

〈論 文〉

회전축계의 진동해석을 위한 Hybrid법에 관한 연구

A Hybrid Method for Vibration Analysis of Rotor Systems

양 보 석* · 최 원 호**

B. S. Yang and W. H. Choi

(1992년 7월 8일 접수; 1992년 10월 15일 심사완료)

ABSTRACT

The simplest method which has been used extensively for vibration analysis is the transfer matrix method introduced by Myklestad and was later extended by many researchers. The crude approximation results in considerable error on the predicted natural frequencies and to increase the accuracy the number of elements used in the analysis must be increased. In addition, numerical instability can occur as a result of matrix multiplication. Also the main disadvantage of the finite element method is the large computer memory requirements for complex systems. The new method proposed in this paper combines the transfer matrix and finite dynamic element techniques to form a powerful algorithm for vibration analysis of rotor system. It is shown that the accuracy improves significantly when the transfer matrix for each segment is obtained from finite dynamic element techniques.

1. 서 론

기계구조물의 진동해석에는 전달 행렬법(transfer matrix method)과 유한요소법(finite element method)이 널리 사용되고 있다. 특히 전달행렬법은 Myklestad⁽¹⁾에 의해 소개된 이래로 Prohl⁽²⁾, Lund⁽³⁾ 등에 의해 회전축계의 진동해석에 확장 및 수정되어져 왔다. 이 방법에서는 축요소를 여러개의 질량이 없는 탄성축요소로 분리하고, 질량은 각 요소의 양단에 표시한다. 이러한 근사로 인해 실제 고유진동수에 오차를 발생시키게 되고, 계산정도를 증가시키기 위해 사용되는 요소수를 증가시켜야만 한다. 또한 수치

적 불안정(numerical instability)이 행렬의 곱산의 결과로 발생할 수 있음이 오래전부터 알려져 왔고, 이를 피하기 위해 Frontal 전달행렬법⁽⁴⁾, Riccati 전달행렬법⁽⁵⁾ 등의 수정방법이 제안되어 왔다. 그러나 이들 방법도 정식화(formulation)의 복잡함 때문에 그다지 사용되고 있지 않다.

한편 유한요소법은 분포 축요소로부터 유도된 요소질량 및 강성행렬을 기초로 경계조건과 적합성(compatibility)을 이용하여 계전체의 질량 및 강성행렬을 구성하고 있다. 이 방법은 종래의 전달행렬법에 비해 계산정도가 향상됨을 보고하고 있으나⁽⁶⁾ 복잡한 계의 경우 방대한 계산기억용량을 필요로 하는 점과, 요소양단의 절점에 정적인 전단력과 모멘트가 가하여 진다고 가정하여 구한 정적형상함수(static shape function)를 이용하여 요소행렬을 유도함으로써

* 정희원, 부산수산대학교 공대 기계공학과

** 정희원, 부산수산대학교 대학원

발생하는 오차 등이 주단점으로 열거된다. 저자는 이 오차를 감소시키는 방법으로 진동수중속의 형상함수를 이용하여 진동수중속의 유한요소행렬, 즉 동적유한요소행렬을 유도하고 회전축계의 비틀림진동⁽⁷⁾과 굽힘진동⁽⁸⁾에 적용하여 계산정도를 크게 향상시킬 수 있음을 보고하였다.

따라서 본 논문에서는 이 두가지 방법의 장점을 결합시킨 유한동적요소 및 전달행렬법의 혼합법(hybrid method)을 제안한다. 고유진동수와 모드계산을 위한 컴퓨터프로그램을 작성하였으며 단순외팔보와 양단 단순지지 회전축을 이용하여 엄밀해, 기존의 유한요소행렬 및 본 방법에서 구한 고유진동수에 대한 계산오차를 구하여, 본 방법의 유용성을 확인하였다.

2. 동적유한요소법(Finite Dynamic Element Method)

종래 회전체의 진동해석은 변위법의 응용으로 Ruhl⁽⁹⁾, Nelson과 McVaugh⁽¹⁰⁾ 등에 의해 주로 연구가 이루어졌다. 이들은 정적변위로 가정한 형상함수를 이용하여 유한요소행렬을 유도하였다. 그러므로 일반적인 동적문제의 경우, 형상함수가 기하학적 영역만에 의해 명확히 설명될 수 없으며 절점변위(nodal displacement)의 시각력(time history)의 함수로 표현되어야 한다. 조화운동의 경우, 형상함수는 아래와 같이 축방향의 무차원좌표($\eta = x/\ell$)에 의해 진동수의 급수로 표현될 수 있다.

$$[N(\eta, \omega)] = [N_0(\eta)] + \omega[N_1(\eta)] + \omega^2[N_2(\eta)] + \dots \quad (1)$$

회전축계의 굽힘진동의 경우에 적용하면, 횡변위의 형상함수행렬은

$$[N_b(\eta, \omega)] = [N_{b0}(\eta)] + \omega[N_{b1}(\eta)] + \omega^2[N_{b2}(\eta)] + \dots \\ = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \\ 0 & N_1 & -N_2 & 0 & 0 & N_3 & N_4 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

또 각 변위를 위한 회전형상함수행렬은

$$[N_r(\eta, \omega)] = [N_{r0}(\eta)] + \omega[N_{r1}(\eta)] + \omega^2[N_{r2}(\eta)] + \dots$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -N_1' & N_2' & 0 & 0 & -N_3' & N_4' & 0 \\ N_1' & 0 & 0 & N_2' & N_3' & 0 & 0 & N_4' \end{bmatrix} \quad (3)$$

여기서 '는 η 에 대한 미분을 나타내며, 식 (2)와 (3)은 부록에 나타내었다.

비틀림진동의 경우는

$$[N_t(\eta, \omega)] = [N_{t0}(\eta)] + \omega^2[N_{t2}(\eta)] + \dots \quad (4)$$

여기서 $[N_{t0}(\eta)] = \{1 - \eta, \eta\}$,

$$[N_{t2}(\eta)] = \frac{\rho I_p^2}{6G} \{2\eta - 3\eta^2 + \eta^3\} (\eta - \eta^3)$$

그리고 종진동(axial vibration)의 경우는 식 (4)에서 G 대신에 E 를 대입한 형이다.

2.1 요소질량행렬

굽힘진동의 경우 요소병진(translation)과 회전(rotation)질량행렬은

$$[M_b] = \int_0^1 m [N_b]^T [N_b] ds \\ = [M_{b0}] + \omega[M_{b1}] + \omega^2[M_{b2}] + \dots \quad (5)$$

$$[M_r] = \int_0^1 I_d [N_r]^T [N_r] ds \\ = [M_{r0}] + \omega[M_{r1}] + \omega^2[M_{r2}] + \dots \quad (6)$$

비틀림진동의 경우

$$[M_t] = \int_0^1 \rho I_p [N_t]^T [N_t] ds \\ = [M_{t0}] + \omega^2[M_{t2}] + \dots \quad (7)$$

여기서

$$[M_{t0}] = \frac{\rho I_p \ell}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ [M_{t2}] = \frac{2\rho^2 I_p^3 \ell^3}{45G} \begin{bmatrix} 1 & 7/8 \\ 7/8 & 2 \end{bmatrix}$$

종진동의 경우도 비틀림진동의 행렬과 유사한 형은

로 G 와 I_p 대신에 E 와 A 를 대입한 형으로 된다⁽¹¹⁾.

2.2 요소강성행렬

축요소의 탄성굽힘에 의한 강성행렬은

$$\begin{aligned} [K_b] &= \int_0^1 EI[N_b]{}^T [N_b] ds \\ &= [K_{b0}] + \omega^2[K_{b2}] + \omega^4[K_{b3}] + \dots \end{aligned} \quad (8)$$

축요소의 비틀림에 의한 강성행렬은

$$\begin{aligned} [K_t] &= \int_0^1 GI_p[N_t]{}^T [N_t] ds \\ &= [K_{t0}] + \omega^4[K_{t4}] + \dots \end{aligned} \quad (9)$$

여기서

$$\begin{aligned} [K_{t0}] &= \frac{GI_p}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ [K_{t4}] &= \frac{\rho^2 I_p^3}{45G} \begin{bmatrix} 1 & 7/8 \\ 7/8 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2.3 요소자이로스코픽행렬

회전체의 회전과 각변위 사이의 자이로스코픽연성에 따른 요소자이로스코픽 행렬은

$$\begin{aligned} [G] &= \int_0^1 I_p \{N_r\}{}^T \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \{N_r\} ds \\ &= [G_0] + \omega[G_1] + \omega^3[G_2] + \dots \end{aligned} \quad (10)$$

위 식들에서 $[M_{b0}]$, $[M_{t0}]$, $[K_{b0}]$ 등의 첨자 0의 행렬들은 각각 종래의 정적 형상함수를 이용하여 구한 유한요소행렬과 일치한다.

2.4 요소의 운동방정식

Lagrange의 식을 적용하면, 회전체요소의 운동방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} [M]\{\ddot{q}\} + ([C] - \Omega[G])\{\dot{q}\} \\ + [K]\{q\} = \{Q\} \end{aligned} \quad (11)$$

이 식에서 Ω 는 회전각속도이며, 각 요소행렬은 위

에서 유도하였듯이 주파수종속행렬로 표시된다.

3. Hybrid법

조화여진의 경우, 식 (11)은 다음과 같이 표현된다.

$$[S] \{q_0\} = \{Q_0\} \quad (12)$$

여기서 $[S]$ 는 동강성행렬(dynamic stiffness matrix)로 굽힘진동의 경우 다음과 같다.

$$\begin{aligned} [S] &= [K] + i\omega([C] - \Omega[G]) - \omega^2[M] \\ &= [K_0] + i\omega([C_0] - \Omega[G_0]) - \omega^2([M_0] \\ &\quad - \Omega[G_1]) - \omega^4([M_2] - \Omega[G_2] \\ &\quad - [K_4]) \dots \end{aligned} \quad (13)$$

i 차 요소에 대한 동강성방정식을 전개하면

$$\begin{bmatrix} S_{ll} & S_{lr} \\ S_{rl} & S_{rr} \end{bmatrix}^i \begin{Bmatrix} q_l \\ q_r \end{Bmatrix}^i = \begin{Bmatrix} Q_l \\ Q_r \end{Bmatrix}^i \quad (14)$$

여기서 하첨자 l 과 r 은 각각 요소의 좌단과 우단을 나타낸다. 식 (14)를 조작하여 다시 정렬하면

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -S_{lr}S_{ll} & S_{lr}^{-1} \\ -S_{rl} + S_{rr}S_{ll}^{-1}S_{ll} & -S_{rr}S_{lr}^{-1} \end{bmatrix}^i \begin{Bmatrix} q_l \\ Q_l \end{Bmatrix}^i \\ = \begin{Bmatrix} q_r \\ Q_r \end{Bmatrix}^i \end{aligned} \quad (15)$$

또는 간단히

$$[T]^i \{x\}_l^i = \{x\}_r^i \quad (16)$$

즉 식 (16)의 $[T]^i$ 는 동적유한요소행렬에 기초한 i 번째 요소의 전달행렬을 나타내게 된다. 평형 및 연속의 조건을 이용하면 n 번째 요소의 좌단과 첫 요소의 우단사이의 상태벡터는 각 요소의 전달행렬을 연속적으로 곱함으로써 구할 수 있다⁽¹²⁾.

$$\begin{aligned} \{x\}_r^n &= [T]^n \cdot [T]^{n-1} \dots [T]^1 \cdot \{x\}_l^1 \\ &= [T] \{x\}_l^1 \end{aligned} \quad (17)$$

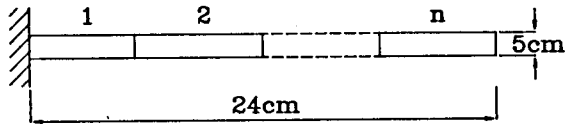
$$\text{단 } [T] = [T]^n \cdot [T]^{n-1} \dots [T]^1$$

만일 축계내에 원판이나 집중질량 또는 집중스프링 및 감쇠요소가 부착되는 경우는, 그 절점에서 격점전달행렬(point transfer matrix)⁽¹²⁾을 포함시켜야 한다.

4. 수치계산예

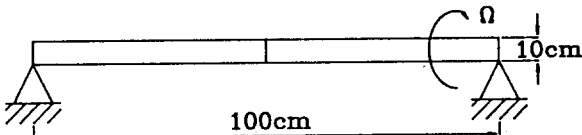
본 방법의 유용성과 계산정도를 검증하기 위해 Fig. 1의 몇가지 계산예를 들어 계산결과를 검토한다. 단, 본 계산예에서는 엄밀해와의 비교를 위해 엄밀해가 얻어지는 단순형상에 한정하였으나, 복잡한 실제계에도 충분히 적용할 수 있다. 여기서 종래의 유한요소모델에 기초한 hybrid법과 동적유한요소모델의 고유진동수계산결과를 비교하기 위해 아래와 같이 정의된 퍼센트오차를 사용한다.

$$\text{Percentage error} = \frac{|\omega_{ex,i} - \omega_i|}{\omega_{ex,i}} \times 100(\%)$$



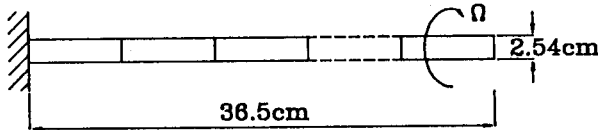
$n = 2, 3, \dots, 10$

a) Cantilever beam



$n = 2$

b) Simply supported shaft



$n = 1, 2, \dots, 10$

c) Overhung shaft

Fig.1 Computational model

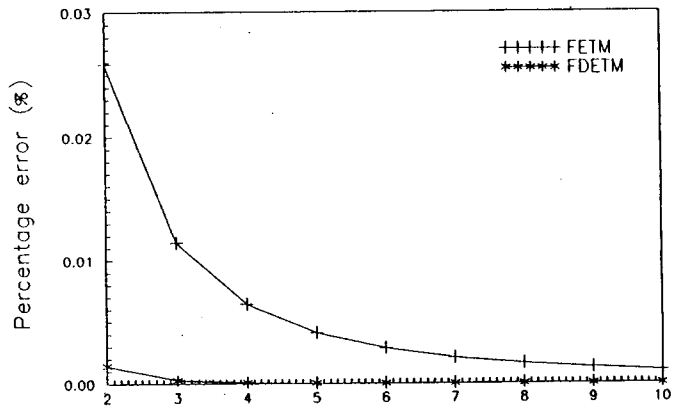
- (a) Cantilever beam
- (b) Simply supported shaft
- (c) Overhung shaft

여기서 $(\omega_{ex})_i$ 는 각 차수에 대응하는 엄밀한 고유진동수이고, ω_i 는 이에 대응하는 본 방법으로 계산된 값이다.

4.1 일정단면 외팔보의 비틀림 고유진동수

길이 24cm, 직경 5cm에 $G=1.1538 \times 10^7 \text{ N/cm}^2$, $\rho=0.724637 \times 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$ 의 재료정수를 갖는 외팔보(Fig. 1-a)의 비틀림 고유진동수를 계산하였다. Fig. 2는 1차 및 2차 고유진동수에 대한 요소분할수의 변화에 따른 퍼센트오차를 나타낸다. 종래의 유한요소모델을 이용한 결과(FETM)와 동적유한요소모

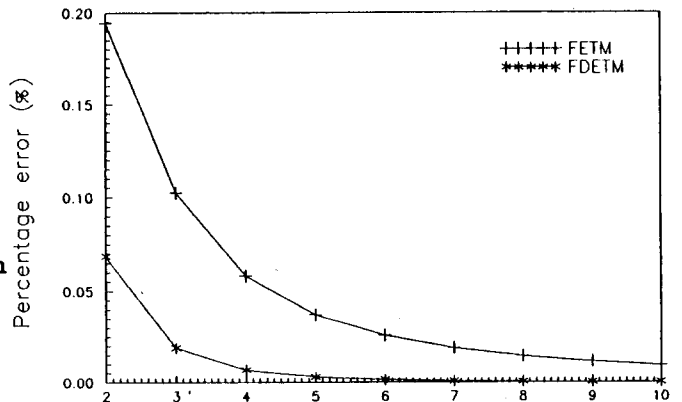
1 st mode



Number of elements

(a) 1st mode

2 nd mode



Number of elements

(b) 2nd mode

Fig.2 Convergence characteristics of natural frequencies as a function of the number of elements

델을 이용한 결과(FDETM)에 보듯이 동적유한요소 모델을 이용한 hybrid방법이 계산정도(accuracy)가 매우 뛰어나고 적은 요소수에 의해서 적절한 계산효율과 정도를 얻을 수 있음을 알 수 있다.

4.2 양단 단순지지 회전축의 굽힘 고유진동수

Fig. 3은 양단 단순지지된 직경 10cm, 길이 100cm의 회전축(Fig. 1-b)의 굽힘 고유진동수의 계산결과이다. 본 계산에서는 $E = 2.1 \times 10^7 \text{ N/cm}^2$, $\rho = 0.785 \times 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$ 을 이용하였다. 이 회전축은 자이로스코픽의 영향으로 전향(forward) 및 후향회돌림(backward whirl)의 고유진동수가 각각 발생한다. Fig. 3(a)는 1차모드의 전향 및 후향회돌림 고유진동수의 퍼센트오차를 유한요소모델과 동적유한요소

소모델에 대해 나타내고 있고, 회전축의 경우도 동적유한요소모델(FDETM)의 계산오차가 유한요소모델의 경우의 약 14%이하로 매우 낮다. 전향과 후향회돌림 고유진동수의 퍼센트오차는 거의 같고, 이 경향은 고차모드에서도 동일하다. Fig. 3(b)는 2차모드의 전향회돌림 고유진동수에 대한 결과를 나타내고 있다.

4.3 일정단면 Overhung 회전축의 굽힘 고유진동수

Fig. 4는 길이 36.5cm, 직경 2.54cm의 일정단면 overhung 회전축(Fig. 1-c)의 굽힘진동수에 대한 결과를 요소수의 변화에 따라 나타낸 것이다. 본 계산

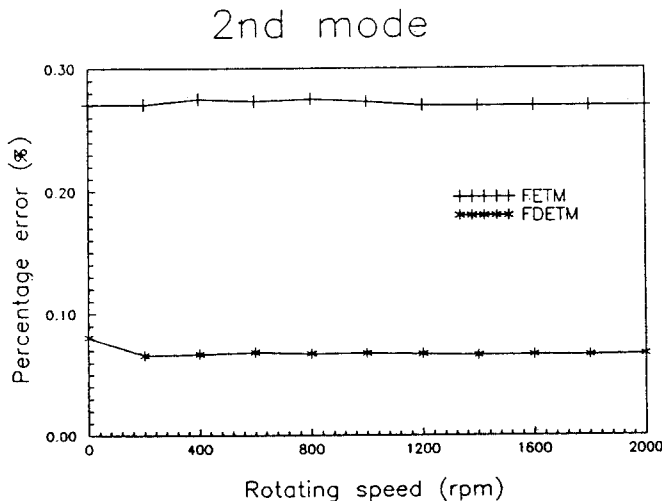
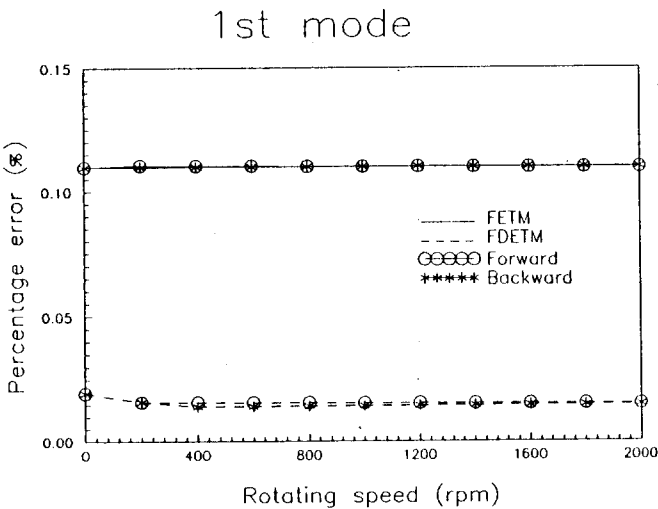


Fig.3 Convergence characteristics of natural frequencies for simply supported uniform shaft

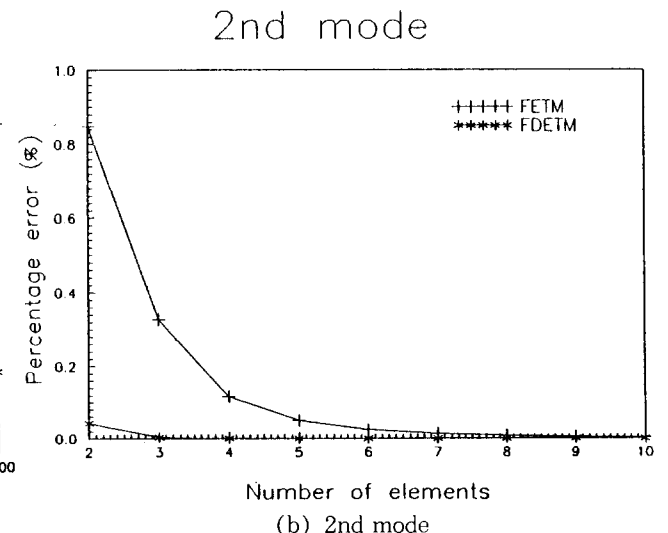
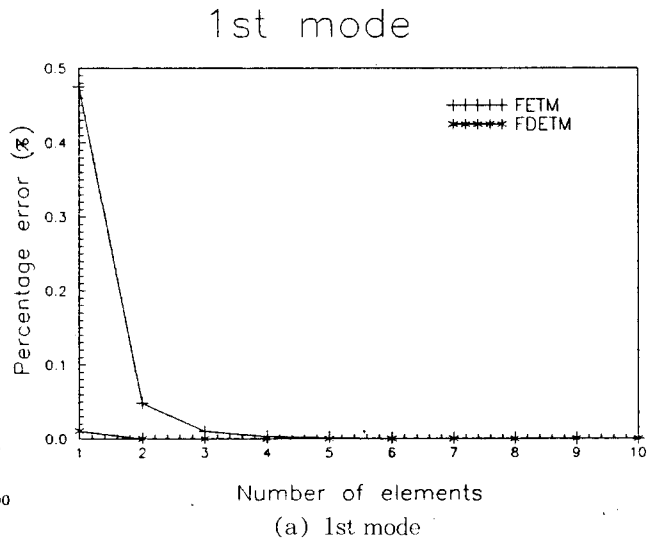


Fig.4 Convergence characteristics of natural frequencies for overhung shaft

에는 $E=2.0684 \times 10^7$ N/cm², $\rho=0.7757 \times 10^{-3}$ kg/cm³, $N=2000$ rpm을 이용하였다. 그림에서 알 수 있듯이 동적유한요소모델을 이용한 hybrid 방법이 수렴특성이 탁월함을 알 수 있으며, 작은 요소수들 고유진동수해석에 이용하여도 충분히 정도높게 고유진동수를 예측할 수 있음을 보여주고 있다.

5. 결 론

유한요소모델과 전달행렬법을 기초로한 합성법 (hybrid method)을 제안하였다. 종래의 정적형상합수에 기초한 유한요소모델과 진동수종속행렬로 동적특성을 고려한 동적유한요소모델에 대해 본 방법을 적용하여, 이 두 방법에서의 고유진동수 수렴특성을 3가지 예를 들어 나타내었다. 종래 복잡한 회전축계의 모델링에 유한요소법을 이용하는 경우, 계산기의 기억용량이 비약적으로 증대하는 단점이 있고, 한편 전달행렬은 계산이 간편한 반면 수치적 불안정과 계산오차 등의 이유로 저차 진동모드의 계산에만 사용되었다. 본 방법은 두가지 방법에서 이러한 각각의 단점을 극복하고, 보다 높은 계산정도와 낮은 계산기의 기억용량으로 회전축계의 고유진동수를 예측할 수 있다. 그리고 본 방법은 지지베어링에 의한 감쇠 및 강성특성을 쉽게 모델링 할 수 있으며, 안정성과 불평형응답해석에도 확장될 수 있다. 추후 실제 복잡한 축계에 대해 모델링하여 계산효율 및 수렴정도를 계산할 예정이다.

참 고 문 헌

(1) Myklestad, N. O., 1944, "A New Method of Calculating Natural Modes of Uncoupled Bending Vibration of Airplane Wings and Other Types of Beams", J. of Aero. Sci., pp.153~162.
 (2) Prohl, M. A., 1945, "A General Method for Calculating Critical Speeds of Flexible Rotors", J. Appl. Mech., Vol. 12, pp.A142~A148.
 (3) Lund, J. W., 1974, "Modal Response of a Flexible Rotor in Fluid-Film Bearing", Trans. ASME, J. of Eng. Ind., pp.525~533.
 (4) Okada, Y. et al., 1985, "The Frontal Transfer Matrix Method as an Efficient Approach to Reanalysis", Trans. of JSME, Vol. 51, No. 469C,

pp.2276~2281.

(5) Horner, G. C. and Pilkey, W. D., 1978, "The Riccati Transfer Matrix Method", J. of Mechanical Design, Vol. 1, No. 2, pp.287~302.
 (6) Firoozian, R. and Stanway, R., 1989, "Design and Application of a Finite Element Package for Modelling Turbomachinery Vibrations", J. of Sound and Vibration, Vol. 134, No. 1 pp.115~139.
 (7) 양보석, 여운동, 1990, "동적유한요소법에 의한 보의 비틀림 자유진동해석", 한국박용기관학회지, 제14권, 제4호, pp.67~71.
 (8) Yang, B. S., Pilkey, W. D. and Fergusson, N. J., 1992, "Frequency-Dependent Element Matrices for Rotor Dynamics Analysis", J. of Sound and Vibration, Vol. 58, No. 2.
 (9) Ruhl, R. L. and Booker, J. F., 1972, "A Finite Element Model for Distributed Parameter Turborotor Systems", Trans. ASME, J. of Eng. for Ind., pp.126~132.
 (10) Nelson, H. D. and McVaugh, J. M., 1976, "The Dynamics of Rotor-Bearing Systems Using Finite Elements", Trans. ASME, J. of Eng. for Ind., Vol.98, pp.593~600.
 (11) Yang, B. S. and Pilkey, W. D., 1991, "Accurate Free Vibration Analysis for Rotating Shaft", 13th ASME Conf. on Mech. Vibration and Noise, Miami.
 (12) Pestel, E. C. and Leckie, F. A., 1963, "Matrix Methods in Elastomechanics", McGraw-Hill.

부 록

1. Translational Shape Function

$$N_b(\eta, \omega) = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \\ 0 & N_1 & -N_2 & 0 & 0 & N_3 & N_4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{where } N_i = N_{0i} + \omega N_{1i} + \omega^2 N_{2i} + \omega^3 N_{3i} + \dots; i = 1, 2, 3, 4$$

$$N_{01} = 1 - 3\eta^2 + 2\eta^3, \quad N_{02} = (\eta - 2\eta^2 + \eta^3) \ell$$

$$N_{03} = 3\eta^2 - 2\eta^3, \quad N_{04} = (-\eta^2 + \eta^3) \ell$$

$$N_{11} = \alpha_1(-3\eta^2 + 12\eta^3 - 15\eta^4 + 6\eta^5)$$

$$N_{12} = \alpha_1 \ell (-4\eta^2 + 11\eta^3 - 15\eta^4 + 3\eta^5)$$

$$N_{13} = \alpha_1(3\eta^2 - 12\eta^3 + 15\eta^4 - 6\eta^5)$$

$$\begin{aligned}
 N_{14} &= \alpha_{11}\ell(\eta^2 + \eta^3 - 5\eta^4 - 3\eta^5) \\
 N_{21} &= \alpha_{21}(66\eta^2 - 156\eta^3 + 105\eta^4 - 21\eta^6 + 6\eta^7) \\
 &\quad + \alpha_{22}(3\eta^2 - 12\eta^3 + 15\eta^4 - 6\eta^5) \\
 &\quad + \alpha_{23}(9\eta^2 - 6\eta^3 - 105\eta^4 + 252\eta^5 \\
 &\quad - 210\eta^6 + 60\eta^7) \\
 N_{22} &= \alpha_{21}\ell(12\eta^2 - 22\eta^3 + 21\eta^5 - 14\eta^6 + 3\eta^7) \\
 &\quad + \alpha_{22}\ell(4\eta^2 - 11\eta^3 + 10\eta^4 - 3\eta^5) \\
 &\quad + \alpha_{23}\ell(22\eta^2 - 3\eta^3 - 140\eta^4 + 231\eta^5 \\
 &\quad - 140\eta^6 + 30\eta^7) \\
 N_{23} &= \alpha_{21}(39\eta^2 - 54\eta^3 + 21\eta^6 - 6\eta^7) \\
 &\quad + \alpha_{22}(-3\eta^2 + 12\eta^3 - 15\eta^4 + 6\eta^5) \\
 &\quad + \alpha_{23}(-9\eta^2 + 6\eta^3 + 105\eta^4 - 252\eta^5 \\
 &\quad + 210\eta^6 - 60\eta^7) \\
 N_{24} &= \alpha_{21}\ell(-9\eta^2 + 13\eta^3 - 7\eta^6 + 3\eta^7) \\
 &\quad + \alpha_{22}\ell(-\eta^2 - \eta^3 + 5\eta^4 - 3\eta^5) \\
 N_{31} &= \alpha_{31}(-240\eta^2 + 32\eta^3 + 1320\eta^4 - 1872\eta^5 \\
 &\quad + 756\eta^6 + 144\eta^7 - 180\eta^8 + 40\eta^9) \\
 &\quad - \alpha_{32}(9\eta^2 - 6\eta^3 - 105\eta^4 \\
 &\quad + 252\eta^5 - 210\eta^6 + 60\eta^7) \\
 &\quad + \alpha_{33}(-6\eta^2 + 4\eta^3 + 45\eta^4 - 18\eta^5 \\
 &\quad - 210\eta^6 + 360\eta^7 - 225\eta^8 + 50\eta^9) \\
 N_{32} &= \alpha_{31}\ell(-96\eta^2 + 80\eta^3 + 240\eta^4 - 264\eta^5 \\
 &\quad - 112\eta^6 + 252\eta^7 - 120\eta^8 + 20\eta^9) \\
 &\quad + \alpha_{32}\ell(22\eta^2 - 3\eta^3 - 140\eta^4 + 231\eta^5 \\
 &\quad - 140\eta^6 + 30\eta^7) \\
 &\quad + \alpha_{33}\ell(-28\eta^2 + 2\eta^3 + 110\eta^4 \\
 &\quad - 9\eta^5 - 280\eta^6 + 330\eta^7 - 150\eta^8 + 25\eta^9) \\
 N_{33} &= \alpha_{31}(-180\eta^2 - 32\eta^3 + 780\eta^4 - 648\eta^5 \\
 &\quad + 84\eta^6 - 144\eta^7 + 180\eta^8 - 40\eta^9) \\
 &\quad + \alpha_{32}(-9\eta^2 + 6\eta^3 + 105\eta^4 \\
 &\quad - 252\eta^5 + 210\eta^6 - 60\eta^7) \\
 &\quad + \alpha_{33}(6\eta^2 - 4\eta^3 - 45\eta^4 + 18\eta^5 \\
 &\quad + 210\eta^6 - 360\eta^7 + 225\eta^8 - 50\eta^9) \\
 N_{34} &= \alpha_{31}\ell(84\eta^2 - 60\eta^3 - 180\eta^4 + 156\eta^5 \\
 &\quad + 28\eta^6 + 12\eta^7 - 60\eta^8 + 20\eta^9) \\
 &\quad + \alpha_{32}\ell(-13\eta^2 - 3\eta^3 + 35\eta^4 + 21\eta^5 \\
 &\quad - 70\eta^6 + 30\eta^7) \\
 &\quad + \alpha_{33}\ell(22\eta^2 + 3\eta^3 - 65\eta^4 \\
 &\quad - 9\eta^5 + 70\eta^6 + 30\eta^7 - 75\eta^8 + 25\eta^9) \\
 \alpha_{11} &= \frac{\rho I \ell^2}{30EI} \Omega, \quad \alpha_{21} = \frac{\rho A \ell^4}{2520EI}, \quad \alpha_{22} = \frac{\rho I \ell^2}{60EI} \\
 \alpha_{23} &= \frac{(\rho I \Omega)^2 \ell^4}{6300(EI)^2}, \quad \alpha_{31} = \frac{(\rho A \ell)^2 \Omega \ell^6}{302400(EI)^2} \left(\frac{r}{\ell}\right)^2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_{32} &= \frac{(\rho A \ell)^2 \Omega \ell^6}{6300(EI)^2} \left(\frac{r}{\ell}\right)^4 \\
 \alpha_{33} &= \frac{(\rho A \ell)^3 \Omega^3 \ell^9}{189000(EI)^3} \left(\frac{r}{\ell}\right)^6
 \end{aligned}$$

2. Rotational Shape Function

$$N_i(\eta, \omega) = \begin{bmatrix} 0 & -N'_1 & N'_2 & 0 & 0 & -N'_3 & N'_4 & 0 \\ N'_1 & 0 & 0 & N'_2 & N'_3 & 0 & 0 & N'_4 \end{bmatrix}$$

where $N'_i = \bar{N}_{0i} + \omega \bar{N}_{1i} + \omega^2 \bar{N}_{2i} + \dots$

$$i = 1, 2, 3, 4$$

$$\begin{aligned}
 \bar{N}_{01} &= -(6\eta - 6\eta^2)/\ell, \quad \bar{N}_{02} = 1 - 4\eta + 3\eta^2 \\
 \bar{N}_{03} &= (6\eta - 6\eta^2)/\ell, \quad \bar{N}_{04} = -2\eta + 3\eta^2 \\
 \bar{N}_{11} &= \alpha_1(-6\eta + 36\eta^2 - 60\eta^3 + 30\eta^4)/\ell \\
 \bar{N}_{12} &= \alpha_1(-8\eta + 33\eta^2 - 40\eta^3 + 15\eta^4) \\
 \bar{N}_{13} &= \alpha_1(6\eta - 36\eta^2 + 60\eta^3 - 30\eta^4)/\ell \\
 \bar{N}_{14} &= \alpha_1(2\eta + 3\eta^2 - 20\eta^3 + 15\eta^4) \\
 \bar{N}_{21} &= \alpha_{21}(132\eta - 468\eta^2 + 420\eta^3 - 126\eta^5 + 42\eta^6) \\
 &\quad / \ell + \alpha_{22}(6\eta - 36\eta^2 + 60\eta^3 - 30\eta^4)/\ell \\
 &\quad + \alpha_{23}(18\eta - 18\eta^2 - 420\eta^3 + 1260\eta^4 \\
 &\quad - 1260\eta^5 + 420\eta^6)/\ell \\
 \bar{N}_{22} &= \alpha_{21}(24\eta - 66\eta^2 + 105\eta^4 - 84\eta^5 + 21\eta^6) \\
 &\quad + \alpha_{22}(8\eta - 33\eta^2 + 40\eta^3 - 15\eta^4) \\
 &\quad + \alpha_{23}(44\eta - 9\eta^2 - 560\eta^3 + 1150\eta^4 \\
 &\quad - 840\eta^5 + 210\eta^6) \\
 \bar{N}_{23} &= \alpha_{21}(78\eta - 162\eta^2 + 126\eta^5 - 42\eta^6)/\ell \\
 &\quad + \alpha_{22}(-6\eta + 36\eta^2 - 60\eta^3 + 30\eta^4)/\ell \\
 &\quad + \alpha_{23}(-18\eta + 18\eta^2 + 420\eta^3 - 1260\eta^4 \\
 &\quad + 1260\eta^5 - 420\eta^6)/\ell \\
 \bar{N}_{24} &= \alpha_{21}(-18\eta + 39\eta^2 - 42\eta^5 + 21\eta^6) \\
 &\quad + \alpha_{22}(-2\eta - 3\eta^2 + 20\eta^3 - 15\eta^4) \\
 &\quad + \alpha_{23}(-26\eta - 9\eta^2 + 140\eta^3 + 105\eta^4 \\
 &\quad - 420\eta^5 + 210\eta^6) \\
 \bar{N}_{31} &= 4\alpha_{31}(-120\eta + 24\eta^2 + 1320\eta^3 - 2340\eta^4 \\
 &\quad + 1134\eta^5 + 252\eta^6 - 360\eta^7 + 90\eta^8)/\ell \\
 &\quad + \alpha_{32}(18\eta - 18\eta^2 - 420\eta^3 + 1260\eta^4 \\
 &\quad - 1260\eta^5 + 420\eta^6)/\ell \\
 &\quad + \alpha_{33}(-12\eta + 12\eta^2 + 180\eta^3 - 90\eta^4 \\
 &\quad - 1260\eta^5 + 2520\eta^6 - 1800\eta^7 + 450\eta^8)/\ell \\
 \bar{N}_{32} &= 4\alpha_{31}(-48\eta + 60\eta^2 + 240\eta^3 - 330\eta^4 \\
 &\quad - 168\eta^5 + 441\eta^6 - 240\eta^7 + 45\eta^8) \\
 &\quad + \alpha_{32}(44\eta - 9\eta^2 - 560\eta^3 + 1155\eta^4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -840\eta^5 + 210\eta^6) + \alpha_{33}(-56\eta \\
& + 6\eta^2 + 440\eta^3 - 45\eta^4 - 1680\eta^5 \\
& + 2310\eta^6 - 1200\eta^7 + 225\eta^8) \\
\bar{N}_{33} = & 4\alpha_{31}(-90\eta - 24\eta^2 + 780\eta^3 - 810\eta^4 \\
& + 126\eta^5 - 252\eta^6 + 360\eta^7 - 90\eta^8)/\ell \\
& + \alpha_{32}(-18\eta + 18\eta^2 + 420\eta^3 - 1260\eta^4 \\
& + 1260\eta^5 - 420\eta^6)/\ell \\
& + \alpha_{33}(12\eta - 12\eta^2 - 180\eta^3 \\
& + 90\eta^4 + 1260\eta^5 - 2520\eta^6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 1800\eta^7 - 450\eta^8)/\ell \\
\bar{N}_{34} = & 4\alpha_{31}(42\eta - 45\eta^2 - 180\eta^3 + 195\eta^4 \\
& + 42\eta^5 + 21\eta^6 - 120\eta^7 + 45\eta^8) \\
& + \alpha_{32}(-26\eta - 9\eta^2 + 140\eta^3 \\
& + 105\eta^4 - 420\eta^5 + 210\eta^6) \\
& + \alpha_{33}(44\eta + 6\eta^2 - 260\eta^3 \\
& - 45\eta^4 + 420\eta^5 + 210\eta^6 \\
& - 600\eta^7 + 225\eta^8)
\end{aligned}$$