인 한유역내 하나 또는 몇개의 대표화된 계수나 매개변수를 이용하는것보다는 시간적 및 공간적 분포를 그대로 적용하여 해석하는 방법의 채택이 필요하다. 실제적으로 여러 연구자들(Marshall, 1981 : Shaw, 1983 : Niemczynowicz and Dahlblom, 1984 : Niemczynowicz, 1987 : Richardson, 1989)에 의하여 시간적 및 공간적 분포를 그대로 고려함이 대단히 중요하다는것이 입증되었다.

유역내의 유출해석은 크게 두 부분으로 나누어 이루어지고 있으며 그 하나는 지표면 유출이며 다른 하나는 하천망 유출이다. 지표면 유출은 그동안 여러 연구자들(Chen and Chow, 1971 : Judah, 1973 : Ross, 1978 : Ross, et al. : 1978, Julien et al., 1989)에 의하여 연구되어져 왔으며 주로 1차원의 해석이나 kinematic 이론등의 간략화된 방정식을 이용하여 왔다. 특히 kinematic 이론은 지난 30여년 동안 많이 이

용되어 왔으며 또한 그 적용성이 입증 되어져 왔었다(Lighthill et al., 1955 : Brakensiek, 1967 : Woolhiser, et al., 1967 : Ponce et al., 1979 : Sherman et al., 1982 : Singh et al., 1983). 하천망의 유출해석은 하천망을 일체로하여 해석하 기보다는 하천망을 단순한 단일하천의 집합체로 인식하거나 본류를 제외한 나머지 지류는 횡방향 유입되는 것으로 가정하여 해석되어져 왔으며 해석방법 으로는 특성법, 유한차분법, 유한요소법이 이용되었다(Amein, 1968 : Balloffet, 1969 : Amein et al, 1970 : Ellis, 1970 : Gunaratanam et al., 1970 : Fread, 1971 : Chen, 1973 : Liggett et al., 1975 : Abbott, 1980). 그러나 Webber and greated(1966) 및 Hager(1989)등에 의한 합류점에 대한 실험적 연구에서 보이는것과 같이 하천망의 일체적 해석과 위의 가정에 의한 해석과는 크게 차이가 있다. 따라서 유역 이동강우의 유출해석을 위하여는 지표면 유출의 공간적 및 시간적 특성을 잘 나타내고 하천망을 일체로 해석할 수 있는 모델을 적용하여 해석하는 것이 필요하다.

2. 기본 이론의 전개

소유역내 이동강우에 대한 유출은 지표면 유출(overland flow)과 하천망(channel network) 유출로 크게 나눌수 있으며, 이들 유출에 관한 현상은 유체의 질량보존을 나타내는 연속방정식과 운동량 또는 에너지의 보존을 나타내는 운동량방정식이나 에너지 방정식으로 각각 나타낼 수 있다. 이와같은 방정식들은 수치해석에 적합한 편미분방정식으로 표시될 수 있으며, 사용목적이나 요구되는 精渡에 따라 1차원, 2차원, 3차원의 방정식이 이용된다. 이동강우에 의한 지표면 유출은 유역내에 일정하게 분포된 강우와는 달리 경사방향에 따라 유출량이 크게 변하므로 x , y 방향을 동시에 고려한 2차원의 흐름해석을 이용하는 것이 바람직하다. 또한 유역내 하천망 유출은 각각의 하천이 독립적으로 운영되기보다는 하천망이 한개의 system으로 작용하기 때문에 이 system 전체를 동시에 해석하는것이 바람직하다. 지표면 유출과 하천망 유출 방정식들은 아래와 같다.

2.1 지표면(overland) 유출방정식

이동강우에 대한 2차원의 지표면 유출은 연속방정

식과 운동량방정식에 의하여 표시될 수 있으며 연속 방정식은 수심 및 x, y 방향의 단위유량의 미지수를 가진 아래와 같은 방정식으로 쓰일 수 있다.

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(q_x)}{\partial x} + \frac{\partial(q_y)}{\partial y} = W \quad (1)$$

여기에서, h는 수심, q_x는 x 방향의 단위유량, q_y는 y 방향의 단위유량, W는 과잉강우강도(excess rainfall intensity), t는 시간, x는 x 방향의 거리, y는 y 방향의 거리를 나타낸다.

운동량방정식은 x 및 y 방향에 대하여 나타낼 수 있으며, x 방향 운동량방정식은 아래와 같이 수심, 유속 및 에너지경사의 미지수를 가진 방정식으로 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial x} + W \frac{\partial u}{\partial h} \\ = g(S_x + S_{i,x}) \end{aligned} \quad (2)$$

여기에서 u는 x 방향 평균유속, v는 y 방향 평균유속, g는 중력가속도, S_x는 x 방향의 하상경사, S_{i,x}는 x 방향의 에너지 경사를 나타낸다. 또한 y 방향 운동량 방정식은 아래와 같이 수심, 유속 및 에너지경사의 미지수를 가진 방정식으로 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial y} + W \frac{v}{h} \\ = g(S_y - S_{i,y}) \end{aligned} \quad (3)$$

여기에서, S_y는 y 방향의 하상경사, S_{i,y}는 y 방향의 에너지 경사를 나타낸다. Choi(1991)에 의하면 비교적 경사가 급한 산간지역에서는 Kinematic 가정이 잘 적용되므로 이를 도입하면 식 (2)와 식 (3)은 아래와 같이 쓰일 수 있다.

$$S_x = S_{i,x} \quad (4)$$

$$S_y = S_{i,y} \quad (5)$$

또한 kinematic 가정하에서 x 와 y 방향의 단위유량 q_x, q_y는 수심 h와 x, y 방향의 하상경사 S_x, S_y 및 하상경사 S의 함수로 표시할 수 있는데 이를 나타내면 식 (6) 및 식 (7)과 같이 쓰일 수 있다.

$$q_x = Ch^m S_x S^{L-1} \quad (6)$$

$$q_y = Ch^m S_y S^{L-1} \quad (7)$$

여기에서, 하상경사 S는 $\sqrt{(S_x)^2 + (S_y)^2}$ 로 표시되며, 계수 C 및 첨자로 표시된 계수 M 및 L은 아래와 같이 나타난다.

| 흐름의 종류 | C | M | L |
|----------------|---------------------|-----|-----|
| 층류 | 8g/k ₁ v | 3 | 1 |
| 난류(Manning 공식) | 1/n | 5/3 | 0.5 |
| 난류(Chezy 공식) | c | 3/2 | 0.5 |

x, y 방향의 단위 유량방정식 (6)과 (7)을 방정식 (1)에 결합하여 아래와 같이 정리할 수 있다.

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(CS_x S^{L-1} h^m)}{\partial x} + \frac{\partial(CS_y S^{L-1} h^m)}{\partial y} = W \quad (8)$$

방정식 (8)에서 계수 및 경사항들의 곱을 β_x와 β_y를 이용하여 아래와 같이 결정할 수 있다.

$$\beta_x = CS_x S^{L-1} \quad (9)$$

$$\beta_y = CS_y S^{L-1} \quad (10)$$

β_x와 β_y를 이용하면 방정식 (8)은 식 (11)과 같이 간략하게 표시될 수 있다.

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(\beta_x h^m)}{\partial x} + \frac{\partial(\beta_y h^m)}{\partial y} \quad (11)$$

식 (11)의 x, y에 대한 편미분방정식은 식(12)와 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \beta_x M h^{M-1} \frac{\partial h}{\partial x} + h^m \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ + \beta_y M h^{M-1} \frac{\partial h}{\partial y} + h^m \frac{\partial \beta_y}{\partial y} = W \end{aligned} \quad (12)$$

방정식 (12)가 2차원의 지표면 유출을 나타내는 방정식이며 이 유출방정식의 공간 도함수는 유한요소법에 의하여, 시간에 의한 도함수는 유한차분해석에 의하여 그 해를 구할 수 있다. 이동강우는 호우지속기간이 비교적 단시간이므로 지면위 증발이나 식물에 의한 증산은 무시하고 침투량(infiltration)만을 고려하여 유효우량 W를 결정할 수 있다. 침투량은 기존 여러 방정식을 이용하여 계산할 수 있는데 여기에서는 식 (13)과 같이 표시된 Green과 Ampt에 의하여 제안된 침투방정식을 이용하였다.

$$f = K \left(1 + \frac{M_0 \psi}{F} \right) \quad (13)$$

여기에서, f 는 침투율, K 는 투수계수 (hydraulic conductivity), ψ 는 습윤전선 (wetting front)의 표면장력 수두, M_0 는 유효공극율에서 초기 함수율을 제외한 것으로 표시된 총극 공극율 (fillable porosity), F 는 누가침투량 (cumulative infiltration)을 각각 나타낸다.

2.2 하천망 (channel network)의 유출방정식

유역내 하천망의 유출방정식은 어느 독립된 하나 하나의 하천에 국한하지 않고 하천 전 system이 일체로 작용하기 때문에 이 system 전체를 동시에 해석할 수 있는 방정식이 필요하다. System을 동시에 해석하기 위하여는 크게 두종류의 유출방정식이 필요한바, 첫번째로 단일 하천내 두지점간의 질량 및 운동량의 보존을 나타내는 방정식들과 둘째로 합류점 상류부와 하류부간의 질량 및 에너지의 보존을 나타내는 방정식들로 나타내질 수 있다. 하천 system의 특성상 2차원 또는 3차원의 방정식에 비하여 정확도의 차이가 크지 않으며 computer 용량이 크게 절약되는 1차원의 방정식을 이용하는것이 바람직하며 단일 하천내 두 지점간의 질량의 보존을 나타내는 연속방정식은 식 (14)와 같이 나타내진다.

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = qI \quad (14)$$

또한 하천내 두지점간의 운동량의 보존을 나타내는 운동량방정식은 수심, 유량 및 에너지경사의 미지수를 가진 식 (15)와 같이 쓰일수 있다.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial (Q^2/A)}{\partial x} + gA \frac{\partial h}{\partial x} = gA(S_0 - S_1) + qIvI \quad (15)$$

여기에서, Q 는 하천을 흐르는 총유량, A 는 하천의 단면적, S_0 는 하상경사, S_1 는 에너지경사, qI 는 단위 길이당 횡방향 유입량, vI 는 횡방향 유입속도를 각각 나타낸다. 하천합류점 상류부와 하류부간의 에너지의 보존을 나타내는 에너지의 방정식은 식 (16)과 같이 상류부 각각의 지류와 하류부 본류와의 관계를 나타내는 에너지 방정식으로 표시된다.

$$\frac{V_i^2}{2} + gh_i + gZ_i = \int \frac{dV}{dt} dx + \frac{V_o^2}{2} + gh_o + gZ_o + gh_r \quad (16)$$

여기에서 V_i, h_i, Z_i 는 각각 i 번째 상류부 지류의 유속, 수심 및 하상고를 나타내며, V_o, h_o, Z_o 는 각각 하류부의 유속, 수심, 하상고를 나타낸다. 또한 h_r 는 상하류간의 수두손실을 나타낸다. 합류점에서 하천 상류부와 하류부간의 질량의 보존을 나타내는 연속 방정식에서 인접하는 두 단면사이의 간격을 짧게 했을 때 미소시간 사이에 저유량의 변화량은 비교적 적은 양이므로 무시할 수 있다. 저유량의 변화량을 무시하고 합류점에 유입하는 지류를 3개까지 제한하면 합류점에서의 연속방정식은 식 (17)과 같이 쓰일 수 있다.

$$Q_{o1} + Q_{o2} + Q_{o3} + Q_{o4} = 0 \quad (17)$$

여기에서 Q_{o1}, Q_{o2}, Q_{o3} 는 각각 첫번째, 두번째 및 세번째 상류부 지류의 유량을 나타내며 Q_{o4} 은 하류부 하천의 유량을 나타낸다.

3. 수치 해석

위의 각각의 방정식들은 직접 그 해를 구할수 없으므로 수치해석을 이용한 근사해법에 의하여 그 해를 구할 수 있다. 2차원으로 표시된 지표면 유출 방정식은 공간분포의 특성을 잘 나타낼수 있는 유한요소법을 이용하여 그 해를 구할수 있으며, 1차원으로 표시된 하천망 유출방정식은 모델 적용이 용이하고 계산 속도의 장점을 가지고 있는 유한차분법을 이용하여 그 해를 구할수 있다.

3.1 지표면 유출방정식의 유한 요소 해석

연속방정식과 x, y 방향의 운동량방정식으로 표시된 지표면 유출방정식은 isoparametric 유한요소법을 이용한 trial 해석을 실제해에 접근해 가도록 계속 보완하는 방법을 이용하여 그 해를 구할 수 있다. 기본 방정식의 주요 미지수인 수심 h 에 대한 isoparametric trial 해는 면요소내 각각의 절점에 대한 값의 합으로 식 (18)과 같이 쓸 수 있다.

$$h(x, y, t) - h^*(x, y, t) = \sum_{i=1}^k h_i(t)N_i(x, y) \quad (18)$$

또한 식 (12)에서, 계수 및 경사항들의 곱으로 표시된 β_x , β_y 및 초과 강우강도 W 는 isoparametric 개념에 의하여 식 (19)에서 (21)과 같이 면요소내 각각의 절점에 대한 값의 합으로 나타내어질 수 있다.

$$\beta_x(x, y) = \sum_{i=1}^k \beta_{xi} N_i(x, y) \quad (19)$$

$$\beta_y(x, y) = \sum_{i=1}^k \beta_{yi} N_i(x, y) \quad (20)$$

$$W_x(x, y) = \sum_{i=1}^k W_i N_i(x, y) \quad (21)$$

식 (12)를 유한요소 해석법중 비교적 널리 쓰이는 Galerkin의 weighted residual방법을 이용하여 식 (22)와 같이 표현할 수 있다.

$$\int D_e [N]^T \left[\left(\frac{\partial h}{\partial t} \right) + (\beta_x M h^{M-1} \frac{\partial h}{\partial x} + h^M \frac{\partial \beta_x}{\partial x}) + (\beta_y M h^{M-1} \frac{\partial h}{\partial y} + h^M \frac{\partial \beta_y}{\partial y}) - W(x, y, t) \right] dD_e = 0 \quad (22)$$

여기에서 D_e 는 요소의 범위 (element domain), $[N]^T$ 는 도치된 요소보간함수 (transpose of the element interpolation function)를 나타낸다. 2차원에서 식 (22)에 식 (19)-(21)을 적용하여 정리하면 식 (23)과 같이 정리할 수 있다.

$$\int_{x,y} [N]^T [N] dx dy \left\{ \frac{\partial h}{\partial t} \right\} + M \int_{x,y} \left(\sum_{i=1}^k \beta_{xi} N_i \right) \left(\sum_{i=1}^k h_i N_i \right)^{M-1} [N]^T \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right] dx dy \{h\}_e + \int_{x,y} \left(\sum_{i=1}^k h_i N_i \right)^{M-1} \left(\sum_{i=1}^k \frac{\partial N_i}{\partial x} \beta_{xi} \right) [N]^T [N] dx dy \{h\}_e + M \int_{x,y} \left(\sum_{i=1}^k \beta_{yi} N_i \right) \left(\sum_{i=1}^k h_i N_i \right)^{M-1} [N]^T \left[\frac{\partial N}{\partial y} \right] dx dy \{h\}_e + \int_{x,y} \left(\sum_{i=1}^k h_i N_i \right)^{M-1} \left(\sum_{i=1}^k \frac{\partial N_i}{\partial y} \beta_{yi} \right)$$

$$[N]^T [N] dx dy \{h\}_e$$

$$= \int_{x,y} \left(\sum_{i=1}^k W_i(x, y, t) N_i \right) [N]^T [N] dx dy \quad (23)$$

식 (23)은 t 에 대한 도함수, 계수 및 미지수에 대한 행렬 (matrix)의 형태로 표시될 수 있으며 식 (24)와 같이 표시할 수 있다.

$$[A] \left\{ \frac{\partial h}{\partial t} \right\} + [M\beta_x](x, y, t) [B1(h)] + \{ \beta_x(x, y) + \beta_y(x, y) \} [B2(h)] + M\beta_x(x, y) [B3(h)] + \{h\} = W(x, y, t) \{F\} \quad (24)$$

식 (24)에서 계수들에 대한 행렬을 정리하고 오른쪽의 곱을 열행렬식으로 나타내면 식 (25)와 같이 정리할 수 있다.

$$[A] \left\{ \frac{\partial h}{\partial t} \right\} + C(M, \beta_x, \beta_y) [K(h)] \{h\} = \{FF\} \quad (25)$$

여기에서, $[A]$ 는 계수들의 행렬을 나타내며 $C(M, \beta_x, \beta_y)$ 는 M , β_x 및 β_y 의 함수로 표시된 저항계수를 나타낸다. 또한 $\{FF\}$ 는 열행렬식으로 표시된 초과 강우내터 (excess rainfall vector)를 나타낸다. 식 (25)에서 $i+1$ 단면에서 시간도함수를 유한차분법에 의하여 나타내면 식 (26)과 같이 표시된다.

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{h_{i+1}^{n+1} - h_{i+1}^n}{\Delta t} = \frac{h_{i+1}^{n+1} + \Delta h_{i+1}^{n+1} - h_{i+1}^n}{\Delta t} \quad (26)$$

식 (26)을 식 (25)에 대입하여 정리하면 식 (27)과 같이 쓰인다.

$$[KK] \{ \Delta h \}^{n+1} = \{RR\} \quad (27)$$

$$[KK] = [A] + C(M, \beta_x, \beta_y) [K(h^{n+1})]$$

$$\{RR\} = \Delta t \{FF\} - \Delta t C(M, \beta_x, \beta_y)$$

$$[K(h^{n+1})] \{h\}^{n+1} + [A]$$

$$(\{h\}^n - \{h\}^{n+1})$$

최종방정식인 식 (27)은 비선형방정식이며 이의 해를 구하기 위하여 반복계산법이 필요하다. 반복법으로서 비교적 많이 이용되고 있는 Gauss 소거법을 이용하였다.

3.2 하천망 유출방정식의 유한 차분 해석

하천망의 유출방정식은 2장에서 유도된것과 같이 4종류의 기본방정식으로 나타내진다. 이 기본 방정식들은 안정성 및 계산 시간 간격 결정등에 유리한 음해법(implicit scheme)의 유한차분해석법이 이용 되었다. 이때 그림 (1)과 같이 4점법이 이용되었다.

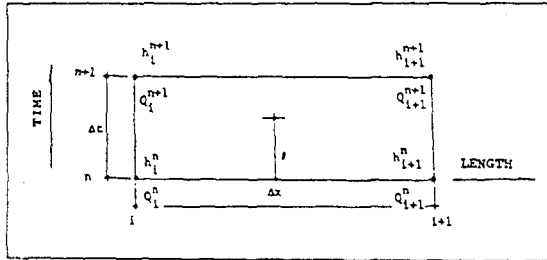


그림 1. 유한차분해석에서 이용된 4점법

이를 이용할때 시간도함수, 공간도함수 및 계수들은 식 (28)-(30)과 같이 차분표현된다.

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{h_i^{n+1} + h_{i+1}^{n+1}}{\Delta t} + \frac{h_i^{n+1} - h_i^n}{\Delta t} \right) \quad (28)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \theta \left(\frac{Q_{i+1}^{n+1} - Q_i^{n+1}}{\Delta x} \right) + (1-\theta) \left(\frac{Q_{i+1}^n - Q_i^n}{\Delta x} \right) \quad (29)$$

$$f_{i+1/2}^n = \left(\frac{1}{2} \right) f_i^n + f_{i+1}^n \quad (30)$$

여기에서 윗첨자 n+1은 미지의 시간을 나타내고 윗첨자 n은 기지의 시간을 나타낸다. 또한 아래첨자 i는 i번째 하천단면을 나타내며, 아래첨자 i+1은 i+1번째 하천단면을 나타낸다. 하천망 유출방정식들의 유한차분해석은 위의 도함수 및 계수들의 유한 차분 표현을 기본방정식들에 도입함으로써 구할수 있다.

첫번째로, 하천내 두 지점간의 연속방정식에 유한 차분법을 도입하여 미지수의 항으로 정리하면 식 (31)과 같이 표현된다.

$$D_1 Q_i^{n+1} + E_1 h_i^{n+1} + F_1 Q_{i+1}^{n+1} + G_1 h_{i+1}^{n+1} = T_1 \quad (31)$$

$$D_1 = -4\theta\psi$$

$$E_1 = 2b_{i+1/2}^n$$

$$F_1 = 4\theta\psi$$

$$G_1 = 2b_{i+1/2}^n$$

$$T_1 = 2b_{i+1/2}^n h_i^n + 2b_{i+1/2}^n h_{i+1}^n + 4(1-\theta)\psi Q_i^n - 4(1-\theta)\psi Q_{i+1}^n + 4\theta \Delta t q_{i+1/2}^{n+1} + 4(1-\theta) \Delta t q_{i+1/2}^n$$

여기에서, D₁, E₁, F₁, G₁, T₁은 기지의 값으로부터 계산된 계수들이며, b는 단면의 폭, ψ는 Δt/Δx, θ는 중량인자(weighting factor)를 각각 나타낸다. 단일 하천내 두 단면사이의 운동량방정식에 유한 차분 해석을 적용한후 선형의 차분 방정식으로 표현하기 위하여는 운동량 방정식내 마찰경사항의 선형화(linearization)가 필요하다. Taylor 급수를 이용하여 마찰경사항을 선형화(linearization)하여 미지수의 항으로 정리하면 식 (32)와 같이 쓰일수 있다.

$$D_2 Q_i^{n+1} + E_2 h_i^{n+1} + F_2 Q_{i+1}^{n+1} + G_2 h_{i+1}^{n+1} = T_2 \quad (32)$$

$$D_2 = 1 + \frac{2g\theta A_{i+1/2}^n \Delta t S_f^n}{Q_i^n} - 2\theta\psi V_i^n$$

$$E_2 = 2g\theta\psi A_{i+1/2}^n -$$

$$\frac{2g\theta \Delta t A_{i+1/2}^n S_f^n}{K_i^n} \left(-\frac{\partial K_i^n}{\partial h} \right)$$

$$F_2 = 1 + 2\theta\psi V_{i+1}^n + \frac{2g\theta \Delta t A_{i+1/2}^n S_{f,i+1}^n}{Q_{i+1}^n}$$

$$G_2 = 2g\theta\psi A_{i+1/2}^n -$$

$$\frac{2g\theta\psi A_{i+1/2}^n S_{f,i+1}^n}{K_{i+1}^n} \left(-\frac{\partial K_{i+1}^n}{\partial h} \right)$$

$$T_2 = Q_i^n + Q_{i+1}^n - 2(1-\theta)\psi V_{i+1}^n Q_{i+1}^n$$

$$+ 2(1-\theta)\psi V_i^n Q_i^n + gA_{i+1/2}^n \theta \Delta t S_{f,i+1}^n$$

$$- 2gA_{i+1/2}^n (1-\theta)\psi h_{i+1}^n$$

$$+ 2gA_{i+1/2}^n (1-\theta)\psi h_i^n$$

$$+ gA_{i+1/2}^n \Delta t (S_{f,i}^n + S_{f,i+1}^n)$$

$$\frac{2g\theta A_{i+1/2}^n \Delta t S_{i+1}^n h_{i+1}^n}{K_{i+1}^n} \left(\frac{\partial K_{i+1}^n}{\partial h} \right)$$

$$+g\theta A_{i+1/2}^n \Delta t S_{i+1}^n$$

$$\frac{2g\theta A_{i+1/2}^n \Delta t S_i^n h_i^n}{K_i^n} \left(\frac{\partial K_i^n}{\partial h} \right)$$

$$-g(1-\theta) A_{i+1/2}^n \Delta t S_{i+1}^n$$

$$-g(1-\theta) A_{i+1/2}^n \Delta t S_i^n$$

$$+2\theta \Delta t (q_{i+1/2}^{n+1} V_{i+1/2}^{n+1})$$

$$+2(1-\theta) \Delta t (q_{i+1/2}^n V_{i+1/2}^n)$$

여기에서 D_3 , E_3 , F_3 , G_3 , T_3 는 각각 기지의 값으로부터 계산된 계수들이며, conveyance K 는 Manning의 마찰공식을 이용하여 $K=1/nR^{2/3}A$ 로 표현할 수 있다. 수심 h 에 대한 conveyance의 편도함수는 수로단면 상태에 따라 아래와 같이 표현된다.

첫째로, 구형수로에서는 식 (33)과 같이 표현되며

$$\left(\frac{\partial K}{\partial h} \right) = \frac{K}{A} \left(\frac{5T}{3} - \frac{4R}{3} \right) \quad (33)$$

둘째로, 사다리꼴 형태의 수로에서는 식 (34)와 같이 표현된다.

$$\frac{\partial K}{\partial h} = \frac{K}{A} \left\{ \frac{5T}{3} - \frac{4R\sqrt{1+(\cot\theta)^2}}{3} \right\} \quad (24)$$

여기에서, ϕ 는 경사각을 나타낸다. 합류점 상류부와 하류부 사이의 에너지방정식은 유한 차분법을 도입하여 미지수의 향으로 정리하면 식 (35)와 같은 차분방정식이 된다.

$$D_3 Q_u^{n+1} + E_3 h_u^{n+1} F_3 Q_d^{n+1} G_3 h_d^{n+1} = T_3 \quad (35)$$

$$D_3 = \frac{2\theta V_u^n}{A_u^n} - \frac{1}{\phi A_u^n} - \frac{2g\theta \Delta x S_u^n}{Q_u^n}$$

$$E_3 = -\frac{2\theta V_u^{n2} b_u^n}{A_u^n} + 2\theta g + \frac{10g\theta \Delta x S_u^n}{3A_u^n}$$

$$F_3 = -\frac{1}{\theta A_d^n} - \frac{2\theta V_d^n}{A_d^n} - \frac{2g\theta \Delta x S_d^n}{Q_d^n}$$

$$G_3 = \frac{2\theta V_d^{n2} b_d^n}{A_d^n} - 2\theta g + \frac{10g\theta \Delta x b_d^n S_d^n}{3A_d^n}$$

$$T_3 = \theta V_u^{n2} \frac{2\theta V_u^{n2} b_u^n}{A_u^n} h_u^n - (1-\theta) V_u^{n2}$$

$$-2(1-\theta) g h_u^n - \frac{V_u^n}{\theta} - \frac{V_d^n}{\theta}$$

$$- \theta V_d^{n2} \frac{2\theta V_d^{n2} b_d^n}{A_d^n} h_d^n + (1-\theta) V_d^{n2}$$

$$+ 2g(1-\theta) h_d^n - g\theta \Delta x S_u^n$$

$$+ \frac{10g\theta \Delta x b_u^n S_u^n}{3A_u^n} h_u^n - g\theta \Delta x S_d^n$$

$$+ \frac{10g\theta \Delta x b_d^n S_d^n}{3A_d^n} h_d^n$$

$$- (1-\theta) g \Delta x S_u^n + (1-\theta) g \Delta x S_d^n$$

$$- 2g S_0 \Delta x$$

여기에서 D_3 , E_3 , F_3 , G_3 , T_3 은 각각 기지의 값으로부터 계산된 계수들이며, 아래첨자 u 는 합류점 상류부 단면을 나타내며 아래첨자 d 는 합류점 하류부 단면을 나타낸다. 합류점 상류부 및 하류부간의 연속방정식에 유한 차분법을 적용하여 미지수의 향으로 정리하면 식 (36)과 같이 표현된다.

$$D_1 Q_u^{n+1} + E_1 Q_u^{n+1} + F_1 Q_u^{n+1} G_1 Q_d^{n+1} = T_1 \quad (36)$$

$$D_1 = \theta$$

$$E_1 = \theta$$

$$F_1 = \theta$$

$$G_i = \theta$$

$$T_i = -(1 - \theta) (Q_{u1}^n + Q_{u2}^n + Q_{u3}^n + Q_{d1}^n)$$

여기에서, D_i , E_i , F_i , G_i , T_i 는 각각 기지의 값으로부터 계산된 계수들이며, Q_{u1} , Q_{u2} , Q_{u3} 는 각각 첫번째, 두번째, 세번째 합류점 상류부 하천의 유량을 나타내며 Q_{d1} 은 합류점 하류부 하천의 유량을 나타낸다.

4. 하천망 해석

3장에서 유한차분화된 하천망의 4종류의 유출 방정식들을 효과적으로 해석하기 위하여 미지수의 계수들로 구성된 행렬의 특성을 잘 이용하는 것이 바람직하다. 이들 방정식들에 대한 행렬을 살펴보면 비록 미지수의 내용이 틀리긴 하지만 식 (37)에서 보이는 것과 같이 각각 4개의 미지수에 대한 계수로 이루어졌다.

$$\begin{matrix}
 a_{1,1} & a_{1,2} & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\
 a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & - & - & - & - & - & - & - & - \\
 a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & - & - & - & - & - & - & - & - \\
 - & - & a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & - & - & - & - & - & - \\
 - & - & - & a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} & - & - & - & - & - \\
 - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\
 - & - & - & - & - & a_{7,1} & a_{7,2} & - & - & - & a_{7,3} & a_{7,4} \\
 - & - & - & - & - & - & a_{8,1} & a_{8,2} & - & - & - & - \\
 - & - & - & - & - & - & - & a_{9,1} & a_{9,2} & a_{9,3} & a_{9,4} & - \\
 - & - & - & - & - & - & - & - & a_{10,1} & a_{10,2} & a_{10,3} & a_{10,4} \\
 - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\
 - & - & - & a_{12,1} & - & a_{12,2} & - & - & - & a_{12,3} & - & a_{12,4} \\
 - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\
 - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & a_{2n,1} & a_{2n,2}
 \end{matrix} \quad (37)$$

이 행렬들은 일정한 규칙적 특성을 가지고 있는 단일하천에서와는 달리 불규칙적으로 구성되어 있어 규칙적인 특성을 가진 행렬해석에 잘 이용되는 double sweep의 해석방법을 직접 적용할수 없으나, double sweep 해석법중 전진법에서 계산되는 순환 계수 방정식(recurrent coefficient equation)을 여러 종류로 나누어 제안하므로써 하천망 계산에 적합한 해석 알고리즘화 하였다. 즉, 컴퓨터 저장용량 (computer storage)의 사용량을 줄이고 system을 일체로 해석하기 위하여 Fread(1971)에 의하여 단일 하천에 적용하

기 위하여 제안된 순환방정식(recurrent equation)들을 하천 system에 적용되도록 하였으며, 이때 순환계수방정식들을 하천내 두 단면간의 연속방정식, 하천내 두 단면간의 운동량 방정식, 합류점에서의 연속방정식 및 합류점에서의 운동량방정식에 적용되도록 제안하였다(Choi, 1991). 이 중에서 가장 복잡하게 표현되는 합류점의 연속방정식에 적용되는 순환방정식들은 식(38)-(42)에서 보여진다.

$$B_{2u_k} = -M_{2u_k,2} \frac{M_{2u_k-1,1}}{M_{2u_k-1,1}} \quad (38)$$

$$D_{2u_k} = Z_{2u_k,2} - M_{2u_k,2} \frac{Z_{2u_k-1}}{M_{2u_k-1,1}} \quad (39)$$

$$M_{i,1} = a_{i,1} - \sum_{k=1}^{N_C} a_{i,k} \frac{a_{2u_k,3}}{B_{2u_k}} \quad (40)$$

$$M_{i,1} = \sum_{k=1}^{N_C} a_{i,k} \frac{a_{2u_k,1}}{B_{2u_k}} \quad (41)$$

$$Z_i = ri - \sum_{k=1}^{N_C} a_{i,k} \frac{D_{2u_k}}{B_{2u_k}} \quad (42)$$

하천망 해석의 흐름은 전진법에서 위와같이 제안된 순환계수방정식을 이용하여 계수를 결정하고, 이 순환계수를 이용하여 후진법에서 미지수인 유량과 수심을 구하게 된다.

5. 결 론

이 논문에서 유역내 이동강우를 해석하기 위하여 분포형 유역모델을 개발하였다. 이 유역모델은 유출 진행과정의 물리적 현상을 그대로 적용한 모델이며 지표면 흐름과 하천망 흐름으로 나누어 유출을 해석하였다. 지표면의 흐름은 2차원의 연속방정식과 운동량방정식을 이용하였는데 지표면의 경사가 비교적 급하고 수심이 적음을 고려하여 운동량 방정식에 kinematic 이론을 도입하였으며 이 이론에 따라 연속 방정식과 운동량방정식이 축합된 기본방정식을 모델에 이용하였다. 또한 하천망 흐름은 기존의 많은 유역모델에서 이용된 독립된 단일 하천의 집합체로서 가졌던 해석과는 달리 하천망을 일체로 하여 해석하였으며, 단일하천내 및 합류점에 대한 1차원의 연속 방정식과 운동량방정식들을 기본방정식으로 이용하였다. 기본방정식들을 해석하기 위하여 수치 해석법을 이용하였으며 지표면의 흐름은 공간도함수는 유한요소법을, 시간에 대한 도함수는 유한차분법을 이

용하였다. 또한 하천망에 대한 해석은 안정성 및 시간간격 선택에 유리한 음해법의 유한차분해석을 이용하였다. 모델은 특히 이동강우에 있어서 중요한 특색인 공간적 및 시간적 특성을 효과적으로 해석할수 있도록 개발되었다. 또한 모델은 구성된 행렬의 특징을 이용하여 지표면 유출 모델은 Gauss 소거법을 이용하여 그 해를 구하였으며 하천망 해석은 double Sweep방법을 적용하기 위한 여러종류의 순환계수방정식을 제안하였고 이를 이용하여 그 해를 구하였다. 연속되는 논문에서 이 모델을 실제 유역에 적용하여 이동강우를 성공적으로 해석하였다.

참고문헌

1. Abbott, M. B.(1980) "Computational Hydraulics," 18th Edition, Pitman Advanced Publishing Program.
2. Amein, M. and Fang C. S. (1970) "Implicit Flood Routing in Natural Channels," Journal of Hydraulics, No. 12, pp. 2481-2500.
3. Amein, M. (1968) "An Implicit Method for Numerical Flood Routing," Water Resources Research, No. 4, pp. 719-726.
4. Balloffet, A. (1969) "One Dimensional Analysis of Floods and Tides in Open Channels," Journal of Hydraulics Division, Vol. 95, No. HY4, ASCE, pp. 1429-1451.
5. Brakensiek, D. L. (1967) "Kinematic Flood Routing," Transactions, ASAE, Vol. 10, No. 3, pp 340-343.
6. Chen, Y. H. (1973) "Mathematical Modeling of Water and Sediment Routing in Natural Channels," Ph. D. Dissertation, Colorado State University, Fort Collins, Co.
7. Chen, C. L. and Chow, V. T. (1971) "Formulation of Mathematical Watershed Flow Model," Journal of the Engr. Mechanics Div., Proceedins, ASCE, 97EM3, pp. 809-828.
8. Choi, G. W. (1991) "Hydrodynamic Network Simulation Through Channel Junctions," Ph. D.Dissertation, Dept. of Civil Engineering, Colorado State University, Fort Collins, Co.
9. Ellis, J. (1970) "Unsteady Flow in Channel of Variable Cross Section," Journal of Hydraulics, No. 10, pp. 1927-1945.
10. Fread, D. L. (1971) "Implicit Flood Routing in Natural Channels," Journal of Hydraulics, No. 7, ASCE, pp. 1156-1159.
11. Gunaratanam, D. J. and Perkins, F. E. (1970) "Numerical Solution of Unsteady Flows in Open Channels," Hydrodynamics Laboratory Report No 127, M. I. T., Cambridge, Ma.
12. Hager, W. H. (1989) "Transitional Flow in Channel Junction," Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 115, No. 2, ASCE, pp. 243-259.
13. Judah, O. M. (1973) "Simulation of Runoff Hydrograph from Natural Watershed by Finite Element Method," Ph. D. Dissertation, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Va.
14. Julien, P. Y. et al. (1989) "CASC Users Manual-A Finite Element Model for Spatially Varied Overland Flow Simulation," Report CER87-88, GE07, Colorado State University, Fort Collins, Co.
15. Kuichling, E. (1889) "The Relation Between Rainfall and the Discharge of Sewers on Populous Districts," Transactions, ASCE, Volume 20 ,pp. 1-60.
16. Liggett, J. A. and Cunge, J. A. (1975) "Numerical Methods of Solution of the Unsteady Flow Equations," Chapter 4 of Unsteady Flow in Open Channels, ed. by Mahmood, K. and Yevjev-ich, V., Water Resources Publications, Fort Collins, Co.
17. Lighthill, M. J. and Whitham, G. B. (1955) "On Kinematic Waves I, Flood Measurements in Long Rivers," Proceedings, Royal Society of London, Series A, Vol. 229, London, England, pp. 281-316.
18. Marshall, R. J. (1981) "A Spatial Temporal Model of Storm Rainfall," Journal of Hydrology, Volume 62, pp. 53-62.
19. Niemczynowicz, J. (1987) "Storm Tracking using Rain Gauge Data," Journal of Hydrology, Volume 93, pp. 135-152.
20. Niemczynowicz, J. and Dahlblom, P. (1984) "D-namic Properties of Rainfall in Land," Nordic Hydrology, Volume 15, pp. 9-24.
21. Ponce, M. V. and Li, R. M. (1979) "Overview of Flood Routing Methods," Chapter 6, Analysis of Watershed and River Systems(ed. by Simons, D. B. Li, R. M.), Notes for Short Course of Analysis of Watershed and River Systems.
22. Richardson, J. R. (1989) "The Effect of Moving Rainstorms on Overland Flow Using One Dimensional Finite Elements." Ph. D. Dissertation, Dept. of Civil Engineering, Colorado State University, Fort Collins, Co.
23. Ross, B. B. et al. (1979) "A Finite Element Model of Overland and Channel Flow for Assessing the Hydrologic Impact of LandUse Change," Journal of Hydrology, Vol. 41, pp. 11-30.
24. Ross, B. B. (1978) "A Spatially Responsive Catchment Model for Prediction Stormwater Runoff from Ungaged Watershed," Ph. D. Dissertation, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Va.
25. Shaw, S. R. (1983) "An Investigation of the Cellular Structure of Storms using Correlation Techniques," Journal of Hydrology, Volume 62, pp. 63-79.
26. Sherman, B. and Singh, V. P. (1982) "A Kinematic Model for Surface Irrigation An Extension," Water Resources Research, Vol. 18, No.3 , AGU, pp. 659-667.
27. Singh, V. P. and Ram, R. S. (1983) "A Kinematic Model for Surface Irrigation Verification by Experimental Data," Water Resources Research, Vol. 19, No. 6, AGU, pp. 1599-1612.
28. Webber, N. B. and Greated, C. A. (1966) "An Investigation of Flow Behaviour at the Junction of Rectangular Channels," Proceedings,Vo-l. 34, Session 1965-1966, The Institution of Civil Engineers, pp. 321-334.
29. Woolhiser, D. A. and Liggett, J. A. (1967) "Unsteady One Dimensional Flow over A Plane The Rising Hydrograph," Water Resources Research, Vol. 3, No. 3, pp.