

〈論 文〉

면내 변위의 변화를 고려한 Cross-ply 적층판의 진동 및 감쇠해석

Vibration and Damping Analysis of Cross-ply Plate Strip Including Layer-wise In-plane Displacements

구 교 남* · 이 인**

Kyo-Nam Koo and In Lee

(1992년 10월 28일 접수; 1992년 12월 3일 심사완료)

ABSTRACT

In order to investigate the effects of layer-wise in-plane displacements on vibration and damping characteristics of composite laminated plates, the finite element method based on the generalized laminated plate theory (GLPT) has been formulated. Specific damping capacity of each mode was obtained by modal strain energy method. To see the effect of transverse shear on deformation, the strain energy of stress components was computed. The accuracy of this study was examined for the cylindrical bending vibration of cross-ply plate strip. The results were very accurate compared with 3-D solutions. The numerical results show that through-thickness variation of in-plane displacements has not so much influence on the natural frequency, but has a great influence on the damping of composite plates, especially on the damping of thick composite plates since the damping is affected by local behavior while the natural frequency is affected by global behavior.

1. 서 론

복합재료는 섬유방향의 탄성계수 대 전단계수의 비가 크기 때문에 복합적 층판은 횡전단 변형효과를 고려하는 판이론으로 해석되어 왔다. 그러나 횡전단 변형이론은 두께에 따른 응력을 예측하는데 한계가 있으므로 각층의 면내 변형을 고려하는 이론이 요구된다. 특히 복합적층판의 감쇠특성은 국부적인 응력상태에 좌우되므로 기존의 판이론보다 더욱 정교한 이론이 필요하게 된다. 면내변위의 변화를 고려하는 판이론들은 다양한 방법으로 시도되고 있고, 그 효시는

Basset⁽¹⁾라고 알려져 있으며 대부분 면내변형을 가정하는 함수의 차수가 가장 큰 차이점이다.

Pagano^(2,3)는 적층판의 응력해석을 위해 3차원탄성론을 이용하여 엄밀해를 구하였으며 Toledano⁽⁴⁾는 지그재그(zigzag) 형태의 C^0 함수를 이용하여 Pagano의 엄밀해와 비교하였다. Reddy등⁽⁵⁾은 횡변위가 두께방향으로 일정하다는 가정하에 3차원 탄성론으로부터 일반화된 적층판이론(GLPT: generalized laminated plate theory)을 얻었으며 3차원 탄성론의 결과와 잘 일치함을 보였다.

각층의 면내변형을 고려한 이론을 사용하여 고유진동수를 계산한 예로는 Noor⁽⁶⁾가 3차원 이론을 이용하여 유한차분법 (FDM)으로 구한 바 있으며, Ow-

* 한국과학기술원 항공우주공학과

** 정회원, 한국과학기술원 항공우주공학과

en⁽⁴⁾은 유한요소법으로 각층의 면내변형을 고려하여 진동 및 좌굴해석을 수행하였다. Cho 등⁽⁶⁾은 각층의 면내변형을 3차함수로 가정하는 고차변형이론을 사용하여 고유진동수를 비교하였다.

복합재료의 감쇠해석은 고전 적층판 이론(CLPT: classical laminated plate theory)이나 1차 전단변형판이론(FSDT: first-order shear deformation theory)을 사용하는 방법이 주류를 이루어 왔으며, Lin 등⁽⁹⁾은 FSDT를 적용시킨 유한요소법으로 4단 자유경계조건을 갖는 복합적층판의 비감쇠용량(specific damping capacity)을 계산하고 실험치와 비교하였다. Koo 등⁽¹⁰⁾은 FSDT를 이용한 유한요소법에 모우드 접근법(modal approach)을 적용하여 복합적층판의 진동 및 감쇠해석을 수행하였다. Hwang 등⁽¹¹⁾은 SAPIV 프로그램의 8-node, thick-shell요소를 사용하여 6개의 응력성분별 변형에너지 및 감쇠에너지를 계산하였다. 그들의 결과에 따르면 두께방향으로의 수직응력에 의한 감쇠효과는 거의 없는 것으로 나타났다.

본 연구에서는 Reddy⁽⁵⁾가 제안한 GLPT를 동적 문제로 확장시켜 유한요소 수식화를 수행하고, 모우드 변형에너지(MSE: modal strain energy) 법을 이용하여 복합적층판의 감쇠에너지로부터 비감쇠용량을 계산하였다. 수치계산은 cross-ply 적층판이 원통형 휨(cylindrical bending)으로 진동할 때 두께대 길이비의 효과 및 cross-ply비가 감쇠에 미치는 영향을 살펴보았다.

2. 이 론

2.1 단층의 구성방정식

복합재료의 재료주축(principal material axis)은

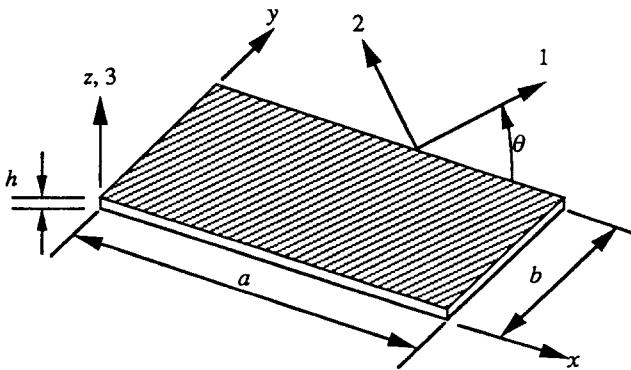


Fig.1 Coordinate systems of geometric axes and principal material axes.

Fig. 1에서와 같이 섬유방향, 섬유에 수직인 방향, 두께방향을 각각 1, 2, 3축으로 정의되며 두께방향으로의 수직응력을 고려하지 않고 $x-y-z$ 좌표계에 대한 k 번째 단층(lamina)의 구성방정식을 만들면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}_k \quad (1)$$

여기서 \bar{Q} 는 변환된 강성행렬이며 변환행렬 R 을 이용하여 다음의 식으로부터 얻어진다.

$$\bar{Q} = R^{-1}QR^{-T} \quad (2)$$

$$R = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2m & 0 & 0 \\ n^2 & m^2 & -2mn & 0 & 0 \\ -mn & mn & m^2 - n^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & -n \\ 0 & 0 & 0 & n & m \end{bmatrix} \quad (3)$$

여기서 $m = \cos\theta$, $\sin\theta$ 이고 Q 는 직교이방성 복합재료의 강성행렬이다.

2.2 일반화된 적층판이론(GLPT)

시간 t 일 때, 적층판의 임의의 점 (x, y, z) 에서의 변위 (u, v, w) 는 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + U(z, y, z, t) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + V(z, y, z, t) \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) + W(z, y, z, t) \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 (u_0, v_0, w_0) 는 적층판의 중립면 상의 점 $(x, y, 0)$ 에서의 변위이며 (U, V, W) 는 중립면 상에서 영이 되는 함수이다. 즉,

$$\begin{aligned} U(x, y, 0, t) &= V(x, y, 0, t) \\ W(x, y, 0, t) &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

체적력을 무시하고 식 (4)를 이용하여 미소변형을 구한 뒤 해밀톤(Hamilton)의 원리를 적용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{-h/2}^{h/2} \int_{\Omega} \left[\sigma_x \frac{\partial \delta(u_0 + U)}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial \delta(v_0 + V)}{\partial y} \right] \\ & + \sigma_z \frac{\partial \delta W}{\partial z} + \sigma_{xy} \left\{ \frac{\partial \delta(u_0 + U)}{\partial y} + \frac{\partial \delta(v_0 + V)}{\partial x} \right\} \\ & + \sigma_{yz} \left\{ \frac{\partial \delta V}{\partial z} + \frac{\partial \delta(w_0 + W)}{\partial y} \right\} \\ & + \sigma_{xz} \left\{ \frac{\partial \delta U}{\partial z} + \frac{\partial \delta(w_0 + W)}{\partial x} \right\} \\ & - \rho \{ (\dot{u}_0 + \dot{U}) \delta(\dot{u}_0 + \dot{U}) + (\dot{v}_0 + \dot{V}) \delta(\dot{v}_0 + \dot{V}) \\ & + (\dot{w}_0 + \dot{W}) \delta(\dot{w}_0 + \dot{W}) \} dAdzdt \\ & - \int_0^T \int_{\Omega} q \delta(w_0 + W) dAdt = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

여기서 q 는 중립면에 가해지는 분포하중이다. 3차원 이론으로부터 2차원 이론을 유도하기 위해 (U, V, W) 의 두께 방향으로 변화를 다음과 같이 가정한다.

$$\begin{aligned} U(x, y, z, t) &= \sum_{j=1}^{N+1} U_j(x, y, t) \Phi'(z) \\ V(x, y, z, t) &= \sum_{j=1}^{N+1} V_j(x, y, t) \Phi'(z) \\ W(x, y, z, t) &= \sum_{j=1}^{N+1} W_j(x, y, t) \Phi'(z) \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 (U_j, V_j, W_j) 는 결정해야 할 미지수이며, $\Phi'(z)$ 는 $\Phi'(0) = 0$ 인 조건을 만족시키는 연속적인 보간함수이다. 보간함수로 선형 라그랑지(Lagrange) 함수를 사용하면 N 은 두께 방향으로 분할되는 부적층판(sublaminates)의 개수가 된다. 식 (7)은 (U, V, W) 를 두께 방향으로 반이산(semi-discrete) 유한요소로 근사시킨 것이 되어 $\Phi'(z)$ 를 전체 보간함수(global interpolation function)로, (U_j, V_j, W_j) 를 절점변위로 간주할 수 있다.

본 연구에서는 w 의 두께방향의 변화를 고려하지 않으므로 $W(x, y, z, t) = 0$ 로 한다. 적층수를 n , 보간함수의 차수를 p 라고 할 때, 보간에 라그랑지 함수를 사용하고 각 단층을 분할하면 $N = pn + 1$ 이 된다. 선형보간일 경우에는 $p = 1$ 이 되며 다음과 같은 변위의 연속성을 갖게 된다.

$$\begin{aligned} U_1 &= u_1^1, U_2 = u_1^2 = u_2^1, \dots, U_N = u_{N-1}^N = u_N^1, \\ U_{N+1} &= u_N^2 \\ V_1 &= v_1^1, V_2 = v_1^2 = v_2^1, \dots, V_N = v_{N-1}^N = v_N^1, \\ V_{N+1} &= v_N^2 \end{aligned} \quad (8)$$

그리고 선형보간함수 $\Phi'(z)$ 는 Fig. 2에서 처럼 다음과 같이 정의된다.

$$\Phi'(z) = \begin{cases} \Psi_2^{j-1}(z) = \frac{z - z_{j-1}}{z_{j+1} - z_{j-1}} & \text{for } z_{j-1} < z < z_j \\ \Psi_1^j(z) = \frac{z_{j+1} - z}{z_{j+1} - z_j} & \text{for } z_j < z < z_{j+1} \end{cases} \quad (9)$$

w 의 두께방향으로의 변화를 무시하고 식 (7)을 식 (6)에 대입한 뒤, 두께방향으로 적분을 수행하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} \left[N_x \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} + N_y \frac{\partial \delta v_0}{\partial y} \right. \\ & + N_{xy} \left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} \right) + Q_x \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} \\ & \left. + Q_y \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} + \sum_{j=1}^{N+1} \{ N_x^j \frac{\partial \delta U_j}{\partial x} \right. \end{aligned}$$

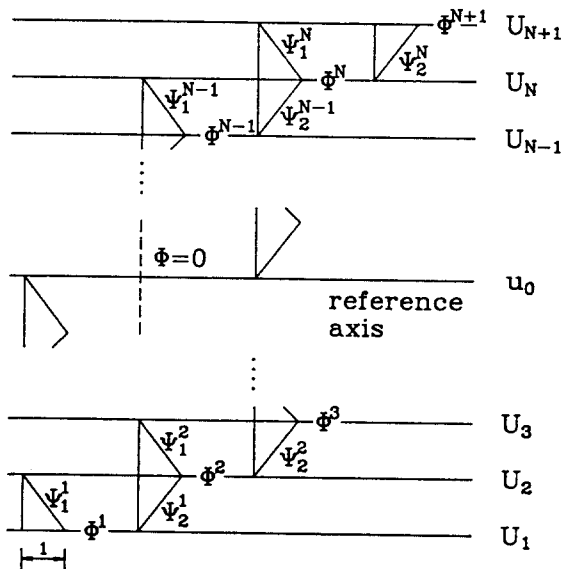


Fig.2 Linear interpolation function for through-thickness direction.

$$\begin{aligned}
 &+ N_y^J \frac{\partial \delta V_J}{\partial y} + N_{xy}^J \left(\frac{\partial \delta U_J}{\partial y} + \frac{\partial \delta V_J}{\partial x} \right) \\
 &+ Q_y^J \delta V_J + Q_x^J \delta U_J \quad (10) \\
 &+ I_o (\ddot{u}_o \delta v_o + \ddot{v}_o \delta v + \ddot{w}_o \delta w_o) \\
 &+ \sum_{j=1}^N I^j (\ddot{U}_j \delta u_o + \ddot{V}_j \delta v_o + \ddot{u}_o \delta U_j + \ddot{v}_o \delta V_j) \\
 &+ \sum_{I=1}^N \sum_{J=1}^N I^{IJ} (\ddot{U}_j \delta U_I + \ddot{V}_j \delta V_I) \\
 &- q \delta w_o] dAdt = 0
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & A_{45} \\ 0 & 0 & 0 & A_{45} & A_{45} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}^j = \begin{bmatrix} B'_{11} & B'_{12} & B'_{16} & 0 & 0 \\ B'_{12} & B'_{22} & B'_{26} & 0 & 0 \\ B'_{16} & B'_{26} & B'_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B'_{44} & B'_{45} \\ 0 & 0 & 0 & B'_{45} & B'_{45} \end{bmatrix}$$

여기서

$$\begin{aligned}
 (N_x, N_y, N_{xy}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) dz, \\
 (Q_y, Q_x) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{yz}, \sigma_{xz}) dz \\
 (N_x^j, N_y^j, N_{xy}^j) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) \Phi^j(z) dz \\
 (Q_y^j, Q_x^j) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{yz}, \sigma_{xz}) \frac{d\Phi^j(z)}{dz} dz \quad (11) \\
 I_o &= \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz, \quad I^j = \int_{-h/2}^{h/2} \rho \Phi^j(z) dz, \\
 I^{IJ} &= \int_{-h/2}^{h/2} \rho \Phi^j(z) \Phi^I(z) dz
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{D}^{IJ} = \begin{bmatrix} D''_{11} & D''_{12} & D''_{16} & 0 & 0 \\ D''_{12} & D''_{22} & D''_{26} & 0 & 0 \\ D''_{16} & D''_{26} & D''_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D''_{44} & D''_{45} \\ 0 & 0 & 0 & D''_{45} & D''_{45} \end{bmatrix} \quad (15)$$

식 (1)의 응력-변형도 관계식을 식 (11)에 대입하면 적층판의 구성방정식을 얻을 수 있다.

식 (15)의 각 성분은 다음식으로 구할 수 있다.

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}e + \sum_{j=1}^N \mathbf{B}^j e_j \quad (12a)$$

$$\begin{aligned}
 A_{pq} &= \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\bar{Q}_{pq})_k dz \quad (p, q = 1, 2, 6; 4, 5) \\
 B'_{pq} &= \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\bar{Q}_{pq})_k \Phi^j(z) dz \\
 &\quad (p, q = 1, 2, 6)
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{N}^j = \mathbf{B}^j e + \sum_{K=1}^N \mathbf{D}^{jK} e_K \quad (12b)$$

$$\begin{aligned}
 B'_{pq} &= \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\bar{Q}_{pq})_k \frac{d\Phi^j(z)}{dz} dz \\
 &\quad (p, q = 4, 5) \\
 B''_{pq} &= \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\bar{Q}_{pq})_k \Phi^j(z) \Phi^I(z) dz \\
 &\quad (p, q = 1, 2, 6)
 \end{aligned}$$

여기서

$$\mathbf{N} = \left\{ N_x \quad N_y \quad N_{xy} \quad Q_y \quad Q_x \right\}^T \quad (13a)$$

$$\mathbf{N}^j = \left\{ N_x^j \quad N_y^j \quad N_{xy}^j \quad Q_y^j \quad Q_x^j \right\}^T \quad (13b)$$

$$\mathbf{e} = \left\{ \frac{\partial u_o}{\partial x} \quad \frac{\partial v_o}{\partial y} \quad \frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} \quad \frac{\partial w_o}{\partial y} \quad \frac{\partial w_o}{\partial x} \right\}^T \quad (14a)$$

$$\mathbf{e}_j = \left\{ \frac{\partial U_j}{\partial x} \quad \frac{\partial V_j}{\partial y} \quad \frac{\partial U_j}{\partial y} + \frac{\partial V_j}{\partial x} \quad V_j \quad U_j \right\}^T \quad (14b)$$

식 (12)의 구성방정식을 이용하면 식 (10)은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}
 &\int_0^T \int_\Omega [\delta e^T \mathbf{A}e + \sum_{j=1}^N (\delta e^T \mathbf{B}^j e_j + \delta e_j^T \mathbf{B}^j e) \\
 &+ \sum_{I=1}^N \sum_{J=1}^N (\delta e_j^T \mathbf{D}^{IJ} e_j) + \delta d^T \mathbf{I}d \\
 &+ \sum_{j=1}^N I^j (\delta d_j^T \ddot{d}_j + \delta d_j^T \ddot{d}_p)
 \end{aligned}$$

$$+ \sum_{N=1}^N \sum_{J=1}^N \mathbf{I}^J \delta \mathbf{d}_J^T \ddot{\mathbf{d}}_J] dAdt = \int_0^T \int_{\Omega} q \delta w dt \quad (17)$$

여기서

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= \{u_0 \ v_0 \ w_0\}^T, \quad \mathbf{d}_p = \{v_0 \ u_0\}^T, \\ \mathbf{d}_J &= \{V_J \ U_J\}^T, \\ \mathbf{I} &= \begin{bmatrix} I_0 & O & O \\ O & I_0 & O \\ O & O & I_0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (18)$$

식 (17)의 유한요소식을 얻기 위해 2차원 평면요소 Ω_e 에 대해 변위 $(u_0, v_0, w_0, V_J, U_J)$ 를 형상함수(shape function) $\hat{\psi}_i$ 로 보간하면 다음과 같다.

$$(u_0, v_0, w_0, V_J, U_J) = \sum_{i=1}^m (u_0^i, v_0^i, w_0^i, V_J^i, U_J^i) \hat{\psi}_i \quad (19)$$

여기서 m 은 요소당 절점의 갯수이다.

식 (19)를 이용하여 변형을 및 변위를 이산화시키면 다음과 같다.

$$\mathbf{e} = \mathbf{H}_1 \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{e}_J = \mathbf{H}_2 \mathbf{u}_J \quad (20a)$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{G}_1 \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{d}_p = \mathbf{G}_2 \mathbf{u}_0, \quad (20b)$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{g}_1^T \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{d}_J = \mathbf{G}_3 \mathbf{u}_J$$

여기서

$$\mathbf{u}_0 = \{u_0^1 \ u_0^2 \ \dots \ u_0^m \ v_0^1 \ v_0^2 \ \dots \ v_0^m \ w_0^1 \ w_0^2 \ \dots \ w_0^m\}^T \quad (21a)$$

$$\mathbf{u}_J = \{V_J^1 \ V_J^2 \ \dots \ V_J^m \ U_J^1 \ U_J^2 \ \dots \ U_J^m\}^T \quad (21b)$$

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1^T & \mathbf{O}^T & \mathbf{O}^T \\ \mathbf{O}^T & \mathbf{h}_2^T & \mathbf{O}^T \\ \mathbf{h}_2^T & \mathbf{h}_1^T & \mathbf{O}^T \\ \mathbf{O}^T & \mathbf{O}^T & \mathbf{h}_2^T \\ \mathbf{O}^T & \mathbf{O}^T & \mathbf{h}_1^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{O}^T & \mathbf{h}_1^T \\ \mathbf{h}_2^T & \mathbf{O}^T \\ \mathbf{h}_1^T & \mathbf{h}_2^T \\ \mathbf{g}^T & \mathbf{O}^T \\ \mathbf{O}^T & \mathbf{g}^T \end{bmatrix} \quad (21c)$$

$$\mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{g}^T & \mathbf{O}^T & \mathbf{O}^T \\ \mathbf{O}^T & \mathbf{g}^T & \mathbf{O}^T \\ \mathbf{O}^T & \mathbf{O}^T & \mathbf{g}^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{g}^T & \mathbf{O}^T & \mathbf{O}^T \\ \mathbf{O}^T & \mathbf{g}^T & \mathbf{O}^T \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{g}^T & \mathbf{O}^T \\ \mathbf{O}^T & \mathbf{g}^T \end{bmatrix} \quad (21d)$$

$$\mathbf{h}_1 = \left\{ \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \quad \dots \quad \frac{\partial \psi_m}{\partial x} \right\}^T,$$

$$\mathbf{h}_2 = \left\{ \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \quad \dots \quad \frac{\partial \psi_m}{\partial y} \right\}^T, \quad (21e)$$

$$\mathbf{g}_1 = \left\{ \mathbf{O}^T \quad \mathbf{O}_m^T \quad \mathbf{g}^T \right\}^T,$$

$$\mathbf{O} = \left\{ \mathbf{O} \quad \mathbf{O} \quad \dots \quad \mathbf{O} \right\}^T \quad (21g)$$

식 (20)을 식 (17)에 대입하면 해밀톤의 원리가 유한요소식으로 표현된다.

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega_e} [\delta \mathbf{u}_0^T \mathbf{H}_1^T \mathbf{A} \mathbf{H}_1 \mathbf{u}_0 \\ & + \sum_{J=1}^N (\delta \mathbf{u}_0^T \mathbf{H}_1^T \mathbf{B}^J \mathbf{H}_2 \mathbf{u}_J + \delta \mathbf{u}_J^T \mathbf{H}_2^T \mathbf{B}^J \mathbf{H}_1 \mathbf{u}_0) \\ & + \sum_{I=1}^N \sum_{J=1}^N \delta \mathbf{u}_I^T \mathbf{H}_2^T \mathbf{D}^J \mathbf{H}_2 \mathbf{u}_J + \delta \mathbf{u}_0^T \mathbf{G}_1^T \mathbf{I} \mathbf{G}_1 \ddot{\mathbf{u}}_0 \\ & + \sum_{J=1}^N \mathbf{I}^J (\delta \mathbf{u}_0^T \mathbf{G}_2^T \mathbf{G}_3 \ddot{\mathbf{u}}_J + \delta \mathbf{u}_J^T \mathbf{G}_3^T \mathbf{G}_2 \ddot{\mathbf{u}}_0) \\ & + \sum_{I=1}^N \sum_{J=1}^N \delta \mathbf{u}_I^T \mathbf{G}_3^T \mathbf{I}^J \mathbf{G}_3 \ddot{\mathbf{u}}_J] dAdt \\ & = \int_0^T \int_{\Omega_e} q \delta \mathbf{u}_0^T \mathbf{g}_1 dAdt. \end{aligned} \quad (22)$$

식 (22)는 임의의 가상변위에 대해 만족해야 하므로 다음의 지배방정식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (23)$$

이때 각 요소의 강성행렬, 질량행렬, 절점력 및 변위 벡터는 다음과 같다.

$$K_e = \int_{\Omega_e} \begin{Bmatrix} H_1^T A H_1 & H_1^T B^1 H_2 \\ H_2^T B^1 H_1 & H_2^T D^{11} H_2 \\ H_2^T B^2 H_1 & H_2^T D^{21} H_2 \\ \vdots & \vdots \\ H_2^T B^N H_1 & H_2^T D^{N1} H_2 \end{Bmatrix} dA \quad (24a)$$

$$\begin{Bmatrix} H_1^T B^2 H_2 & \dots & H_1^T B^N H_2 \\ H_2^T D^{12} H_2 & \dots & H_2^T D^{1N} H_2 \\ H_2^T D^{22} H_2 & \dots & H_2^T D^{2N} H_2 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ H_2^T D^{N2} H_2 & \dots & H_2^T D^{NN} H_2 \end{Bmatrix} dA \quad (24a)$$

$$M_e = \int_{\Omega_e} \begin{Bmatrix} G_1^T A G_1 & I_2^T G_3 \\ I^1 G_3^T G_2 & I^1 G_3^T G_3 \\ I^2 G_3^T G_2 & I^2 G_3^T G_3 \\ \vdots & \vdots \\ I^N G_3^T G_2 & I^N G_3^T G_3 \end{Bmatrix} dA \quad (24b)$$

$$\begin{Bmatrix} I^{2T} G_3 & \dots & I^N G_3^T G_3 \\ I^{22} G_3^T G_3 & \dots & I^{2N} G_3^T G_3 \\ I^{22} G_3^T G_3 & \dots & I^{2N} G_3^T G_3 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ I^{N2} G_3^T G_3 & \dots & I^{NN} G_3^T G_3 \end{Bmatrix} dA \quad (24b)$$

$$f_e = \int_{\Omega_e} q \begin{Bmatrix} g_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} dA, \quad u_e = \begin{Bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{Bmatrix} \quad (24c)$$

2.3 모드 변형을 에너지법에 의한 감쇠 모델링

감쇠가 작은 경우에 각 모우드의 감쇠는 모우드 형상으로부터 소산에너지 ΔE 와 변형율에너지 E 의 비를 계산하게 되는데 이 방법을 모우드 변형율에너지(modal strain energy : MSE)법 이라고 한다. MSE 법에 의해 구해지는 비감쇠용량은 다음과 같이 정의된다.

$$\psi = \frac{\Delta E}{E} \quad (25)$$

복합적층판의 소산에너지는 5개의 성분으로 표현된다.

$$\Delta E = \frac{1}{2} \int_V (\psi_1 \sigma_1 \epsilon_1 + \psi_2 \sigma_2 \epsilon_2 + \psi_{12} \sigma_{12} \gamma_{12} + \psi_{23} \sigma_{23} \gamma_{23} + \psi_{13} \sigma_{13} \gamma_{13}) dV \quad (26)$$

여기서 ψ_1 와 ψ_2 는 각각 섬유방향과 섬유에 수직인 방향으로의 비감쇠용량이며, ψ_{12} (ψ_{13})와 ψ_{23} 는 각각 0° 시편과 90° 시편의 종전단(longitudinal shear) 비감쇠용량이다.

2.2절에서와 마찬가지로 방법으로 두께방향으로 적분을 수행하면 소산에너지는 다음과 같은 식으로 표현된다.

$$\Delta E = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [e^T A e + \sum_{k=1}^n \int_{J=1}^N (e^T B^J e_J + e_J^T B^J e) + \sum_{I=1}^N \sum_{J=1}^N e_I^T D^{IJ} e_J] dA \quad (27)$$

여기서

$$\hat{A}_{pq} = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\hat{Q}_{pq})_k dz \quad (p, q = 1, 2, 6; 4, 5)$$

$$\hat{B}_{pq}^J = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\hat{Q}_{pq})_k \Phi^J(z) dz \quad (p, q = 1, 2, 6)$$

$$\hat{B}_{pq}^J = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\hat{Q}_{pq})_k \frac{d\Phi^J(z)}{dz} dz \quad (p, q = 4, 5) \quad (28)$$

$$\hat{D}_{pq}^{IJ} = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\hat{Q}_{pq})_k \Phi^J(z) \Phi^I(z) dz \quad (p, q = 1, 2, 6)$$

$$\hat{D}_{pq}^{IJ} = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\hat{Q}_{pq})_k \frac{d\Phi^J(z)}{dz} \frac{d\Phi^I(z)}{dz} dz \quad (p, q = 4, 5)$$

식 (28)에서 \hat{Q} 는 다음의 변환법칙에 따라 구해진다.

$$Q = R^{-1} \Psi Q R^{-T} \quad (29)$$

여기서 R 은 식 (3)에 있으며 Ψ 는 식 (30)에 의해 정의된다.

$$\Psi = \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \psi_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_{13} \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \psi_1 &= 0.0045, \psi_2 = 0.0422, \\ \psi_{12} &= \psi_{13} = \psi_{23} = 0.0705 \end{aligned}$$

2.2절에서와 마찬가지로 식 (27)을 유한요소식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Delta E_e &= \frac{1}{2} \mathbf{u}_e^T (\mathbf{K}_d)_e \mathbf{u}_e = \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} [\mathbf{u}_0^T \mathbf{H}_1^T \hat{\mathbf{A}} \mathbf{H}_1 \mathbf{u}_0 \\ &+ \sum_{j=1}^N (\mathbf{u}_0^T \mathbf{H}_1^T \hat{\mathbf{B}}^j \mathbf{H}_2 \mathbf{u}_j + \mathbf{u}_j^T \mathbf{H}_2^T \hat{\mathbf{B}}^j \mathbf{H}_1 \mathbf{u}_0) \\ &+ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{u}_i^T \mathbf{H}_2^T \hat{\mathbf{D}}^{ij} \mathbf{H}_2 \mathbf{u}_j] dA \end{aligned} \quad (31)$$

적층판의 소산에너지는 모든 요소의 소산에너지를 합하면 되므로 다음과 같다.

$$\Delta E = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K}_d \mathbf{u} \quad (32)$$

따라서 적층판의 i 번째 모드 벡터를 ϕ_i 라고 한다면 각 모드의 비감쇠용량은 다음과 같다.

$$\psi_i = \frac{\phi_i^T \mathbf{K}_d \phi_i}{\phi_i^T \mathbf{K} \phi_i} \quad (33)$$

3. 계산결과 및 검토

본 연구에서 사용된 물성치는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E_1/E_2 &= 25, G_{12}/E_2 = G_{13}/E_2 = 0.5, \\ G_{23}/E_2 &= 0.2, \nu_{12} = 0.25 \end{aligned}$$

개발된 유한요소 프로그램은 적층판의 해석이 가능하지만 결과의 해석을 용이하게 하기 위해 양단이 단순지지되어 있는 cross-ply 적층판의 원통형 휨 문제를 다루기로 한다. 원통형 휨은 y 방향으로 변형율이 영이라고 가정하므로 다음과 같은 경계조건으로 y 방향에 대해 평면 변형율(plain strain) 문제화 한다.

$$\begin{aligned} w &= 0 & \text{at } x = 0 \\ w = u_0 &= 0 & \text{at } x = a \\ v_0 = V_j &= 0 & \text{at all points} \end{aligned} \quad (34)$$

정적해석을 위해 식 (35)와 같은 정현함수형의 횡하중을 가하였다.

$$q = q_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \quad (35)$$

무차원화된 횡변위 \bar{w} 와 면내변위 \bar{u} 는 다음과 같이 정의한다.

$$\bar{w} = \frac{w E_2 h^3}{q_0 a^4} \times 100, \quad \bar{u} = \frac{u E_2 h^2}{q_0 a^3} \times 100 \quad (36)$$

여기서 h 와 a 는 각각 적층판이 두께와 길이이다.

Table 1에 여러가지 적층에 따른 두꺼운 적층판($a/h = 4$)의 무차원화된 최대처짐이 있으며 본 연구결과가 3차원 해⁽²⁾와 잘 일치하고 있다. 여기서 n 은 적층된 단층의 수이므로 $N = n$ 인 경우는 면내변위를 각단층마다 선형으로 보간한 결과이다. $N = 2$ 인 경우는 선형 보간함수를 2개 사용한 결과로써, 대칭 적층일 때 FSDT와 같게 된다. Table 1로부터 $N =$

Table 1 Nondimensional maximum deflections, $w E_2 h^3 \times 10^2 / q_0 a^4$ of cross-ply plate strip in cylindrical bending under sinusoidal load : $a/h = 4$

Stacking sequence	Present		Pagano ⁽²⁾	Toledano ⁽⁴⁾
	$N=n$	$N=2$	(3-D exact)	(Zigzag)
[0/90/0] _T	2.800	2.092	2.887	2.907
[0/90/0/90] _T	4.092	3.187	4.181	4.202
[0/90/0/90/0] _T	3.007	2.279	3.044	3.059

2일 때의 결과는 오차가 심하게 나타나고 있음을 볼 수 있다. $N = n$ 일 때가 면내변위를 잘 기술하고 있어 3-D 탄성론의 해와 잘 일치한다.

$[0/90]_s$ 적층 스트립이 원통형 휨으로 진동할 때 a/h 에 따른 무차원 진동수의 변화를 Whitney⁽¹²⁾의 결과와 비교하여 Table 2에 나타내었다. Whitney가 사용한 계산식은 다음과 같다.

$$\omega_m = \frac{6}{\rho a^2 h^3} [D_{11} m^2 + k A_{55} (a^2 + \frac{m^2 \pi^2 h^2}{12}) \pm \{D_{11} m^2 \pi^2 + k A_{55} (a^2 + m^2 \pi^2 h^2 / 12)\}^2 - k A_{55} D_{11} m^4 \pi^4 h^2 / 3]^{1/2}$$

식 (37)에서 k 는 전단보정계수이며 $k = 5/6$ 를 사용하였다. 적층판의 두께가 얇은 경우에 본 계산결과와 FSDT의 CLPT의 결과와 잘 일치하나 두꺼워질수록 그 오차가 심해지고 있다. 특히 $N = 2$ 일 때의 결과가 Whitney의 결과와 약간의 오차가 발생하는 이유는 Whitney의 결과는 전단보정을 해주었기 때문이다.

Fig. 3에는 식 (35)의 분호하중이 가해질 때 cross-ply 비에 따른 면내변위를 나타내었다. 여기서 cross-ply 비는 다음과 같이 정의된다.

$$m = \frac{\text{total thickness of } 0^\circ \text{ layer}}{\text{total thickness of } 90^\circ \text{ layer}} \quad (38)$$

Cross-ply 비가 증가할수록 면내변위의 변화가 많아지다 감소하는 경향을 보여주고 있다. 따라서 적층판의 진동 및 감쇠특성이 cross-ply 비에 크게 좌우될 것으로 예상된다.

Table 2 Nondimensional fundamental frequencies, $\omega a^2 (\rho E_2 / h^2)^{1/2}$ of $[0/90]_s$ plate strip in cylindrical bending.

a/h	Present		Whitney ⁽¹²⁾ (FSDT)
	$N = 4$	$N = 2$	
5	6.5324	7.6323	7.1549
10	9.8924	10.8655	10.4898
20	12.1854	12.6152	12.4379
50	13.1974	13.2820	13.2148
100	13.3644	13.3863	13.3383

CLPT solution = 13.3802

Fig. 4는 $m = 1/9$ 와 $m = 5/5$ 일 때 a/h 에 따라 고유진동수와 비감쇠용량의 변화를 보여준다. $m = 1/9$ 인 경우에 고유진동수는 $N = 2$ 와 $N = 4$ 일 때가 큰 차이가 없으나 $m = 5/5$ 의 결과는 상대적으로 차이가 크게 나타난다. 이는 $m = 5/5$ 일 때 면내변위가 크기 때문이며 이로 인해 횡전단 변형효과도 크게 나타나고 있다. 비감쇠용량을 살펴보면 $a/h > 30$ 에서 $m = 1/9$ 인 경우가 감쇠량이 많아지는데 이는 판이 얇아지면서 횡전단변형이 적고 휨변형이 많아지므로 90° 층이 많을수록 감쇠가 크기 때문이다.

Fig. 5는 $a/h = 50$ 일 때 cross-ply 비에 따른 고유진동수와 비감쇠용량의 변화를 보여준다. 얇은 판의 경우 N 값에 따라 고유진동수의 차이는 거의 없으나 비감쇠용량은 m 이 작은 경우를 제외하고는 차이를 보여준다. 이는 Fig. 6에서 보듯이 $N = 4$ 일 때 90° 층의 횡전단변형 에너지의 비 W_{xz} 가 상대적으로 많기 때문이다. 또한 m 이 증가할수록 감쇠량이 작아지는 이유는 Fig. 6에서 보듯이 얇은 판의 횡전단변형 에너지의 비율이 5% 미만이므로 휨변형이 많이 발생하고 90° 층의 양이 적어지기 때문이다.

$a/h = 5$ 일 때 cross-ply 비에 따른 고유진동수와 비감쇠용량의 변화가 Fig. 7에 있으며 경향성이 $a/h = 50$ 일 때와 큰 차이가 있다. 즉 $m = 1/9$ 일 때를 제외하고 고유진동수의 오차가 나타나고 있으며 m

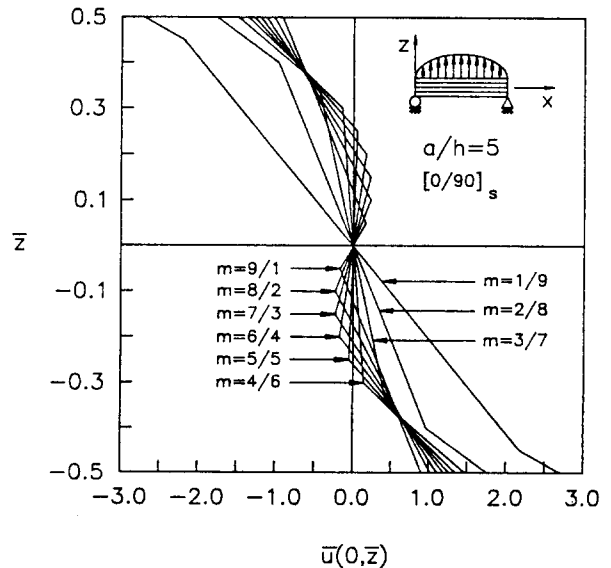
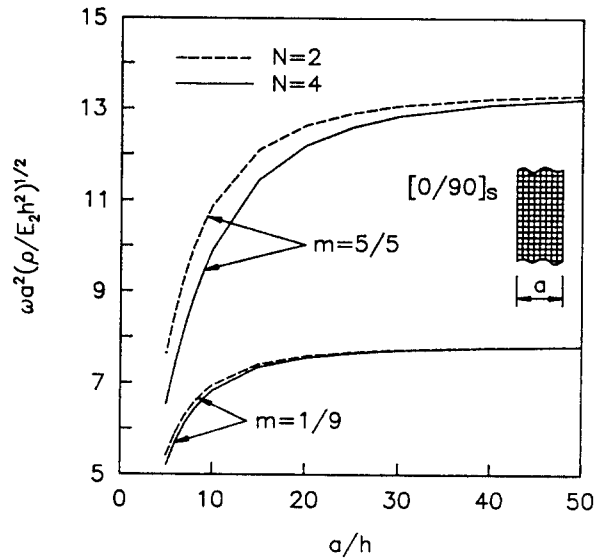
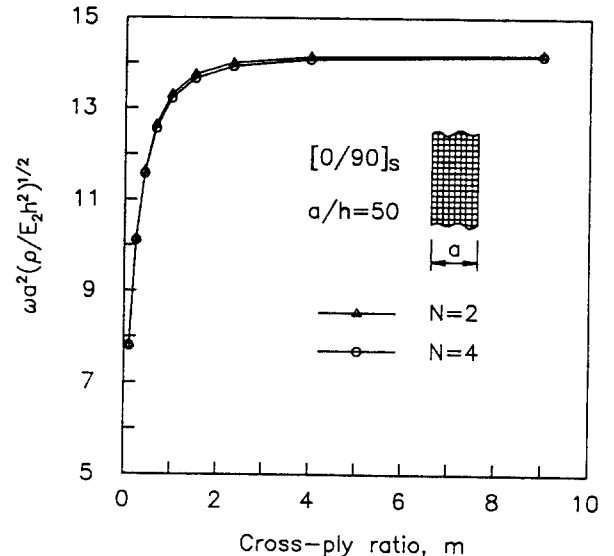


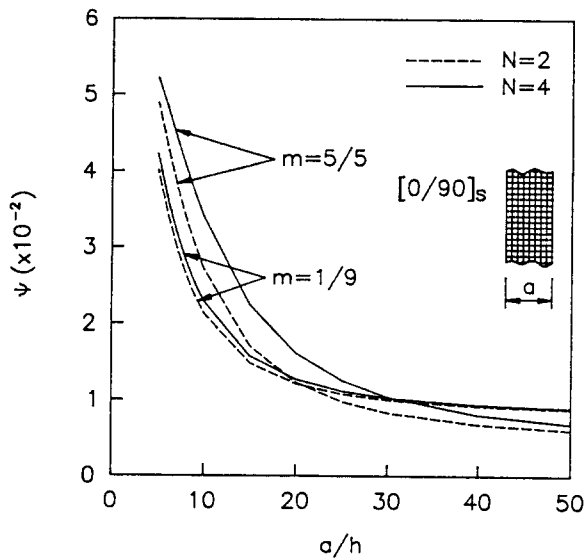
Fig. 3 Variation of in-plane displacement for simply supported $[0/90]_s$ plate strip with cross-ply ratio : $a/h = 5$.



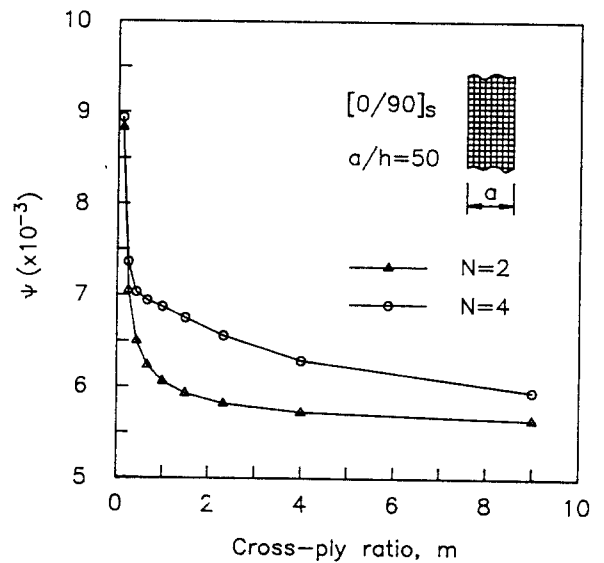
(a) Fundamental frequency



(a) Fundamental frequency



(b) Specific damping capacity



(b) Specific damping capacity

Fig.4 Effect of length-to-thickness on fundamental frequency and specific damping capacity for $[0/90]_s$ plate.

Fig.5 Effect of cross-ply ratio on fundamental frequency and specific damping capacity for $[0/90]_s$ plate : $a/h = 50$.

에 따른 비감쇠용량의 경향성이 완전히 다른 양상이다. 그 이유를 조사하기 위해 Fig.8에 변형률 에너지의 비를 나타내었는데 횡전단변형에 의한 에너지비가 매우 큼을 알 수 있다. 따라서 얇은 판은 주로 휨변형이 많기 때문에 90° 층이 많을수록 감쇠가 많아 m 이 증가할수록 감쇠량이 감소하지만 두꺼운 적층판의

경우에는 횡전단변형이 많아 $m = 4/6$ 에서 비감쇠용량이 최대치가 됨을 알 수 있다. 또한 얇은 판보다 두꺼운 판일 때 $N = 4$ 와 $N = 2$ 사이에서 오차가 크게 발생하고 있어 두꺼운 판일수록 층별로 면내변위가 변형할 수 있는 이론(여기서는 $N = 4$)을 사용하여야 한다.

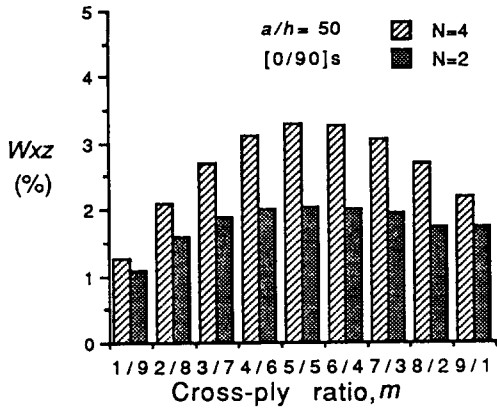


Fig.6 Transverse shear strain energy of thin $[0/90]_s$ plate with $a/h = 50$.

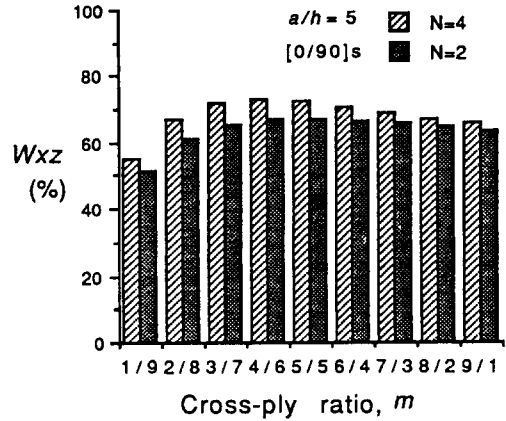
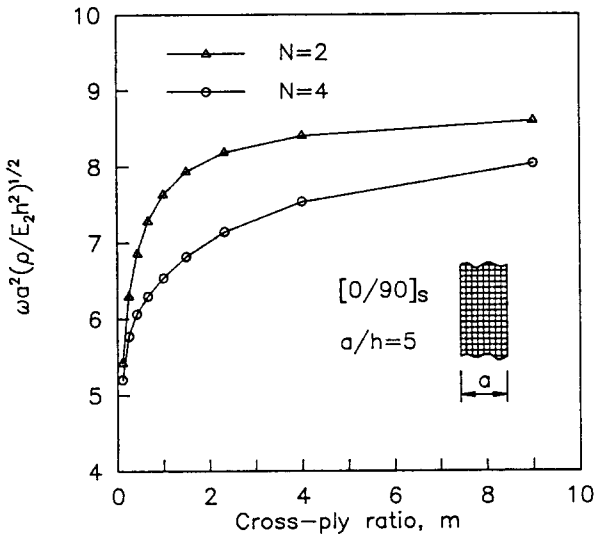
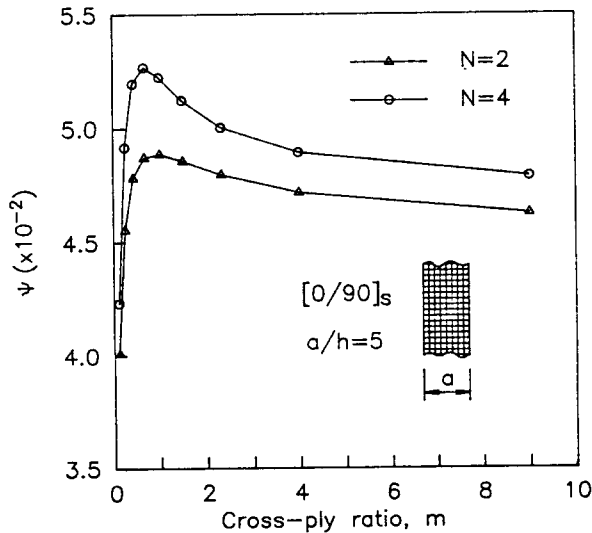


Fig.8 Transverse shear strain energy of thick $[0/90]_s$ plate with $a/h = 50$.



(a) Fundamental frequency



(b) Specific damping capacity

Fig.7 Effect of cross-ply ratio on fundamental frequency and specific damping capacity for $[0/90]_s$ plate : $a/h = 5$.

4. 결 론

본 연구에서는 복합적층판의 동적문제에 대해 면내 변위의 변화를 고려하여 유한요소 수식화를 수행하였으며, cross-ply적층판이 원통형 휨으로 변형할 때 진동 및 감쇠해석을 수행한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 두께방향으로의 면내변위의 변화는 고유진동수에는 큰 영향을 미치지 않으나, 감쇠에는 큰 영향을 미친다. 이는 고유진동수는 전체적인 거동인데 반해 감쇠는 국부적인 거동이기 때문이다.

(2) 판의 두께가 두꺼워질수록 각층의 면내변형효과는 증가하며, cross-ply비가 작으면 그효과는 매우 작아진다.

(3) 얇은 판의 경우에는 90° 층의 휨변형이 크기 때문에 cross-ply비가 증가할수록 감쇠량이 작아지며, 두꺼운 판에서는 90° 층의 휨변형보다 전단변형이 크기 때문에 감쇠량이 최대치가 되는 cross-ply비가 존재한다. 따라서, 복합적층판의 감쇠해석을 위해서는 각 층의 면내변형을 고려하는 것이 필수적이다.

참 고 문 헌

(1) Basset, A. B., 1890, "On the Extension and Flexure of Cylindrical and Spherical thin Elastic Shells", Phil Trans. Royal Soc. (Lond), ser. A,

Vol. 18, No. 6, pp.433~480.

(2) Pagano, N. J., 1969, "Exact Solutions for Composite Laminates in Cylindrical Bending", J. Compo. Mat., Vol. 3, pp.398~411.

(3) Pagano, N. J., 1970, "Exact Solutions for Rectangular Bidirectional Composites and Sandwich Plates", J. Compo. Mat., Vol. 4, pp.20~34.

(4) Toledano, A. and Murakami, H., 1987, "A Composite Plate Theory for Arbitrary Laminate Configurations", J Appl. Mech., Vol. 54, pp.181~189.

(5) Reddy, J. N., Barbero, E. J., and Teply, J. L., 1989, "A Plate Bending Element Based on a Generalized Laminated Plate Theory", Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 28, pp.2275~2292.

(6) Noor, A. K., 1973, "Free Vibrations of Multilayered Composite Plates", AIAA J., Vol.11, No. 7, pp.1038~1039.

(7) Owen, D. R. J. and Li, Z. H., 1987, "A Refined Analysis of Laminated Plates by Finite Element Displacement Methode-II. Vibration and Stability", Comput. Struct., Vol. 26, No. 6, pp.915

~923.

(8) Cho, K. N., Bert, C. W., and Striz, A. G., 1991, "Free Vibrations of Laminated Rectangular Plates Analyzed by Higher Order Individual-Layer Theory", J. Sound Vib., Vol. 145, No. 3, pp. 429~442.

(9) Lin, D.X., Ni, R. G., and Adams, R. D., 1984, "Prediction and Measurement of the Vibrational Damping Parameters of Carbon and Glass Fiber-Reinforced Plastics Plates", J. Compo. Mat., Vol., 18, pp.132~152.

(10) Koo, K. K. and Lee, I., 1991, "Finite Element Analysis of Vibration and Damping for Symmetric Composite Laminates", Proc. of ICCM VIII, SAMPE, pp.34-c-1~34-c-10.

(11) Hwang, S. J., Gibson, R. F., and Singh, J., 1992, "Decomposition of Coupling Effects on Damping of Laminated Composite under Flexural Vibration", Compo. Sci. Tech., Vol. 43, pp.159~169.

(12) Whitney, J. M., 1987, Structural Analysis of Laminated Anisotropic Plates, Technomic Publishing Co., pp.280~281.