

본드그래프 모델링기법을 이용한 음향 해석에 관한 연구

오 재 응* · 서 상 호**

A Study on the Acoustic Analysis using Bond Graph Modeling Techniques

J.E. Oh · S.H. Suh

Abstract

In the most of acoustic system with low flow rate and low pressure level, one-dimensional, linear modeling techniques are used very well. At low frequency, the tube is modeled as inertia element and cavity as capacitance element, and to extend the range of frequency normal mode oscillators are represented. Bond graph modeling techniques are proposed to predict TL (Transmission Loss) and time response which is impossible by transfer matrix in muffler system. A simple acoustic filter which consists of several tubes and cavities is analyzed in both time and frequency domain.

I. 서 론

유량이 적고, 저압인 경우의 음향계에서는 1차원, 선형적으로 모델링하게 되면 좋은 음향학적 성능을 얻을 수 있다. 특히 소음기는 비선형적인 많은 유량과 고압을 포함하지만, 문세되는 소음의 파장이 지름에 비하여 충분히 커서 1차원 평면파의 선형해석이 가능하다. 본 논문에서는 기존의 전달매트릭스법으로는 불가능했던 시간영역 해석을 비선형 효과를 선형적으로 근사화 시킬 수 있는 본드 모델링 기법을 사용하여 관(tube)과 공동(cavity)에 대해 각각 모델링하여 음향해석을 수행하였다. 정규모

드(normal mode)의 집중 매개 요소가 유한개의 정규모드를 근사적으로 나타낼 수 있음을 이용하여, 관에 대해서는 관성(inertia)요소와 고주파 성분을 묘사할 수 있는 정규모드 진동자(normal mode oscillator)로, 반면에 공동(cavity)에 대해서는 용량(capacitance)요소와 정규 모드 진동자로 단순 확장형 소음기를 모델로 하여 확장관의 길이와 지름의 변화에 따라 소음기의 고유성능인 투과손실(transmission loss)을 계산하였다. 또한 여러 개의 관과 공동으로 이루어진 간단한 음향 필터를 모델링하여 시간영역과 주파수영역으로 각각 해석하였다.

* 한양대학교

** 한양대학교 대학원

II. 이 론

2.1 힘과 유량 입력을 가지는 음향 방정식

대부분의 실제적인 관심은 1차원 유동 해석을 가능한 관이나 쉘의 음향 기동이다. 내부 가진(internal source)으로서 유체에 가해진 힘을 고려하면, 음압 P 와 체적 속도 Q 를 기본 변수로 사용하여 방정식을 유도할 수 있다. Fig. 1의 (a)지점에서 뉴턴의 법칙을 적용하면,

$$(\rho_0 S dx) \frac{\partial Q/S}{\partial t} = - \frac{\partial P}{\partial x} S dx + f(x,t) dx,$$

$$\rho_0 \frac{\partial Q}{\partial t} = - \frac{\partial P}{\partial x} S + f(x,t) \quad (1)$$

와 같이 쓸 수 있으며 ρ_0 는 기준 밀도이고, f 는 단위 길이당 가진력을 나타낸다.

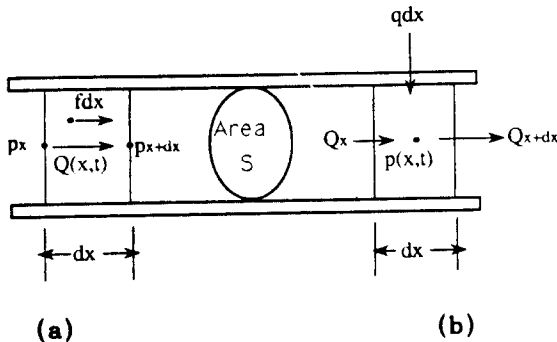


Fig. 1 Infinitesimal elements derivation of acoustic equation

Fig. 1의 (b)지점에서는 미소체적 $S dx$ 의 용량(capacitance)이 $S dx / \rho_0 c^2$ 이므로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{S dx}{\rho_0 c^2} \frac{\partial P}{\partial t} = - \frac{\partial Q}{\partial x} dx + q(x,t) dx,$$

$$\frac{S}{\rho_0 c^2} \frac{\partial P}{\partial t} = - \frac{\partial Q}{\partial x} + q(x,t) \quad (2)$$

여기서, c 는 음속을, q 는 단위 길이당 체적 속도를 나타낸다. 식(1), (2)로부터 강제 음향 방정식을 두가지 형태로 표현할 수 있는데 이

때 P, Q 를 소거하면 각각 다음과 같은 식들을 구할 수 있다.

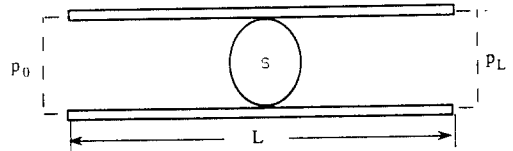
$$\rho_0 \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = \rho_0 c^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \rho_0 c^2 \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\frac{S}{\rho_0 c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \frac{S}{\rho_0} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial t} \quad (4)$$

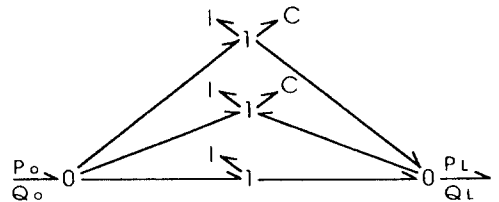
그리고 f 와 q 를 소거할때, 식(3)과 식(4)는 파동 방정식의 형태가 되고 이 두식을 이용하여 원하는 모델링에 관한 일반식들을 유도하게 된다.

2.2 긴관(Long tube)

횡방향에 비해 상대적으로 훨씬 큰 길이 l 인 관을 고려해 본다. (Fig. 2(a)) 이 원형 관에 대해 양 끝단에서의 보정치 Δl 은 반경의 약 0.6배로 한다.⁵⁾ 이러한 관에 대한 가진원은 양 끝단에서의 압력 $P_0(t), P_L(t)$ 이 되고 $q=0$ 로 가정한다.



(a) A tube or pipe



(b) Bond graph modeling

Fig. 2 Normal mode representation of a tube or pipe

이때 단위 길이당 힘 f 는

$$f = S \{ P_0 \delta(x) - P_L \delta(x-l) \} \quad (5)$$

이며, 여기서 δ 는 Dirac delta 함수이다. 식

(5)를 식(3)에 대입하면

$$\frac{\rho_0}{S} \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = \frac{\rho_0 c^2}{S} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \dot{P}_0 \delta(x) - \dot{P}_1 \delta(x-1) \quad (6)$$

이 되며 \cdot 는 시간에 대한 미분 d/dt 를 의미한다.

이 방정식에 대한 정규 모드는 순간적으로 $P_0 = P_1 = 0$ 으로 놓게 될때, $\partial Q / \partial x$ 가 소거됨으로 알 수 있다. 또한 변수 분리법을 이용하여 Q 를 모드형 $G_i(x)$ 와 모드 일반 좌표(modal generalized coordinates) $\xi_i(t)$ 의 곱으로 표현할 수 있다. 이를 식(6)에 대입하여 정리하면

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = c^2 \frac{d^2 G}{dx^2} = constant = -\omega^2$$

을 만족하게 된다. 모드형은 단위크기 1로 정규화시키면 임의의 크기를 갖는 코사인함수로 표현된다. 공간 경계조건을 적용하여 모드형 $G_i(x)$ 을 구하면 $\cos(i\pi x/l)$ 이 되고, 공진주파수 ω_i 는 $i\pi x/l$ 이다. 모드형과 모드 일반 좌표 곱의 무한대까지의 합인 Q 를 전개하여 식(6)에 대입하여 $G_i(x)$ 을 곱하여, $x=0$ 에서 $x=l$ 까지 적분하면, $G_i(x)$ 의 직교성으로 인해 ξ_i 에 관한 방정식이 분리된 다음과 같은 결과를 얻게 된다.

for $i=0$, $\frac{\rho_0 l}{S} \dot{\xi}_0 = \dot{P}_0 - \dot{P}_1$,

또는

$$\frac{\rho_0 l}{S} \dot{\xi}_0 = P_0 - P_1 \quad (7)$$

for $i \neq 0$, $\frac{\rho_0 l}{2S} \dot{\xi}_i = -\frac{\rho_0 c^2 i^2 \pi^2}{2Sl} \xi_i + \dot{P}_0 - \dot{P}_1 (-1)^i$,

또는

$$\frac{\rho_0 l}{2S} \dot{\xi}_i = -\frac{\rho_0 c^2 i^2 \pi^2}{2Sl} \int (\xi_i dt + P_0 - P_1 (-1)^i) \quad (8)$$

여기서 ξ_i 는 Q 의 식(7)과 식(8)요소이고, 방정식 각각의 계수들은 관성(inertia)과 용량(capacitance)요소가 된다. 식(7)은 정확히 관

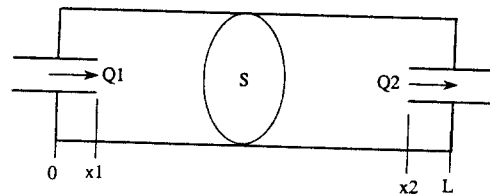
을 하나의 집중 I요소로 나타낸 식이고, 식(8)에서는 본 모델의 주파수 범위를 확장하기 위해 사용된 모드 공진기(modal oscillator)를 나타내었다. Table 1에서 각 모드에 대한 I와 C요소의 값들을 공동에서의 경우와 비교하여 나타내었다. $i=0$ 일때 I, C요소가 무한대 값을 가진다는 것은 0차 모드에서는 I, C요소가 제거됨을 의미한다. 모델을 완성하기 위해 관 양 끝단에서의 체적속도 Q_0 와 Q_1 을 구하면 다음과 같다.

$$Q_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i, \quad Q_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i (-1)^i \quad (9)$$

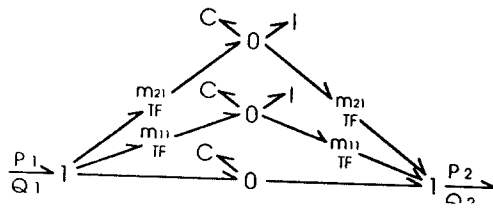
Fig. 2(b)에 튜브에 대한 정규 모드 본드 모델을 나타 내었다.

2.3 공동(Cavity)

Fig. 3은 셸과 관 소음기내의 전형적인 공동(또는 확장관, cavity)을 보여준다. 가장 낮은 공진주파수가 1차원 해석으로 구해질 수 있는 모드형과 관련된 정도로 반경이 크고 길이 방향도 길다고 가정한다. 파장이 횡방향 차원에 필적하는 고주파까지 짧은 공동은 집중 용량으로 나타낼 수 있다.



(a) A shell cavity



(b) Bond graph modeling

Fig. 3 Normal mode representation of a shell cavity

Table 1. Inertia and capacitance parameters for the *i*th normal mode of long tube and cylindrical cavity

parameter	I		C	
	tube	cavity	tube	cavity
at <i>i</i> =0	$\rho_0 l / S$	∞	∞	$Sl / \rho_0 c^2$
<i>i</i> ≠ 0	$\rho_0 l / 2S$	$2\rho_0 l / i^2 \pi^2 S$	$2Sl / \rho_0 c^2 i^2 \pi^2$	$Sl / 2\rho_0 c^2$

고주파에서는 원칙적으로 3차원 모드가 사용될 수도 있으나, 모델링 과정이 복잡할 뿐만 아니라 관심 주파수 영역을 벗어나기 때문에 1차원 해석으로 가정한다. 공동의 길이방향 모드를 고려하여 $f=0$ 인 식(4)를 이용하면, 흡입 유동은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$q = Q_1 \delta(x - x_1) - Q_2 \delta(x - x_2) \quad (10)$$

여기서 부호 정의는 Fig. 3에 나타나 있다. 이 식을 식(4)에 대입하면

$$\frac{S}{\rho_0 c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \frac{S}{\rho_0} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + Q_1 \delta(x - x_1) - Q_2 \delta(x - x_2) \quad (11)$$

를 얻는다. 관에서 구한 체적속도의 경우와 같이 음압에 대해서도 변수 분리법을 이용하여 모드형 $H_i(x)$ 와 모드 일반 좌표(modal generalized coordinates) $\eta_i(t)$ 의 곱으로 표현할 수 있으며 각각의 모드들은 다음의 식을 만족한다.

$$\frac{d^2 \omega \eta}{dt^2} = c^2 \frac{d^2 H}{dx^2} = constant = -\omega^2$$

이때 공진주파수 ω_i 는 $i\pi c/l$ 가 된다. 모드 일반 좌표에 관한 방정식을 구하면 다음과 같다.

$$\text{for } i=0, \frac{Sl}{\rho_0 c^2} \dot{\eta}_0 = Q_1 - Q_2 \quad (12)$$

$$\text{for } i \neq 0, \frac{Sl}{2\rho_0 c^2} \dot{\eta}_0 + \frac{i^2 \pi^2 S}{2\rho_0 l} \int^t \eta_i dt = Q_1 \cos \frac{i\pi x_1}{l} - Q_2 \cos \frac{i\pi x_2}{l} \quad (13)$$

여기서, η_i 는 음압 성분이고, 계수들은 C와 I요소에 해당하는 값들이다. $i=0$ 인 경우의 방정식은 공동에 하나의 집중 용량으로 모델링할 때 정확히 얻어지는 것이며, $i \neq 0$ 인 경우에는

고주파 범위를 포함할 수 있는 정규 모드를 나타내는 방정식이다. 공동에 대한 C와 I요소에 대한 값들은 Table 1에서 관에서의 경우와 비교하여 나타내었다.

유동의 흡입 지점 x_1 과 x_2 에서의 압력 P_1 , P_2 는 다음과 같이 구하여 진다.

$$P_1(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \cos \frac{i\pi x_1}{l} \eta_i$$

$$P_2(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \cos \frac{i\pi x_2}{l} \eta_i \quad (14)$$

양끝단에서 압력 가진을 받는 관에 대해, 양끝단에서의 모드형은 식(7), (8), (9)에서 단지 ± 1 을 가진다. 그러나 동일한 경우의 공동에 대해서는 양끝단에서의 x_1 과 x_2 가 서로 같지 않기 때문에 식(13)과 (14)에서 계수가 1로 갖지 않게 된다. 이는 Fig. 3(b)에서와 같이 본드 그래프는 변환비(transformer moduli) $\cos i\pi x_1/l$ 와 $\cos i\pi x_2/l$ 를 포함해야 함을 의미한다.

실제적으로, 고주파 모드가 길이방향에서 항상 형성된다고 할 수 없으므로 단지 소수의 모드만을 구할 수 있다. 본드 그래프를 통해 알 수 있듯이, 0차 모드만을 얻게 된다면, 그 표현은 단일 집중 용량을 의미한다.

3. 시뮬레이션

3.1 단순 확장형 소음기

먼저 길이 l 이고 단면적 S 인 가늘고 긴 관을 해석하였다. 3개의 모드를 고려하여 길이, 직경의 변화 그리고 고려한 모드수를 바꾸어 가며 시뮬레이션 하였다. 입력원(가진원)은 $x=0$ 에서의 임펄스 가진으로 하고, $x=l$ 에서

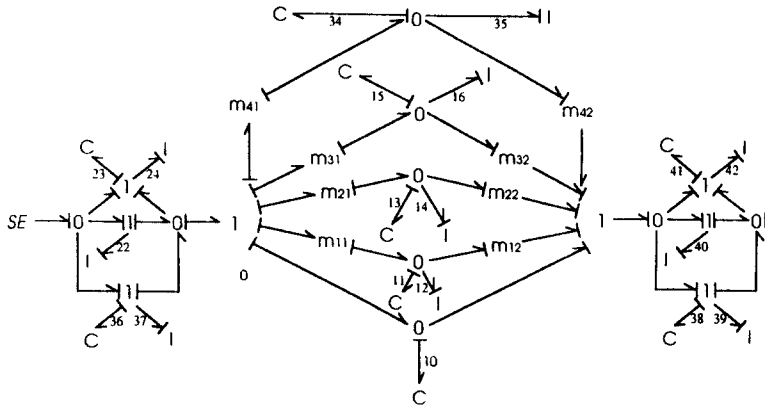


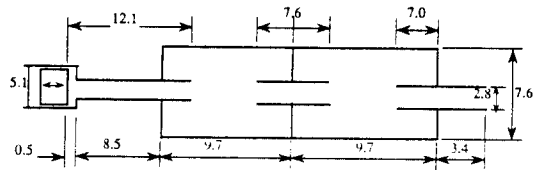
Fig. 4 Bond modeling of a simple expansion muffler with 4 modes

의 시간 응답을 푸리에 변환하여 주파수응답을 구하였다. 그리고 가늘고 긴 2개의 관과 1개의 공동(확장관)으로 이루어진 단순 확장형 소음기를 고려하였다. 평면파의 한계 주파수(cut-off frequency)가 약 2000Hz이므로 공동은 4개의 모드를 고려하는 것만으로 충분하며, 관은 2개의 모드로 모델링하였고 Fig. 4에 나타내었다. 여기서 SE는 가진원(임펄스 음압)을, I_{22} 와 I_{40} 은 흡입관, 출력관의 0차 모드를, I_{24} 와 C_{23} , I_{37} 과 C_{36} 은 흡입관의 1차·2차 모드를, I_{42} 와 C_{41} , I_{39} 와 C_{38} 은 출력관의 1차·2차 모드를 나타낸다. C_{10} 은 공동의 0차 모드를, C_{11} 과 I_{12} 는 1차모드를, C_{13} 과 I_{14} 는 2차 모드를, C_{15} 와 I_{16} 은 3차 모드를, C_{34} 와 I_{35} 는 4차 모드를 각각 의미한다. 본드내의 계수 m_{ij} 는 i 번째 모드에서의 변환기 계수(transformer moduli)를 의미하며, 입력의 형태를 바꾸지 않고 크기만을 바꾸는 역할을 하게 된다.

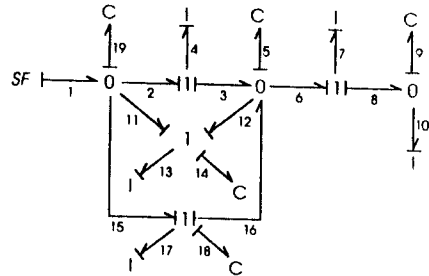
3.2 음향 필터

Fig. 5(a)는 피스톤 가진원(piston flow source)을 가지는 간단한 음향 필터를 나타내고 있다. 3개의 관과 3개의 공동을 가지는 음향 필터를 앞부분의 관의 2개의 모드를 고려하여 본드 그래프로 모델링하여 Fig. 5(b)에 나타내었다.

여기서 SF는 피스톤의 가진원을, C_{19} 는 피스톤 앞의 작은 공동을, C_5 와 C_9 는 나머지 작



(a) Dimension in centimeter



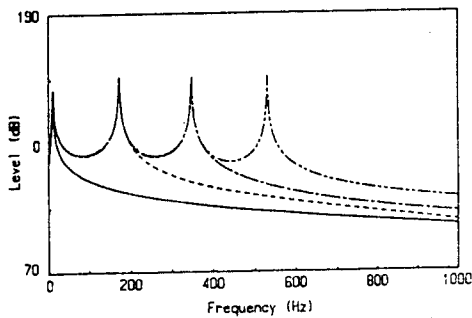
(b) Bond graph modeling

Fig. 5 An acoustic filter example

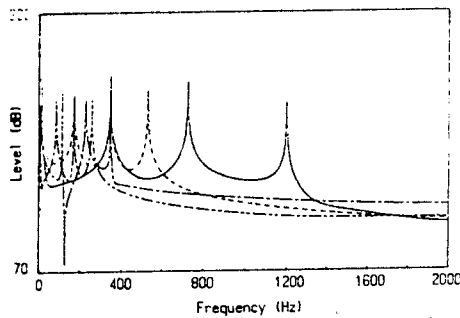
은 2개의 공동을, I_4 와 I_7 과 I_{10} 은 3개의 관의 0차모드를, I_{13} 과 C_{14} 는 12.1cm관의 1차 모드를, I_{17} 과 C_{18} 은 2차모드를 나타내었다.

IV. 결과 및 고찰

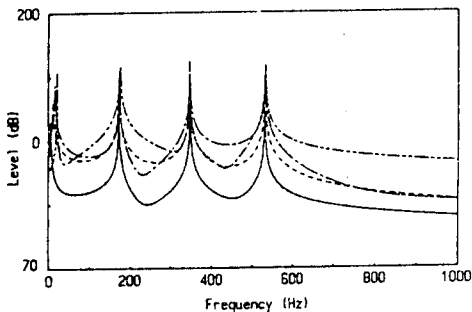
가늘고 긴 관을 정규모드와 본드그래프로 모델링하여 해석한 결과, 고려한 모드수 만큼의 공진주파수를 찾을 수 있었으며, 이론치와 비교한 결과 잘 일치함을 알 수 있었다. 관의 길이의 증가에 따라 공진주파수가 작아지나, 지



(a) In the case of change of mode number (—: no, - - -: one, — — -: two, ···: three, — — -: four)
(—: no, - - -: one, — — -: two, ···: three)



(b) In the case of change of length l ($d=40\text{mm}$) (—: 500, - - -: 1000, — — -: 1500, ···: 2000)



(c) In the case of change of diameter d ($l=1000\text{mm}$) (—: 20, - - -: 40, — — -: 60, ···: 80)

Fig. 6 Frequency response of a tube

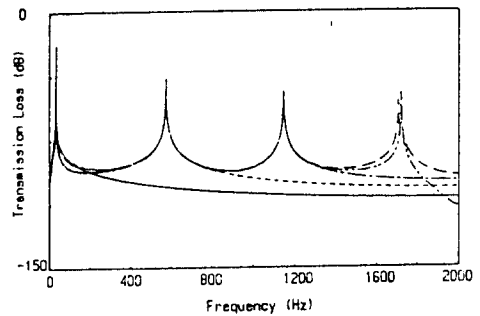
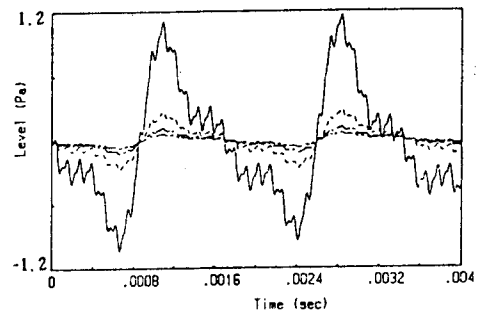
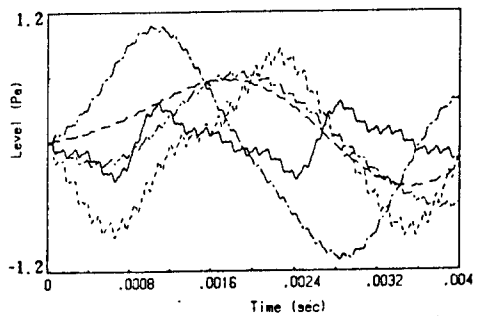


Fig. 7 Frequency response of muffler



(a) In the case of change of diameter D ($L=300\text{mm}$) (—: 100, - - -: 200, — — -: 300, ···: 400)



(b) In the case of change of length L ($D=300\text{mm}$) (—: 300, - - -: 500, — — -: 700, ···: 1000, — — -: 1500)

Fig. 8 Time response of muffler

름의 변화에는 아무런 영향을 받지 못했다. (Fig. 6(a), (b), (c)) 단순 확장 소음기를 모델링하여 해석한 결과, 고려한 모드수 만큼의 응답을 얻었고 (Fig. 7), 확장관의 직경 (D) 과 길이 (L) 를 변화시켰을 때의 시간응답 (Fig. 8) 과 주파수응답을 얻을 수 있었다. (Fig. 9, 10)

이 결과를 통해 직경이 커질수록 투과손실이 향상되었고 길이의 증가에 따라서는 주파수의 이동이 있었는데 이는 전달매트릭스법을 이용한 결과와 잘 일치하였다⁶⁾. 여러개의 관과 공동으로 구성된 간단한 음향필터를 모델링하여 해석한 결과, 이 계의 시간 및 주파수 응답을

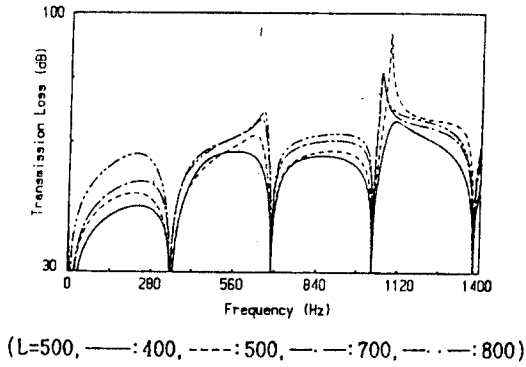
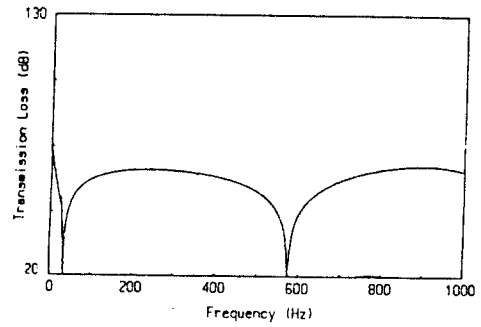
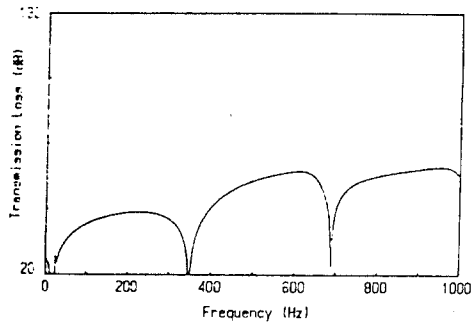


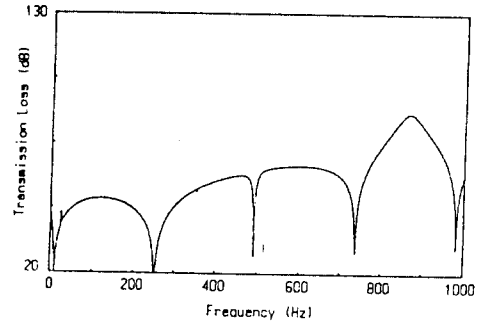
Fig. 9 In the case of change of diameter D



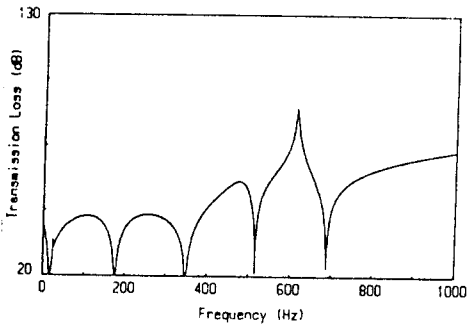
(a) D=300, L=300



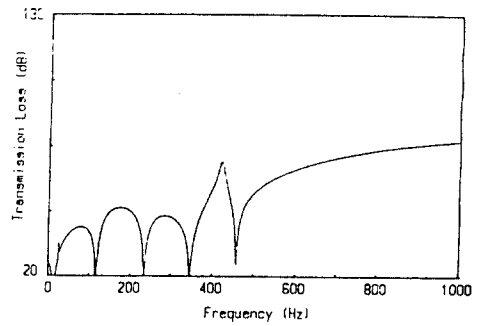
(b) D=300, L=500



(c) D=300, L=700



(d) D=300, L=1000



(e) D=300, L=1500

Fig. 10 In the case of change of length L

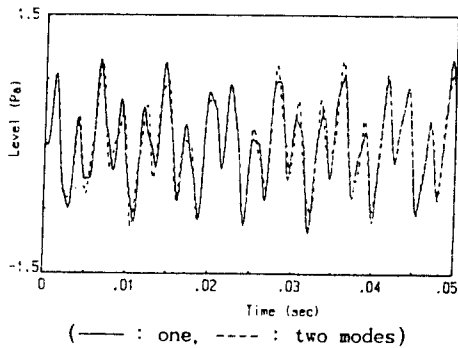


Fig. 11 Time response of acoustic filter

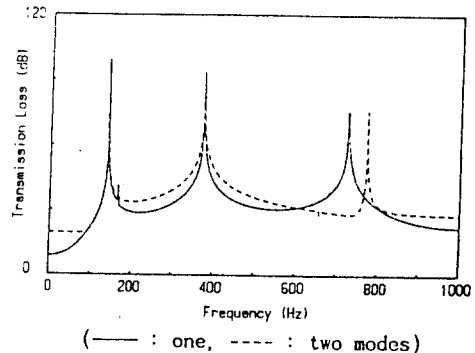


Fig. 12 Frequency response of acoustic filter

구할 수 있었다. (Fig. 11, Fig. 12)

V. 결 론

첫째로, 정규모드와 본드그래프를 이용하여 음향계를 집중파라미터로 모델링한 결과, 주파수영역 해석만이 가능했던 전달매트릭스법과는 달리 시간영역 해석도 가능케 되었다. 둘째로, 본드그래프를 이용하여 단순 확장형 소음기에 대해 투과손실(TL)을 계산한 결과, 비교적 잘 예측할 수 있었으며, 그리고 음향필터에 대한 적용을 제안하였다.

참고문헌

- 1) D. C. Karnopp, "Lumped Parameter Models of Acoustic filters Using Normal Mode and

- Bond Graph", Journal of Sound and vibration, vol. 42(4). pp. 437-446, 1975
- 2) B. Samanta, a. Mukherjee, "Analysis of Acoustoelastic Systems Using Modal Bond Graph", ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, vol. 112, pp. 108-115, 1990
- 3) R. C. Rosenberg, Instruction to Physical System Dynamics, McGraw-Hill, New York, 1983
- 4) D. C. Karnopp, D. L. Margolis, R. C. Rosenberg, System Dynamics: A unified Approach, John Wiley & Sone, Inc., 1990
- 5) L. E. Kinsler, Fundamental of acoustics, John Willey & Sons, Inc., 1983
- 6) 김양한 외 3명, "TOPIC 배기소음 저감을 위한 배기계의 재설계", 과학기술대학, 1990