韓國經營科學會誌
第17卷 第3號
1992年 12月

애핀법에 있어서 문제 축소를 위한 최적비기저의 결정 방법†

주종혁* · 박순달*

A Method Identifying the Optimal Nonbasic Columns for the Problem Size Reduction in Affine Scaling Algorithm

Jonghyuk Joo* and Soondal Park*

Abstract

A modified primal-dual affine scaling algorithm for linear programming is presented. This modified algorithm generates an ellipsoid containing all optimal dual solutions at each iteration, then checks whether or not a dual hyperplane intersects this ellipsoid. If the dual hyperplane has no intersection with this ellipsoid, its corresponding column must be optimal nonbasic. By condensing these columns, the size of LP problem can be reduced.

1. 서 론

최근에 사영법(Karmarkar algorithm)의 수행중에 제약식 계수행렬의 열을 제거, 문제의 크기를 축소하여 최소자승문제의 차원을 줄임으로써 계산의 효율성을 높이는 방법이 제안되었다[9, 10].

이러한 방법의 기본적인 개념은 기법의 수행도중 원/쌍대내부가능해를 이용하여 모든 쌍대최적해를 포함하는 다면체를 찾고 이 다면체를 포함하는 타원체를 형성한다. 타원체를 형성하는 이유는 타원체를 이용하면 최적비기저열를 Kuhn-Tucker 조건에 의해 쉽게 결정할 수 있기 때문이다.

애핀법(affine scaling algorithm)은 실용적인 면에서 매우 우수하다고 인정되고 있고 다른 내부점방식 기법에 비해 알고리즘의 구현이 간단하기 때문에 실제적으로 가장 많이 사용되는 기법이다[2, 8]. 그러나 타원체나 최적기저/비기저의 결정에 관한 연구는 거의 사영법에 국한되어 있고[1, 7, 10], 애핀법에 있어서 이에

*서울대학교 산업공학과

대한 연구는 이루어지고 있지 않다. 그 이유는 사영법에서는 사영변환이나 potential 함수, 사영법의 기본형 등의 특성 때문에 결과가 쉽게 도출되기 때문이다.

또한 최적비기저열의 판별을 보장하기 위해서는 쌍대최적해를 포함하는 타원체의 체적이 0으로 수렴되어야 하는데 이를 위해서는 쌍대간격(duality gap)이 0으로 수렴해야 된다. 원쌍대애핀법(primal/dual affine scaling algorithm)에서는 쌍대간격이 0으로 수렴하는 것이 보장되며, 쌍대최적해를 포함하는 다면체의 상, 하한을 구하기 위해 필요한 원/쌍대 내부가능해를 제공한다[6].

이 논문은 기법의 수행 도중 모든 쌍대최적해를 포함하는 타원체를 형성하여 최적비기저열을 조기에 판별해 내고, 최적비기저임이 확인된 열을 제거하여 문제의 차원을 줄임으로써 기법의 효율성을 높이는 변형된 원쌍대애핀법을 제시하고자 한다.

먼저 원쌍대애핀법의 계산절차에 대하여 간단하게 살펴보자

다음과 같은 선형계획 기본문제 (P)와 그 쌍대문제 (D)를 고려하자.

$$\begin{array}{llll} & \text{Min} \quad C^TX & & \text{Max} \ b^TY \\ (P) & \text{s. t.} \ AX=b & \Leftrightarrow \quad (D) & \text{s. t.} \ A^TY+Z=C \\ & \quad X \geq 0 & & \quad Z \geq 0 \end{array}$$

여기서 $A=(a_{ij})_{i=1\cdots m, j=1\cdots n}$, $C=(c_1,\cdots,c_n)^T$

$b=(b_1,\cdots,b_m)^T$, $X=(x_1,\cdots,x_n)^T$,

$Y=(y_1,\cdots,y_m)^T$,

$Z=(z_1,\cdots,z_n)^T$이다.

원쌍대애핀법은 매 계산단계에서 원/쌍대내부가능해를 구하고 쌍대간격이 주어진 허용오차 ε보다 작게 되면 종료하게 된다.

k번째 계산단계에서 X^k는 (P)의 내부가능해 즉, $AX^k=b$, $X^k > 0$, (Y^k, Z^k)는 (D)의 내부가능해 즉, $A^TY^k+Z^k=C$, $Z^k > 0$ 일 때, $(S^{-1}D)^{1/2}$를 변환행렬로 사용하는 애핀변환 $X \rightarrow W=((S^{-1}D)^{1/2})^{-1}X$를 고려하자. 여기서 $D=\text{diag}(X^k)$, $S=\text{diag}(Z^k)$로 정의되는 대각행렬이다.

이 애핀변환에 의해 X^k는 변환공간에서 내부가능해 $(SD)^{1/2}e$로 변환된다. 단 $e=(1,\cdots,1)^T$이다. 변수 (X, Y, Z)의 해의 개선방향 (d_x, d_y, d_z)은 각각 식(1),(2),(3)과 같다[6].

$$d_x=-[S^{-1}-S^{-1}DA^T(AS^{-1}DA^T)^{-1}AS^{-1}]\ DC \quad (1)$$
$$d_y=(AS^{-1}D^TA^T)^{-1}b \quad (2)$$
$$d_z=-A^T(AS^{-1}D^TA^T)^{-1}b \quad (3)$$

쌍대간격 $\gamma^k=C^TX^k-b^TY^k=(X^k)^TZ^k$가 주어진 허용오차 ε보다 작게 되면 종료하게 된다.

원쌍대애핀법의 계산절차를 정리하면 다음과 같다.

단계 1 : 초기화

원/쌍대 내부 가능해 X^0, Y^0, Z^0를 구하고, $r \in (0,1)$과 ε값을 정한다.

단계 2 : 해의 개선

i) $D=\text{diag}(X^k)$, $S=\text{diag}(Z^k)$

ii) d_x, d_y, d_z를 식(1)-(3)에 의해 구한다.

iii) $\alpha_x=\max\ \{\alpha : X^k+\alpha d_x \geq 0\}$

$\alpha_z=\max\ \{\alpha : Z^k+\alpha d_z \geq 0\}$

iv) $X^{k+1}=X^k+r\alpha_x d_x$, $Y^{k+1}=Y^k+r\alpha_z d_y$,

$Z^{k+1}=Z^k+r\alpha_z d_z$

$k \leftarrow k+1$

단계 3 : 최적판정

$\gamma^k=(X^k)^TZ^k \leq \varepsilon$ 이면, 종료하고, 그렇지 않으면, 단계2로 간다.

원쌍대애핀법의 계산절차중 단계 2의 ii)에서 해의 개선방향 d_x, d_y, d_z을 구하는 과정이 계산시간의 대부분을 차지한다. 이 단계에서 $(AS^{-1}D^TA^T)^{-1}$의 계산과정이 알고리즘의 효율성을 결정하며, $(AS^{-1}D^TA^T)^{-1}$의 계산복잡도는 기본적으로 문제크기의 3제곱에 비례한다.

이 논문에서 제시되는 변형된 원쌍대애핀법은 단계3에서 종료조건이 만족되지 않는 경우 최적비기저열을 판별하는 단계(단계4)와 판별된 최적비기저열을 제거하는 문제축소 단계(단계5)를 포함한다(3절 참조). 따라서 계산이 진행됨에 따라 최적비기저로 판정된 열들이 제거되어 문제의 크기가 축소됨에 따라 계산의 효율성이 높아진다.

2. 최적비기저열의 결정

최적비기저열을 판별하는 조건을 찾기 위해서는 먼저 모든 쌍대최적해를 포함하는 상, 하한을 갖는 다면체를 찾고 이 단면체를 포함하는 타원체를 정의하여야 한다.

이를 위해 현재의 내부가능해 X^k를 e로 옮기는 애핀변화 $W=D^{-1}X$, $D=diag(X^k)$를 생각하자. 이 애핀변화에 의하여 (P)와 (D)는 각각 (P_w)와 (D_w)문제로 변환된다.

$$\begin{array}{llll} & \min \quad C_k^TW & & \max\ b^TY \\ (P_w) & \text{s.t. } A_kW=b & \Leftrightarrow (D_w) & \text{s.t. } A_k^TY+Z=C_k \\ & \quad W\geq 0 & & \quad Z\geq 0 \end{array}$$

여기서 $C_k=DC$, $A_k=AD$.

D가 양수만을 요소로 갖는 대각행렬이므로 (D)와 (D_w)는 동일한 가능해 집합과 최적해를 갖게 되며 이 최적해를 Y^*라고 하자.

$A_ke=b$, $b^TY^k \leq b^TY^*$, $A_k^TY^*\leq C_k$, $De=X^k$ 이므로,

$$\begin{aligned} A_k^TY^* &= (I-ee^T)A_k^TY^*+(b^TY^*)e \\ &\geq (1-ee^T)C_k+(b^TY^*)e \\ &\geq C_k-(C^TX^k-b^TY^k)e \\ \therefore\ & C_k-\gamma^ke\leq A_k^TY^*\leq C_k \end{aligned} \tag{4}$$

가 성립한다.

식(4)는 쌍대문제(D)의 모든 쌍대최적해 Y^*를 포함하는 다면체를 의미하며, 이 때 다면체의 하한 $L=C_k-\gamma^ke$, 상한 $U=C_k$가 된다.

상한과 하한을 갖는 다면체를 포함하는 타원체는 다음과 같이 형성하면 된다. K를 식(5)와 같이 상, 하한을 갖는 다면체라고 하자.

$$K=\{Y\in R^m : L\leq A^TY\leq U\} \tag{5}$$

대각요소들이 비음인 임의의 대각행렬 F에 대하여,

$$E=\{Y\in R^m : (A^TY-L)^TF(A^TY-U)\leq 0\} \tag{6}$$

라고 정의하면, F가 비음인 대각행렬이므로 $K\subset E$가 되는 것은 당연하다.

다음의 [정리 1]은 E가 타원체가 될 조건을 제시하고 있으며 증명은 [7]을 참조하면 된다.

[정리 1] AFA^T가 양정치행렬(positive definite matrix)이면 식(6)에 의해 정의되는 E는 타원체이다.

식(4)에서 $A_kA_k^T$가 양정치행렬이므로 [정리 1]에 의해 다면체를 포함하는 타원체 E^k를 정

의할 수 있고, $R=(U+L)/2$, $B=(A_kA_k^T)^{-1}$, $Y_k=BA_kR$라고 하면,

$$E^k=\{Y\in R^m : (A_k^TY-L)^T\ (A_k^TY-U)\le 0\}$$
$$=\{Y\in R^m : (Y-Y_k)^TB^{-1}(Y-Y_k) \le Y_k^TB^{-1}Y_k-L^TU\} \qquad (7)$$

와 같이 정리된다. 여기서 Y_k는 타원체의 중심이 된다.

원쌍대애핀법을 사용하면, 쌍대간격이 0으로 수렴하게 되므로 E^k의 체적도 최적쌍대해집합을 이루는 쌍대초평면들을 정확히 가려낼 수 있을 정도로 줄어들게 될 것이다.

상보여유정리에 의해 모든 쌍대최적해 Y^*에 대하여 $z_i^*>0$ 이면, 모든 최적해 X^*에 대하여, $x_i^*=0$ 가 성립된다. $Z^k=C_k-A_k^T\ Y=DZ$ 이므로 $z_i^k>0$ 이면, $z_i>0$ 도 역시 성립한다.

$$(EP_i)\qquad \min\ z_i^k \quad \text{s.t. } Z^k= C_k-A_k^TY,\quad Y\in E^k$$

(EP_i)는 (D)의 i번째 쌍대초평면이 타원체 E^k와 만나는지 여부를 판정해 준다. 즉 원문제의 최적기저열에 대응하는 쌍대초평면은 쌍대최적해 Y^*에 대하여 $c_i-A_{.i}^T Y^*=0$ 이 되므로, 타원체와 반드시 만나게 되고 (EP_i)의 최적해 $(z_i^k)^*\le 0$이 된다. $(z_i^k)^*>0$이면, i번째 쌍대초평면은 타원체 E^k와 만나지 않게 되어 모든 쌍대최적해 Y^*에 대하여, $z_i^*=c_i-A_{.i}^T Y^*>0$가 성립되므로 이에 대응하는 원문제의 i번째 변수는 모든 최적해에서 비기저변수가 된다.

(EPi)의 최적해는 다음 [보조정리 2]와 같다.

[보조정리 2] (EPi)의 최적목적함수값 $(z_i^k)^*$는,

$$(z_i^k)^*=(c_k)_i-\phi^{1/2}p_i^{1/2}-(A_k)_{.i}^TY_k \qquad (8)$$

이다. 여기서 $L=C_k-\gamma^ke$, $U=C_k$, $R=(U+L)/2$, $B=(A_kA_k^T)^{-1}$, $Y_k=BA_kR$, $\phi=Y_k^TB^{-1}Y_k-L^TU$, $p_i=(A_k^TBA_k)_{ii}$.

증명 : (EPi)의 Kuhn-Tucker조건은 다음과 같다.

$$-(A_k)_{.i}+2\lambda B^{-1}(Y^*-Y_k)=0$$
$$\lambda[(Y^*-Y_k)^TB^{-1}(Y^*-Y_k)-\phi]=0$$
$$\lambda \ge 0$$

이 식을 풀면,

$$\lambda=((A_k)_{.i}^TB(A_k)_{.i}/\phi)^{1/2}/2,$$
$$Y^*=(\phi/((A_k)_{.i}^TB(A^k)_{.i})^{1/2}B(A_k)_{.i}+Y_k$$

가 되고 $(z_i^k)^* = (c_k)_i-(A_k)_{.i}^T\ Y^*$로 부터 식 (8)을 얻을 수 있다.■

상보여유정리와 [보조정리 2]에 의해 최적비기저열을 판별하는 다음의 [정리 3]을 얻을 수 있다.

[정리 3] X^k가 (P)의 내부가능해, $D=diag(X^k)$이고, $(z_i^k)^*$가 식(8)과 같을 때, $(z_i^k)^*>0$이면, A의 i번째 열은 최적비기저열이다.

$P\equiv A_k^TBA_k$라고 정의하면, P는 사영행렬이므로 사영행렬의 성질을 이용하여,

$$\phi = Y_k^TB^{-1}Y_k-L^TU = -\|(1-P)C_k\|^2+\gamma^ke^T(I-P)C_k+(1/4)(\gamma^k)^2\|Pe\|^2 \qquad (9)$$

$$(c_k)_i-(A_k)_{.i}^TBA_kR=(C_k-A_k^TBA_kR)_i =((I-P)C_k)_i + (1/2)\gamma^k(Pe)_i \qquad (10)$$

와 같이 정리할 수 있다. 식(9),(10)을 이용하여 [정리 3]을 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

[종정리 4] $((1-P)C_k)_i+(1/2)\gamma^k(Pe)_i-\phi^{1/2} p_i^{1/2}>0$ (11)

이면 A의 i번째 열은 최적비기저열이다. 여기서 ϕ는 식(9)와 같다.

원문제가 비퇴화 유일최적해를 갖는 경우에는, $(z_i^k)^*>0$인 i가 (n−m)개이면, 나머지 m개의 열은 최적기저이므로 이 단계에서 모든 최적기저열을 결정할 수 있고, 따라서 기법을 종료할 수 있다. 그러므로 실제적인 의미에서 하나의 알고리즘의 종료조건으로 활용할 수도 있다.

3. 문제축소기법

k번째의 계산단계에서 [종정리 4]에 의해 r개의 열이 최적비기저로 판명되었을 때, 이 열들을 제거하여 (P)의 문제 크기를 줄이는 방법에 대하여 살펴 보자.

A의 마지막 r개의 열 $A_{\cdot j}$, $j=n-r+1,\cdots,n$ 이 최적비기저로 판명된 열이라고 가정해도 일반성을 잃지 않는다. 식(12), (13)과 같이 양수 α에 대하여 이 열들을 하나의 열로 압축한다.

$$a=(1/\alpha)\{\sum_{j=n-r+1}^{n} x_j^k A_{\cdot j}\} \tag{12}$$

$$\delta=(1/\alpha)\{\sum_{j=n-r+1}^{n} x_j^k c_j\} \tag{13}$$

$$\bar{A}=(A[n-r],\ a)\ \in\ R^{m\times(n-r+1)}$$

$$\bar{C}=(C[n-r]^T,\ \delta)^T\ \in\ R^{n-r+1},$$

여기서 [n]은 백터(행렬)의 처음 n개의 요소(열)을 의미한다.

$$\bar{X}=(X^k[n-r]^T,\ \alpha)^T \tag{14}$$

라고 하면, $\bar{X}$는 $\bar{A}\bar{X}=b$, $\bar{C}^T\bar{X}=C^TX^k$를 만족하므로 축소문제 (RP)의 내부 가능해가 된다.

$$\begin{array}{llcll} & \min\ C^TX & & & \max\ \ b^TY \\ \text{(RP)} & \text{s.t. } \bar{A}X=b & \Leftrightarrow & \text{(RD)} & \text{s.t. } \bar{A}^TY+Z=\bar{C} \\ & X\geq 0 & & & Z\geq 0 \end{array}$$

$\bar{Y}=Y^k$, $\bar{Z}=(Z^k[n-r]^T,\ \beta)^T$, $\beta=\delta-a^TY^k$라고 놓으면, $(\bar{Y},\ \bar{Z})$는 (RP)의 쌍대문제 (RD)의 내부가능해가 된다.

$\bar{X}$와 $(\bar{Y},\ \bar{Z})$를 각각 (RP)와 (RD)의 내부가능해로 하여 원쌍대애핀법을 수행하면, 계산과정에서 얻어지는 해는 언제나 같은 목적함수값을 갖는 원문제 (P)의 해와 대응될 수 있다.

즉, $\bar{X}^k$를 (RP)의 임의의 가능해라고 할 때.

$$x_i^k=\begin{cases}\bar{x}_i^k, & i=1,\cdots,n\text{-}r\\ \bar{x}^k_{n-r+1}x_i^k/\alpha & i=n-r+1,\cdots,n\end{cases} \tag{15}$$

라고 놓으면 X^k는 $AX^k=b$, $C^TX^k=\bar{C}^T\bar{X}^k$를 만족한다.

따라서 열의 압축 과정에 의해서 만들어진 축소문제 (RP)와 원문제(P)의 최적목적함수값이 같고 서로의 최적해에 대응하는 최적해를 식(14)와 (15)에 의해 찾을 수 있다.

[정리 5] A의 마지막 r개의열 $A_{\cdot j}$, $j=n-r+1,\cdots,n$이 최적비기저열이라고 하고, 양수 α에 대하여, 식(12)에 의해 구해진 a는 (RP)의 최적비기저열이다.

증명 : 만일 a가 (RP)의 최적기저열이라고 하면, $\bar{x}^*_{n-r+1} > 0$이 되고, $j=n-r+1,\cdots,n$에 대하여,

$$\bar{A}\bar{X}^* = A[n-r]\bar{X}^*[n-r]+\bar{x}^*_{n-r+1}a$$
$$= A[n-r]\bar{X}^*[n-r]+\bar{x}^*_{n-r+1}\{(1/\alpha)\sum_{j=n-r+1}^{n} x_j^k A_{\cdot j}\}$$
$$= A[n-r]X^*[n-1]+\sum_{j=n-r+1}^{n} x_j^* A_{\cdot j}$$
$$= AX^*$$

이므로 $x_j^*=\bar{x}^*_{n-r+1}x_j^k/\alpha>0$ 이 된다. 이것은 최적해에서 이 열들이 비기저라는 가정에 위배된다.

따라서 a는 (RP)의 최적비기저열이다.■

B를 (RP)의 최적기저행렬, $\bar{X}^*_B$는 (RP)의 최적기저변수라고 한다면, [정리 5]에 의해 $X^*_B=\bar{X}^*_B$라고 하면, X^*_B는 (P)의 최적기저변수이다. 따라서 B가 (RP)의 최적기저행렬이면, B는 또한 (P)의 최적기저행렬이다.

최적 비기저 결정 및 문제 축소 방법을 포함한 원쌍대애핀법의 계산절차를 정리하면 다음과 같다.

단계 1 : 초기화

원/쌍대 내부 가능해 X^0, Y^0, Z^0를 구하고, $r \in (0,1)$과 ε값을 정한다.

단계 2 : 해의 개선

i) $D=\text{diag}(X^k)$, $S=\text{diag}(Z^k)$

ii) d_x, d_y, d_z를 식(1)-(3)에 의해 구한다.

iii) $\alpha_x=\max\{\alpha : X^k+\alpha d_x \geq 0\}$

$\alpha_z=\max\{\alpha : Z^k+\alpha d_z \geq 0\}$

iv) $X^{k+1}=X^k+r\alpha_x dx$, $Y^{k+1}=Y^k+r\alpha_z d_y$,

$Z^{k+1}=Z^k+r\alpha_z d_z$

$k \leftarrow k+1$

단계 3 : 최적판정

$\gamma^k=(X^k)^TZ^k \leq \varepsilon$ 이면, 종료하고, 그렇지 않으면, 단계 4로 간다.

단계 4 : 최적비기저 판정

i) $C_k = DC$, $A_k = AD$,

$P = A_k^T(A_kA_k^T)^{-1}A_k$를 구한다.

ii) $Z^*=(1-P)C_k+(1/2)\gamma^kPe-\phi^{1/2}p^{1/2}$을 구한다.

여기서, $p^{1/2}$는 P의 대각요소의 제곱근으로 이루어진 백터,

$\phi = -\|(1-P)C_k\|^2+\gamma^ke^T(1-P)C_k+(1/4)(\gamma^k)^2\|Pe\|^2$이다.

iii) $i = 1,\cdots,n$에 대하여.

$z_i^* > 0$ 인 i를 비기저 후보 집합 NB에 넣는다.

iv) $|NB| \geq n-m$이면, 현재의 해를 최적해로 하고 종료한다.

$2 \leq |NB| \leq n-m-1$ 이면, 단계5로 간다.

그렇지 않으면 단계2로 간다.

단계 5 : 문제 축소

i) $NB=\{j_1,\cdots,j_r\}$라고 하고,

$i \notin NB$인 i들의 집합을 $\{i_1,\cdots,i_{n-r}\}$ 이라고 하고,

$\alpha=1$이라고 할 때,

$$a=\sum_{q=1}^{r} x_{j_q}^k A_{\cdot j_q}$$

$\delta=\sum_{q=1}^{r} x_{j_q}^k c_{j_q}$를 구하고,

$\bar{A}=(A_{\cdot i_1},\cdots,A_{\cdot i_{n-r}}, a)$,

$\bar{C}=(c_{\cdot i_1},\cdots,c_{\cdot i_{n-r}}, \delta)^T$,

$\bar{X}=(x_{i_1}^k,\cdots, x_{i_{n-r}}^k, 1)^T$

$\bar{Z}=(z_{i_1}^k,\cdots, z_{i_{n-r}}^k, \beta)^T$ 라고 놓는다.

여기서, $\beta = \delta-a^TY^k$.

ii) $n \leftarrow n-r+1$

$A \leftarrow \bar{A}$.

$C \leftarrow \bar{C}$,
$X^k \leftarrow \bar{X}$,
$Z^k \leftarrow \bar{Z}$라고 두고, 단계 2로 돌아 간다.

4. 결론 및 추후 연구방향

이 논문은 기법의 수행 도중 모든 쌍대최적해를 포함하는 다면체의 상, 하한을 찾고, 이 다면체를 포함하는 타원체를 형성하는 방법과 이 타원체를 이용하여 최적비기저열을 판정할 수 있는 조건을 제시하였으며, 최적비기저임이 판명된 열을 제거하여 문제의 크기를 줄이면서 알고리즘을 계속 수행 할 수 있는 변형된 원쌍대애핀법을 제시하고 있다.

특히 비퇴화 유일최적해를 갖는 문제에 대해서는 최적비기저열의 판정 조건을 알고리즘 종결조건으로 활용할 수 있다.

추후 연구사항으로 첫째, 알고리즘에서 사용되는 애핀변환를 바로 사용하여 모든 쌍대최적해를 포함하는 다면체의 상, 하한을 찾는 방법과 둘째, 쌍대최적해를 포함하는 타원체 체적의 수렴성 및 감소율의 분석 세째, 본 연구 결과의 실제적 효율성에 대한 실험적인 검증 등을 고려할 수 있다.

참 고 문 헌

[1] 김병재, "Karmarkar 기법에 있어서 최적기저결정에 관한 연구," 공학박사학위논문, 서울대학교(1990).

[2] Adler,I., N.Karmarkar, M. Resende, and G. Veiga, "An implementation of Karmarkar's algorithm for linear programming," *Math. Programming*, Vol. 44 (1989), pp.297-335.

[3] Barnes,E.R., "A variation on Karmarkar's algorithm for solving linear programming problems," *Math. Programming*, Vol. 36 (1986), pp.174-182.

[4] Karmarkar, N., "A new polynomial time algorithm for linear programming," *Combinatorica*, Vol. 4(1984), pp.373-395.

[5] Monteiro,R. and I.Adler, "Interior path following primal dual algorithms part I:Linear Programming," *Math. Programming*, Vol.44(1989), pp.27-42.

[6] ______, ______ and M.Resend, "A polynomial time primal dual affine scaling algorithm for linear and convex quadratic programming and its power series extention," *Math. of OR*, Vol.15(1990), pp.191-214

[7] Todd,M., "Improved bounds and containing ellipsoids in Karmarkar's linear programming algorithm," *Math. of OR*, Vol.13 (1989), pp.650-659.

[8] Vanderbei,R., M.Meketon, and B.A.Freedman, "A modification of Karmarkar's linear programming algorithm,"*Algorithmica*, Vol.1(1986), pp.395-407.

[9] Ye,Y., "Eliminating columns in the simplex method for linear programming," *JOTA*, Vol.63(1989), pp.69-77.

[10] ______, "A 'Build-down' scheme for linear programming," *Math. Programming*, Vol. 46(1990), pp.61-72.