

〈論 文〉

회전기기 진동의 차수 추종을 위한 재합성 필터의 설계

The Design of Reconstruction Filter for Order Tracking
in Rotating Machinery

정승호* · 박영필**

Seung-Ho Jung and Young-Pil Park

ABSTRACT

In the study, the design method of reconstruction filter is studied for synchronized sampling which is necessary for order tracking in rotating machinery. The original data sampled at constant intervals, using fixed anti-aliasing filters, is reconstructed by digital reconstruction filter and is resampled at new sampling times calculated by a suitable shaft angle encoder pulse arrival times in order to synchronize with shaft velocity. In addition to eliminating the tracking synthesizer and filters, this new method has no phase noise due to phase-locked loops.

1. 서 론

회전 기기의 이상으로 인하여 발생하는 진동은 축 회전속도의 고조파 성분(super-harmonic)이나 또는 분수조파 성분(sub-harmonic)으로 나타나는 경우가 대부분이기 때문에⁽¹⁾ 회전기기의 진동을 주파수 영역에서 해석함에 있어 파워스펙트럼의 주파수 축을 Hz로 나타내기 보다는 축 회전속도의 차수(order)로서 나타내는 것이 매우 유용하다. 스펙트럼을 차수로서 나타내기 위해서는 샘플링 시간을 축 회전속도와 동기(synchronization)시켜야 하는데 이 방법으로는 회전축에 고 해상도의 엔코더(encoder)를 부착하여 엔코더에서 발생하는 펄스 신호를 이용하여 샘플링하는 방법과 차수 추종 필터(order tracking filter)를 이용하는 방법이 있다. 그러나 전자의 방법은 원하는

회전축마다 엔코더를 부착하여야 하며 경우에 따라서는 엔코더를 부착하기가 어려운 경우도 있으며, 회전기기의 운전개시나 종료시처럼 회전속도가 급격히 변화하는 경우에는 낮은 주파수에서 중첩(aliasing)에 의한 오차가 수반될 수도 있다. 후자의 방법은 차수 추종 필터 이외에도 여러 부수장비가 필요하며 기준 주파수(즉 회전속도)가 급격히 변화하는 경우 PLL(phase locked loop)에서 추종 오차가 발생된다.

최근에 발표된 논문에서^(2,3) 일정한 시간간격으로 샘플링한 데이터들로부터 신호를 재합성하여 회전축의 속도와 동기가 되도록 재 샘플링함으로써 스펙트럼의 주파수를 회전속도의 차수로서 나타내는 방법을 제시하였다. 그러나 위 논문에서는 신호의 재합성에 필요한 재합성 필터(reconstruction filter)의 설계방법에 대하여 구체적인 언급이 없이 다만 결과만을 논하였다. 따라서 본 논문에서는 재합성 필터의 설계방법에 대하여 구체적인 방법을 제시하고 또한 동기화 샘플링의 장점 및 고려 사항에 대하여 고찰하였다. 그리고 적용 예로서 축 회전속도가 급격히 변하

* 연세대학교 대학원

** 연세대학교 공과대학 기계공학과

는 로터 실험 장치의 운전개시 실험과 볼 베어링의 이상진단 실험에 재합성 필터에 의한 동기화를 행하였다.

2. 신호의 재합성 이론^(4,5)

연속적인 시간함수 $x(t)$ 를 일정시간 간격 T 로 샘플링 했을때의 이산화 시간함수 $x'(t)$ 는 dirac delta 함수 $\delta(t)$ 를 이용하여 식 (1)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kt) \delta(t-kT) \end{aligned} \quad (1)$$

연속함수 $x(t)$ 의 Fourier 변환식을 $X(f)$ 라 하면 이산화 함수 $x'(t)$ 의 Fourier 변환식 $X'(f)$

$$\begin{aligned} X'(f) &= X(f) * \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{k}{T}) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - \frac{k}{T}) \end{aligned} \quad (2)$$

가 되며 여기서 '*'는 대합적분(convolution integral)을 의미한다.

따라서 $X(f)$ 에서 가장 높은 주파수 성분을 f_c 라 할 때 샘플링 주파수 $f_s (=1/T)$ 가 $f_s \geq 2f_c$ 이 되면 주파수 영역에서의 중첩오차(aliasing)가 일어나지 않는다. Fig. 1은 $X(f)$ 와 $X'(f)$ 의 차이물 도식적으로 나타낸 그림이다. Fig. 1에서 볼 수 있듯이 이산화 함수 $x'(t)$ 의 Fourier 변환은 주기함수가 되므로 $x'(t)$ 로부터 $x(t)$ 를 재합성하기 위해서는 $x'(t)$ 를 크기가 T 이고 통과 대역이 $|f| < f_s/2$ 인 이상적인 저대역 필터(ideal low pass filter)를 통과시키면 된다.

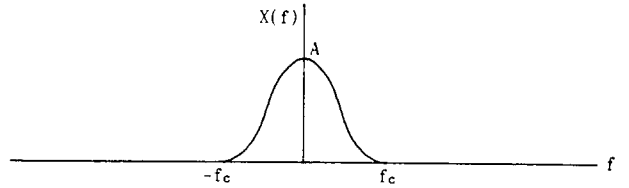
즉,

$$X(f) = X'(f) H(f) \quad (3)$$

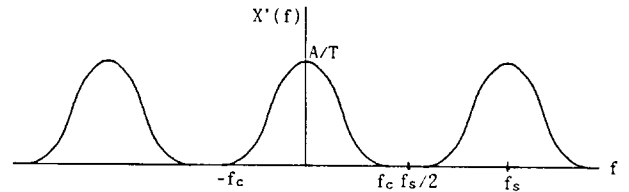
또는

$$x(t) = x'(t) * h(t) \quad (4)$$

이며, 여기서



(a) Fourier Transform of continuous function



(b) Fourier Transform of sampled function

Fig. 1 Fourier transform of continuous and sampled function

$$H(f) = \begin{cases} T & |f| \leq f_s/2 \\ 0 & |f| > f_s/2 \end{cases} \quad (5)$$

이다. $H(f)$ 를 역 Fourier 변환하면 다음 식과 같다.

$$h(t) = (\sin \pi t/T) / (\pi t/T) \quad (6)$$

따라서 재합성된 $x(t)$ 는

$$\begin{aligned} x(t) &= \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \delta(t-kT) \right\} * \frac{\sin \pi t/T}{\pi t/T} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \frac{\sin\{(\pi/t)(t-kT)\}}{(\pi/T)(t-kT)} \end{aligned} \quad (7)$$

가 된다.

그러나 여기서의 문제점은 이상적인 저대역 통과 필터의 충격응답함수(impulse response function) $h(t)$ 의 영으로의 접근 속도가 매우 느리기 때문에 재합성하기 위해서는 많은 계산을 필요로 한다. 이것의 해결 방안으로 샘플링 주파수 f_s 를 Nyquist 샘플링 주파수 $2f_c$ 보다 크게 함으로서 저대역 통과 필터의 조건을 완화시키고, 이렇게 함으로서 $h(t)$ 의 접근 속도를 빠르게 할 수 있다.

만일 샘플링 주파수 f_s 가

$$f_s = 2\beta f_c \quad (\beta > 1) \quad (8)$$

인 경우 재합성 필터의 조건은 다음과 같다.

$$H(f) = \begin{cases} T & |f| \leq f_c \\ \text{arbitrary} & f_c < |f| < f_1 \\ 0 & |f| \geq f_1 \end{cases} \quad (9)$$

여기서 β 는 여유 샘플링 인수(over sampling factor)이며,

$$f_1 = \frac{f_s}{2} \left(1 - \frac{1}{2\beta}\right)$$

이다.

3. 재합성 필터의 설계법

식 (9)를 만족하는 재합성 필터의 형태는 여러가지가 있으나⁽⁹⁾ 설계시의 융통성을 부여하기 위해 다음과 같은 형태의 충격응답함수를 갖는 필터에 대하여 고찰하기로 한다.

$$h(t) = \begin{cases} a_0 + 2 \sum_{i=1}^N a_i \cos \frac{2\pi i t}{2MT} & |t| < MT \\ 0 & |t| \geq MT \end{cases} \quad (10)$$

여기서 M 은 $h(t)$ 가 정의되는 구간을 나타내는 정수로써 신호 재합성시 $2M$ 개의 데이터가 계산에 사용되며, N 은 Fourier 계수의 갯수로써 정의된다. 이때 M 이 증가할수록, 또 N 이 증가할수록 재합성 오차는 줄어든다.

식 (10)의 $h(t)$ 를 Fourier 변환하면 식 (11)과 같으며 이것은 폭이 $|t| < MT$ 인 사각 윈도우(rectangular window) 함수의 Fourier 변환식을 이용한 결과이다.

$$H(f) = 2MT \sum_{i=-N}^N a_i \frac{\sin \pi(MTf - i)}{\pi(2MTf - i)} \quad (11)$$

식 (11)에서 $f' = 2MTf$ 로 무차원화하면 다음과 같은 식이 된다.

$$H(f') = 2MT \sum_{i=-N}^N a_i \frac{\sin \pi(f' - i)}{\pi(f' - i)} \quad (12)$$

결국, 재합성 필터의 설계는 식 (12)가 재합성 필터의 조건식 (9)를 만족하도록 a_i 를 결정하는 문제

로 귀착된다. 본 연구에서는 a_i 를 결정함에 있어 선형 최적화 방법(linear programming)을 이용하였다. M, N 이 유한일 때 식 (9)를 정확히 만족하는 것이 불가능하므로 다음과 같이 통과영역에서의 오차 δ_1 과 차단영역에서의 오차 δ_2 를 도입하여 이 δ_1 과 δ_2 가 최소가 되도록 a_i 들을 구한다.

즉, 비용함수(cost function)

$$J = w_1 \delta_1 + w_2 \delta_2 \quad (13)$$

가 최소가 되며 다음의 구속조건들을 만족하도록 한다. 여기서 w_1, w_2 는 가중치이다.

$$\begin{aligned} H(f')/T &\leq 1 + \delta_1 & |f'| &\leq (1 - \alpha)M \\ H(f')/T &\geq 1 - \delta_1 & |f'| &\geq (1 - \alpha)M \\ H(f')/T &\leq \delta_2 & |f'| &\leq (1 + \alpha)M \\ H(f')/T &\geq -\delta_2 & |f'| &\geq (1 + \alpha)M \\ a_i &\geq 0 & i &\leq (1 + \alpha)M \\ a_i &: \text{free} & j &> (1 + \alpha)M \\ i, j &= 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (14)$$

여기서 $\alpha = 1 - 1/\beta$ 이다.

이 때, 만약 δ_1 이 주어진다면 비용함수를 $J = \delta_2$ 로 바꾸어도 무방하다. 그리고 위의 방법으로 설계된 필터를 이용하여 신호를 재합성하였을 경우 재합성된 신호는 사용된 샘플 데이터 값과 반드시 일치하지는 않는다. 이것은 문제가 되지 않으나 만약 샘플 데이터 값과 반드시 일치하도록 하려면 위의 구속조건 이외에 다음과 같은 구속조건을 첨가시키면 된다.

$$\begin{aligned} h(0) &= a_0 + 2 \sum_{i=1}^N a_i = 1 \\ h(nT) &= a_0 + 2 \sum_{i=1}^N a_i \cos(\pi i n/M) = 0, \\ n &= 1, 2, \dots, M \end{aligned} \quad (15)$$

4. 재 샘플링 시간의 계산 방법

일정 시간 간격 T 로 샘플링된 데이터들로부터 앞에서 언급한 재합성 필터를 이용하여 기준 축 회전속도와 동기시켜 재 샘플링하기 위해서는 먼저 기준 회전축의 원하는 각도마다의 시간을 알아야 한다. 이 시간을 구하는 방법으로 저해상도의 엔코더(1회전당 2~4개의 펄스를 발생시키는 정도이면 만족)로부터 펄스의 도착 시간을 측정 한 후, 이들로부터 엔코더에

서 발생하는 1회전당의 펄스 수를 고려하여 원하는 각도에서의 시간을 보간한다.

엔코더에서 발생하는 1회전당의 펄스 수가 p 인 경우 기준 회전가속도가 작은 구간 내에서 일정하다고 가정하면 각도 $\phi(t)$ 는 다음과 같이 2차식으로 나타낼 수 있다.

$$\phi(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 \quad (16)$$

여기서 계산의 용이성을 위해 $\phi(t)$ 를 radian의 단위로 표시하지 않고 $1/p$ 회전(revolution)의 단위로 나타낸다. 식 (16)의 계수 b_0, b_1, b_2 를 구하기 위해서는 세개의 펄스 도착 시간이 필요하며 이 도착 시간을 t_1, t_2, t_3 라 할 때 다음 식이 성립된다.

$$\Phi = \Pi b \quad (17)$$

여기서,

$$\Phi = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix} \quad (18)$$

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \\ 1 & t_3 & t_3^2 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$b = \begin{Bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} \quad (20)$$

위 식에서 계수 벡터 b 는

$$b = \Pi^{-1} \Phi \quad (21)$$

즉,

$$b_0 = \frac{1}{\Delta} [t_1 t_3 (t_1 - t_3) + 2 t_1 t_2 (t_2 - t_1)] \quad (22)$$

$$b_1 = \frac{1}{\Delta} (t_1^2 + t_3^2 - 2 t_2^2) \quad (23)$$

$$b_2 = \frac{1}{\Delta} (2 t_2 - t_1 - t_3) \quad (24)$$

$$\Delta = (t_2 - t_1)(t_3 - t_1)(t_3 - t_2) \quad (25)$$

이다.

따라서 원하는 각도에서의 시간 t_k 는 식 (16)으로

부터

$$t_k = \frac{1}{2b_2} [\sqrt{b_1^2 + 4b_2(\phi_k - b_0)} - b_1] \quad (26)$$

이다. 만약 $b_2 = 0$ 인 경우에는

$$t_k = \frac{(\phi_k - b_0)}{b_1} \quad (27)$$

가 된다.

5. 재합성 필터 설계 결과

다음은 앞에서 기술한 방법으로 재합성 필터를 설계한 결과이다. 이 때 사용된 파라미터의 값은 $M = 5, N = 7, \delta_1 = 0.0008$ 이며 설계된 재합성 필터의 주파수응답함수는 Fig. 2, Fig. 3에 나와 있다.

Fig. 2는 구속조건식 (15)만을 고려하여 설계한 것으로 통과 대역에서 최대 오차는 0.08%이고 차단 영역에서 최대 오차는 대략 104dB이다. 이 필터는 equiripple의 특성을 갖는다. Fig. 3은 식 (16)의 구속조건도 함께 고려한 경우로서 통과 대역에서의 최대 오차는 0.0015%이고 차단 영역에서의 최대 오차는 80dB이다. 후자는 전자보다 통과대역에서의 오차는 매우 좋으나 차단 영역에서의 오차는 크다. 하지만 점점 감소하는 경향을 가지므로 전체적으로 성능이 나쁘다고 할 수는 없다. Table 1에 구속조건식 (15)만을 고려하여 설계된 재합성 필터의 계수값이 나와 있다.

앞에서 설계된 재합성 필터의 타당성을 검토하기 위해 Sweep sine 신호에 대하여 모의 실험을 하였

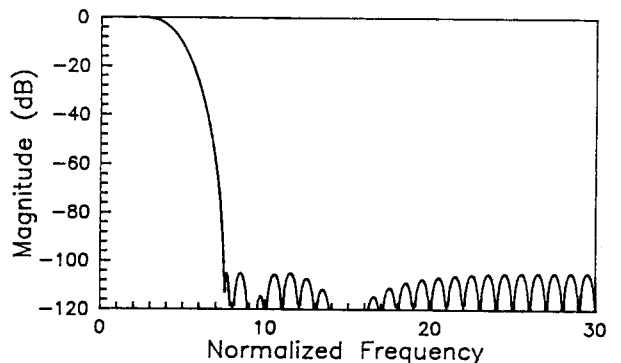


Fig. 2 FRF of the reconstruction filter constrained by Eq.(14)

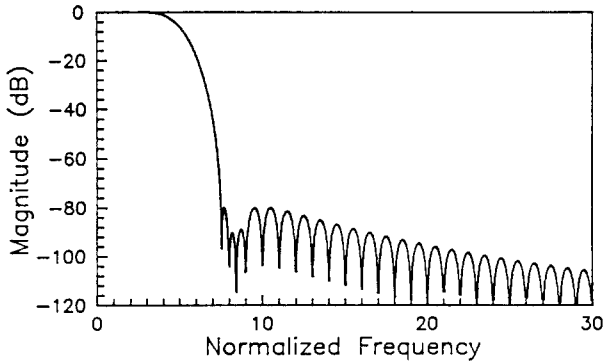


Fig. 3 FRF of the reconstruction filter constrained by Eqs.(14), (15)

Table 1 The coefficients of reconstruction filter

a_0	9.99320277662825E-02
a_1	1.00069586451715E-01
a_2	1.00000607371288E-01
a_3	9.71577630135044E-02
a_4	7.08046736884300E-02
a_5	2.75539258698557E-02
a_6	4.06483414507760E-03
a_7	9.39273510572537E-05

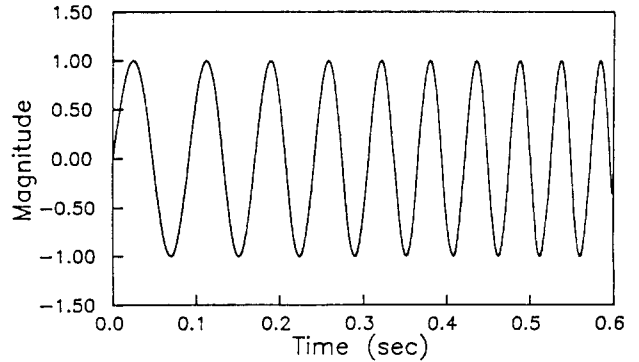
다. Sweep sine의 신호는 10Hz에서 80Hz까지 20Hz/sec로 주파수를 증가시켰으며, 샘플링 시간 간격은 0.002sec로 최대 주파수 80Hz에 대한 Nyquist 샘플링 주파수보다 약 3배 정도 크게하였다. 이들 데이터로부터 재합성 필터를 이용하여 신호를 재합성한 후, 기준 주파수의 한 주기당 12개의 데이터를 재샘플링하였다. Fig. 4(a)는 고정 시간 간격으로 샘플링한 경우의 신호를 보여주며 Fig. 4(b)는 재샘플링한 경우의 신호를 보여주고 있다.

6. 재합성 필터를 이용한 차수 추종 예

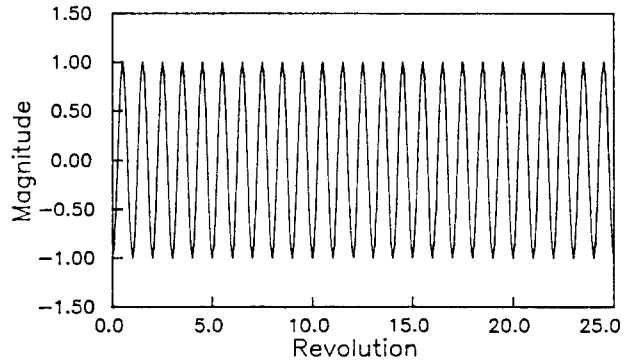
6.1 로터계의 운전 개시 실험

로터 실험 장치의 운전 개시시 수집된 축 진동 신호 변위와, 본 논문에서 설계한 재합성 필터를 이용해 축 회전속도와 동기시킨 신호에 대한 스펙트럼 분석 결과가 Fig. 5와 Fig. 6에 나와 있다.

Fig. 5는 일정 시간 간격으로 수집한 신호의 연속 스펙트럼(cascade spectrum)이며, Fig. 6은 일정



(a) Sweep sine signal



(b) Reconstructed signal

Fig. 4 Sweep sine signal and reconstructed signal

시간 간격으로 수집한 축 진동 변위 신호를 이용하여 축 회전속도와 동기되도록 재샘플링한 신호의 연속 스펙트럼이다. Fig. 5와 Fig. 6에서 알 수 있듯이 진동 신호가 축 회전속도에 동기된 경우 축 회전속도에 종속적인 주파수 성분들은 중첩오차의 영향이 줄어든다. 또한 스펙트럼의 주파수 축이 축 회전속도의 차수로서 표시되기 때문에 로터계의 이상진단 등에 유용하게 사용할 수 있다.

6.2 동기화 신호를 이용한 볼 베어링의 진단 실험

볼 베어링의 결함에 의하여 발생하는 진동 신호는 결함부위에 따른 특징적인 주파수 성분을 갖으며 이 주파수는 축 회전속도와 볼 베어링의 기계적인 제원에 의하여 결정된다. 만약 볼 베어링의 기계적 제원들이 고정되면 이 주파수들은 축 회전속도에만 종속되기 때문에 축 회전속도의 변동이 큰 경우 이 주파수 성분들은 흔들리게 된다. 베어링의 진동신호를 축 회전속도에 동기시키면 이런 문제점을 해결할 수 있다. 내륜에 점 결함이 있는 볼 베어링의 이상 진단

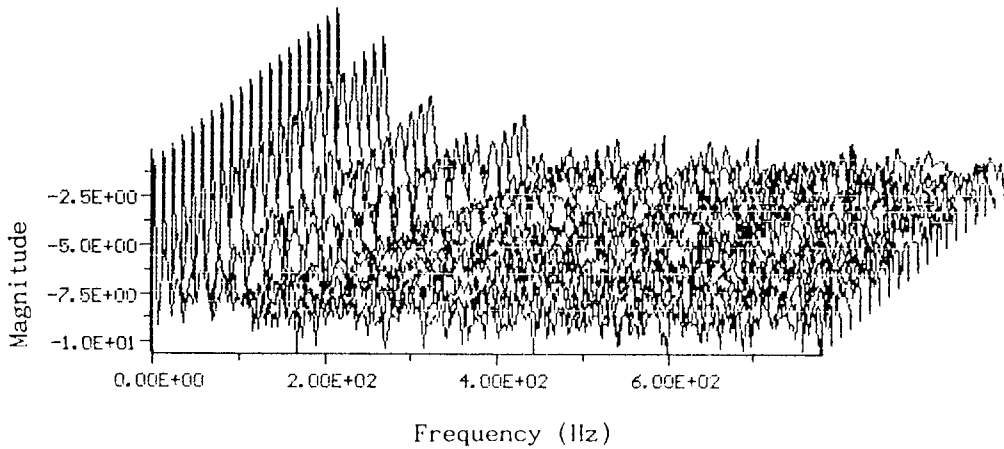


Fig. 5 Cascade spectrum of shaft displacement signal

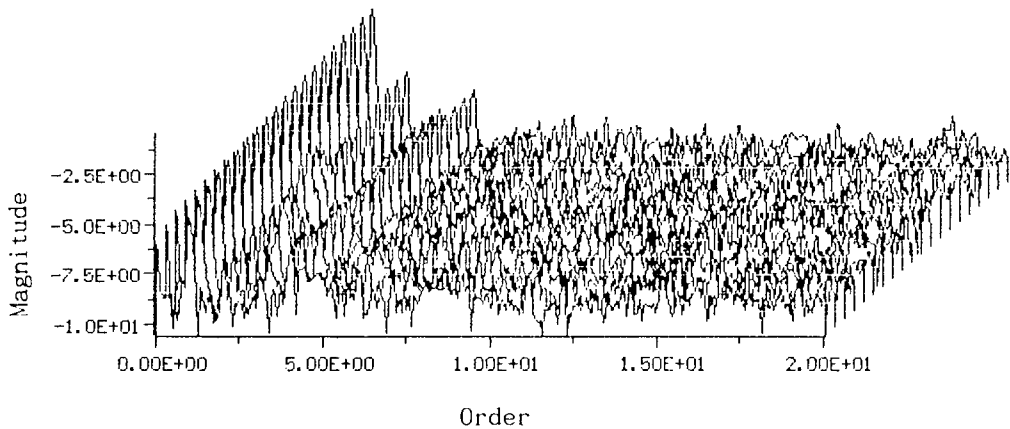


Fig. 6 Order map of shaft displacement signal

실험을 위하여 Fig. 7과 같이 베어링 하우스에서 가속도 신호를 수집하고, 설계된 재합성 필터를 이용하여 수집된 신호를 축 회전속도에 동기화 시킨 후, 고공진 기법⁽⁶⁾(HFRT: high frequency resonance technique)을 적용하여 포락선(envelop) 신호를 검출하고 이것을 주파수 분석한 결과가 Fig. 8에 나와 있다. 그림에서 알 수 있듯이 불평형 질량에 의해 축 회전속도에 해당되는 1.0 차수와 내륜의 점 결함에 의한 4.9 차수 성분이 검출되고 있으며, 또한 베어링 부하에 의하여 4.9차수에 축 회전속도인 1.0차수 성분이 변조(modulation)되어 나타나고 있다. 즉, 축 회전속도의 변동에 의한 영향에 관계없이 내륜 점 결함에 의한 성분 4.9차수에서 피크가 존재한다.

7. 결 론

회전기기의 진동을 해석함에 있어 동기화 샘플링을 행한 경우 많은 장점을 갖는다. 만약 기준 주파수(축 회전속도)의 한 주기당 P 개를 동기화 샘플링을 했다 면 해석 가능한 최대 차수는 $P/2$ 가 되고, FFT(또는 DFT)하는 데이터의 갯수를 기준 주파수의 M 주기가 되도록 잡는다면 분해능은 $1/M$ 차수가 된다. 또한 기준 주파수의 주기와 일치되도록 샘플링하기 때문에 축 회전속도에 종속적인 신호성분에 대해서는 파워의 누설(power leakage)이 발생하지 않는다. 그리고 선택된 차수의 스펙트럼만을 보고자 할 때는 FFT 대신 DFT를 사용할 수 있어 불필요한 계산을 줄일 수 있다. 단점으로는 재합성 필터가 casual하지 않기 때

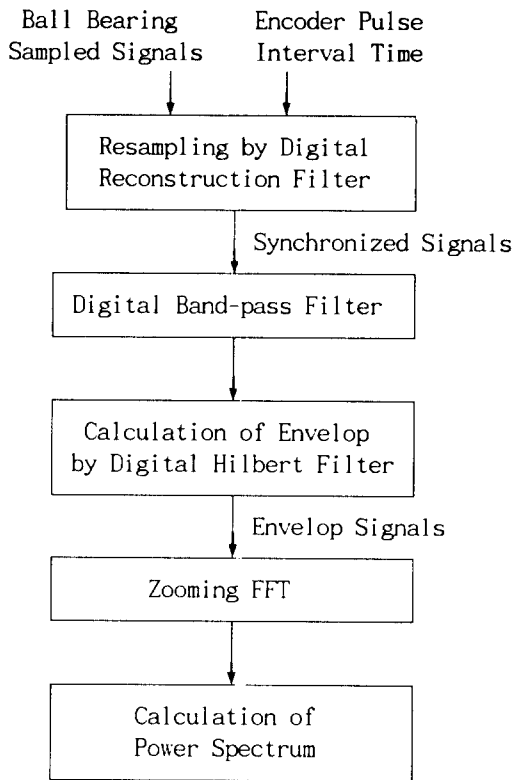


Fig. 7 Flow of signal processing

문에(음의 시간에서 충격응답함수의 값이 영이 아님) 실시간 처리가 불가능하다는 점이다. 그러나 회전기기의 운전개시나 종료시의 진동 해석시(이때 많은 정보를 수집할 수 있음) 아주 유용하게 사용할 수 있으며 이상진단의 경우 주기적으로 데이터를 일괄 처리하여 차수의 스펙트럼을 조사함으로써 이상여부를 쉽게 파악할 수 있다.

본 논문에서는 스펙트럼을 기준 주파수의 차수 축으로 나타내는데 필수적인 동기화 샘플링을 수행함에 있어 필요한 재합성 필터의 설계법에 대하여 연구하였다. 재합성 필터를 사용함으로써 기존의 방법에서 발생하는 여러가지 오차를 방지할 수 있으며 또한 소프트웨어적으로 처리하기 때문에 부수적인 장비가 필요하지 않다.

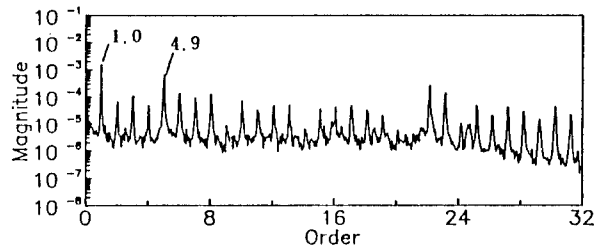


Fig. 8 Power spectrum of envelop of the bearing with a fault on inner race at 1600rpm

참고 문헌

- (1) Bently, D. E., 1986, "Interpreting Vibration Information from Rotating Machinery," Sound and Vibration, February, pp.14~23.
- (2) Potter, Ron, 1990, "A New Order Tracking Method for Rotating Machinery," Sound and Vibration, September, pp.30~34.
- (3) Potter, Ron and Griber, Mike, 1989, "Computer Order Tracking Obsoletes Order Methods," SAE Noise and Vibration Conference, May 16-18, pp.63~67.
- (4) Papoulis, A., 1966, "Error Analysis in Sampling Theory," Proc. IEEE, Vol. 54, No. 7, pp. 947~955.
- (5) Jerri, A. J., 1966, "The Shannon Sampling Theory Its Various Extensions and Applications : A Tutorial Review," Proc. IEEE, Vol. 65, No. 11, pp.1565~1596.
- (6) Burchill, R. F., Frarey, J. L., and Wilson, D. S., 1973, "New Machinery Health Diagnostic Techniques Using High Frequency Vibration," SAE paper 730930.
- (7) Brigham, E. O., 1988, The Fast Fourier Transform and Its Applications, Prentice-Hall.