

동적로트크기결정모형과 EOQ모형에 있어서 가동준비비용의 감소효과[†]

이상범*

The Effects of Set-up Cost Reduction in the Dynamic
Lot Size Model and the EOQ model

Sang-Bum Lee*

Abstract

Set-up reduction is an important aspect of the Japanese Just-In-Time(JIT) and Zero Inventory(ZI) concepts. In this paper, we first analyze the effects of set-up cost reduction on total inventory, average lot size and forecast horizon in the dynamic lot size model. We also examine the various effects of set-up cost reduction in the EOQ model and explain why many Japanese firms try to cut set-up cost and/or set-up time greatly.

1. 서 론

최근 일본기업의 JIT(Just-In-Time)와 ZI (Zero Inventory) 개념이 생산재고관리분야에서 크게 주목을 받고 있다. 엄밀히 말해 JIT는 ZI보다 넓은 개념이지만 두 용어는 현실적으로 거의 동의어로 받아들여지고 있다. JIT/ZI 접근법은 약 30년 전 일본의 도요다자동차회사 (Toyota Motor Co.)에서 시작되어 많은 일본

기업에서 널리 채택되었고, 1980년대 초반부터는 미국기업에서도 사용되고 있다.

JIT/ZI에서는 재고는 비효율에서 기인하며 따라서 재고가 많을수록 비효율이 크다고 보고 있다. JIT/ZI의 중요한 목표의 하나는 재고의 원인을 제거함으로써 재고를 가능한 최저수준으로 낮추자는 데 있다. 일단 재고의 원인이 제거되면 생산은 매우 효율적이 된다는 것이다. 따라서 재고수준은 생산시스템의 효율을 나타내는 척도로 간주된다

* 이 논문은 1991년도 서울시립대학교 학술연구조성비에 의하여 연구되었음

* 서울시립대학교 경영학과

JIT/ZI에서 줄이거나 제거하려고 하는 재고의 원인은 수요와 공급의 불확실성, 나쁜 품질, 나쁜 일정계획, 기계의 고장 등 여러가지가 있으나 가장 결정적인 재고원인중의 하나는 가동준비비용(set-up cost)이다. 예를 들면 가장 기본적인 EOQ(Economic Order Quantity)모형에서도 재고를 발생시키는 것은 가동준비비용이다. 따라서 JIT/ZI에서는 재고를 줄이기 위해 가동준비비용을 발생시키는 가동준비시간(set-up time)을 줄이려고 한다. 예를 들면 도요다에서는 재고를 줄이기 위해 가동준비시간을 크게 단축하려고 많은 노력을 기울이고 있다. 그 결과 예전에는 8~10시간까지 소요되던 가동준비시간이 수분내로 줄어들었으며, 도요다는 모든 형판(die)의 가동준비시간을 10분 이내의 한자리 숫자(분)로 줄이는 것을 목표로 하고 있다[14]. 또한 가동준비비용의 감소와 가동준비시간의 단축은 재고수준과 재고비용의 감소뿐만 아니라 품질향상, 유효생산능력의 증대, 유연성(flexibility)의 증대 등과 같은 효과도 가져오는 것으로 알려져 있다[4, 12]. 따라서 가동준비비용의 감소와 가동준비시간의 단축은 JIT/ZI의 가장 중요한 요소중의 하나라고 볼 수 있다. JIT/ZI에 관한 보다 상세한 내용은 Hall[4], Monden[7], Schonberger[12], Shingo[14] 등에서 찾을 수 있다.

JIT/ZI에 있어서 가동준비비용과 가동준비시간의 감소효과에 관한 수학적 분석은 1980년대 중반부터 시작되었다. Porteus[9, 10]는 EOQ모형에 가동준비비용을 줄이기 위한 투자비용을 포함시켜 최적가동준비비용을 결정하는 틀(framework)을 제시하였다. 또한 Porteus[11]는 가동준비비용의 감소가 품질향상에 어떻게 기여하는가를 수학적으로 분석하였다. 한편 Spence와 Porteus[15]는 가동준비시간의 단

축으로 인한 유효생산능력의 증대효과를 수학적으로 분석하였고, Karmarkar[5]는 가동준비시간의 단축이 생산시스템의 전반적인 이용률과 효율성을 어떻게 개선시킬 수 있는가를 연구하였다.

그러나 이상의 연구들은 모두 단순한 EOQ 모형에 근거하고 있다. 이에 비해 Zangwill[17]은 EOQ모형의 동적형태(dynamic version)인 동적로트크기결정모형(Dynamic Lot Size Model : 이하 DLSM이라 함)에서 가동준비비용의 감소에 따른 여러가지 효과를 수학적으로 분석하였다. Zangwill[18]은 또한 일렬설비 생산시스템(facilities-in-series production system)에서 재고를 가져가는 설비의 수를 가능한 줄이기 위해서는 어떤 설비의 가동준비비용이 감소되어야 하는가를 분석하였다. 한편 안병훈 등[1]은 Zangwill[17]의 연구결과가 생산능력제약이 있는 DLSM에서도 성립될 수 있는지를 검토하였다.

이와 같이 JIT/ZI에 있어서 가동준비비용 또는 가동준비시간의 감소효과에 관한 수학적 분석은 최근에 이르러 이루어지고 있고 연구량도 아직까지는 많지 않다고 볼 수 있다.

본 논문에서는 Zangwill[17]이 간과한 DLSM에서의 가동준비비용의 감소효과에 관한 새로운 연구결과를 제시하고, 또한 EOQ모형에서 가동준비비용의 감소효과를 여러가지 측면에서 분석·음미해 보고자 한다. 이를 위해 본 논문은 다음과 같이 구성된다. 먼저 § 2에서는 DLSM을 간단히 소개한다. § 3에서는 DLSM에 있어서의 가동준비비용의 감소효과에 관한 Zangwill[17]의 연구결과를 요약·소개한 다음, 가동준비비용의 감소가 총재고수준, 평균로트크기 및 수요예측기간에 미치는 영향에 관한 새로운 연구결과를 제시한다. § 4에서는 EOQ모

형에서 가동준비비용의 감소효과를 여러 측면에서 분석·음미한다. 마지막으로 §5에서는 결론 및 향후 연구과제를 제시한다.

2. 동적로트크기 결정모형

Wagner와 Whitin[16]에 의해 처음으로 제시된 DLSM에서는 수요와 모든 비용이 정태적(stationary)인 EOQ모형과는 달리 수요와 비용이 매기간마다 달라질 수 있다(DLSM에 대한 체계적인 review로는 Bahl et al.[2] 참조).

계획대상기간이 n 이라 할 때 X_i 를 기간 i 의 생산량, d_i 를 기간 i 의 수요, 그리고 I_i 를 기간 i 말 재고라 하자(단 $I_0 \equiv 0$). 그러면 매기간마다 수요를 충족시키는 균형식은 다음과 같다.

$$I_{i-1} + X_i - I_i = d_i, \quad i=1,2 \dots, n \quad (1)$$

$$X_i \geq 0, \quad I_i \geq 0.$$

비용에 있어서는 $h_i(I_i)$ 를 기간 i 의 재고유지비용으로 정의하고, h_i 는 오목함수(concave function)이며 $h_i(\cdot) \geq 0$ 으로 가정한다. 그리고 생산비용함수 p_i 의 형태는 다음과 같다.

$$p_i(X_i) = K_i \delta(X_i) + \bar{p}_i(X_i), \quad i=1,2 \dots, n \quad (2)$$

$$\text{여기서 } \delta(X_i) = \begin{cases} 0 & X_i = 0, \\ 1 & X_i > 0, \end{cases}$$

$K_i \geq 0$, $\bar{p}_i(0) = 0$, $\bar{p}_i(X_i) \geq 0$ 그리고 \bar{p}_i 는 오목함수이다. 식 (2)에서 K_i 는 기간 i 의 가동준비비용을, $\bar{p}_i(X_i)$ 은 (가동준비후) 기간 i 에서 X_i 만큼 생산하는 비용을 의미한다. 그리고 \bar{p}_i 가 오목함수이므로 p_i 또한 오목함수가 된다.

이상을 정리하면 DLSM의 수학적 형태는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{Min } & \sum_{i=1}^n [p_i(X_i) + h_i(I_i)] \\ \text{s.t. } & I_{i-1} + X_i - I_i = d_i, \quad i=1, \dots, n, \\ & X_i \geq 0, \quad I_i \geq 0, \quad I_0 \equiv 0. \end{aligned} \quad (3)$$

이 DLSM의 최적해는 잘 알려진대로 다음과 같은 성질을 갖는다[16].

$$I_{i-1} X_i = 0, \quad \forall i. \quad (4)$$

따라서 생산은 그 기간초(즉 직전기간 말)의 재고가 0이어야만 일어날 수 있다. 바꾸어 말하면 최적해에서 어떤 기간에 생산이 일어나면 그 기간초(직전기간 말)의 재고는 0이라는 것이다. 또한 최적해의 성질 (4)로부터 다음과 같은 논리가 유도된다. 최적해에서 만일 어떤 기간 i 에서 생산이 일어나면 그 생산량은 기간 i 부터 어떤 기간 $j (\geq i)$ 까지의 수요, 즉 정확히 어떤 정수기간 동안의 수요(demand for an exact integral number of periods)를 충족시킨다는 것이다. 따라서 최적해에서 모든 i 에 대해 다음 성질이 성립한다.

$$X_i = 0 \text{ 또는 } \sum_{k=i}^j d_k, \quad i \leq j \leq n. \quad (5)$$

이러한 최적해의 성질을 이용하면 DLSM은 다음과 같은 $O(n^2)$ 전진동적계획법(forward dynamic programming algorithm)에 의해 쉽게 풀린다. 즉,

$$\begin{aligned} F(n) &= n\text{-기간문제의 최소비용}, \quad n=1,2, \dots, \\ F(j,n) &= \text{최종 생산(가동준비)이 기간 } j \text{에서 일어날 때의 최소비용}, \end{aligned}$$

$j^*(n) = n$ -기간문제의 최적해에서 최종생산이 일어나는 기간

으로 정의하면

$$\begin{aligned} F(n) &= F[j^*(n), n] \\ &= \min_{1 \leq j \leq n} F(j, n) \\ &= \min_{1 \leq j \leq n} \{F(j-1) + K_j + p_j (\sum_{i=j}^n d_i) \\ &\quad + \sum_{k=j}^{n-1} h_k (\sum_{i=k+1}^n d_i)\} \end{aligned} \quad (6)$$

가 된다.

3. 동적로트크기결정모형에 있어서 가동준비비용의 감소효과

여기서는 Zangwill[17]이 분석한 DLSM에 있어서의 가동준비비용의 감소효과를 요약·소개한 다음, 새로운 연구결과를 제시한다.

3.1 Zangwill의 연구결과

1987년 Zangwill[17]의 연구결과가 나오기 전까지의 DLSM에 관한 모든 연구에서는 비용은 주어진 고정적인 것으로 보았다. 이에 비해 Zangwill은 재고를 줄이기 위해 가동준비비용(가동준비시간)을 줄이는 JIT/ZI의 개념을 이해하는 데 도움이 될 수 있도록 DLSM에서 가동준비비용의 감소효과를 수학적으로 분석하였다. 여기서는 이 결과를 요약해 보기로 한다.

Zangwill은 먼저 가동준비비용이 감소하면 재고수준이 반드시 줄어드는 EOQ모형과는 달

리(EOQ모형에서 가동준비비용의 감소효과는 §4에서 자세히 다룰 것임), DLSM에서는 가동준비비용이 감소하더라도 재고수준과 재고를 보유하는 기간의 수는 반드시 줄어드는 것이 아니라 오히려 증가할 수도 있음을 예를 들어 보였다(이 예에서는 매기간의 가동준비비용의 감소분이 서로 다른 경우를 다루었음).

이어서 Zangwill은 가동준비비용이 매기간 같은 금액만큼 줄어드는 경우를 분석하였다. 모든 기간의 가동준비비용이 R 만큼 똑같이 줄어들 때 $K_i(R)$ 을 $R(0 \leq R \leq K_i)$ 만큼 감소한 후의 기간 i 의 가동준비비용으로 정의하면

$$K_i(R) = K_i - R, \quad i = 1, \dots, n \quad (7)$$

이 된다. 한편 $f(s)$ 를 (3)의 (가동준비비용이 감소하기 전) DLSM에서 n 기간 중 s 번 생산이 일어난다고 할 때의 최소 생산 및 재고비용으로, 그리고 $g_s(R)$ 을 매기간의 가동준비비용이 R 만큼 감소한 DLSM에서 n 기간 중 s 번 생산이 일어날 때의 최소 생산 및 재고비용으로 정의하면

$$g_s(R) = f(s) - sR \quad (8)$$

이 된다. 또한 $g_s(R)$ 을 매기간의 가동준비비용이 R 만큼 감소한 DLSM의 최소 생산 및 재고비용으로 정의하면

$$g(R) = \min_{s=1, \dots, n} g_s(R) = \min_{s=1, \dots, n} \{f(s) - sR\} \quad (9)$$

이 성립한다.

식 (9)에서 $g(R)$ 은 R 에 대해 감소함수(decreasing function)이며, 또한 $g(R)$ 은 R 에 대해 선형(linear)인 함수들의 최소값으로 이루어지므로

오목함수임을 알 수 있다. 즉 $g(R)$ 은 R 에 대해 감소하는 오목함수(decreasing concave function)이다. 그러므로 $g(R)$ 의 기울기는 R 에 대해 단조감소하며 따라서 R 이 증가함에 따라 생산이 일어나는 기간의 수 s 는 단조증가 한다. 이는 다시 식 (4)로부터 R 이 증가함에 따라 재고가 0이 되는 기간의 수가 단조증가함(또는 재고를 보유하는 기간의 수가 단조감소함)을 의미한다. 또한 $g(R)$ 는 R 에 대해 감소하는 오목함수이므로 R 이 증가함에 따라 $g(R)$ 은 감소하며 그 감소폭(한계감소율)은 단조증가 한다.

이상의 결과를 요약·정리하면 다음 [정리 1]과 같다.

[정리 1] (3)의 DLSM에서 가동준비비용의 감소가 (7)의 형태를 취하면 가동준비비용의 감소분 R 이 증가함에 따라 최적해에서 다음의 성질이 성립한다.

- (i) 총비용은 감소하며 그 감소폭(한계감소율)은 단조증가한다.
- (ii) 생산이 일어나는 기간의 수는 단조증가하며, 이에 따라 재고를 보유하는 기간의 수는 단조감소(또는 재고가 0이 되는 기간의 수는 단조증가)한다.

[정리 1]의 (i)에서 보는 바와 같이 가동준비비용이 식 (7)의 형태로 감소하면 총비용은 감소한다. 그러나 총재고비용은 반드시 감소하지는 않는다. 이와 관련하여 Zangwill은 R 이 증가함에 따라 총비용은 감소하나 총재고비용은 오히려 증가하는 예를 제시하였다. 나아가 Zangwill은 생산비용함수가 정태적이고 (고정비+비례비)의 형태를 취하면, 즉

$$p_i(X_i) = K\delta(X_i) + \bar{p}X_i, \quad \forall i \quad (10)$$

이면 R 이 증가함에 따라 총재고비용은 반드시 단조감소함을 증명하였다. 이 결과를 다음 [정리 2]로 요약한다.

[정리 2] (3)의 DLSM에서 가동준비비용의 감소가 (7)의 형태를 취하고 생산비용함수가 (10)의 형태를 취한다면 가동준비비용의 감소분 R 이 증가함에 따라 총재고비용은 단조감소한다.

3.2. 새로운 연구결과

여기서는 DLSM에서 가동준비비용의 감소가 총재고수준, 평균로트크기 및 수요예측기간에 미치는 영향에 관한 새로운 연구결과를 제시한다.

3.2.1 가동준비비용의 감소가 총재고수준에 미치는 영향

앞서 요약·정리한 Zangwill의 연구는 “EOQ 모형에서와 같이 DLSM에서도 가동준비비용이 감소하면 재고가 줄어드는가?”라는 근본적인 질문에서 출발하였다. 그러나 Zangwill의 연구 결과는 이 질문에 대해 직접적인 답변보다는 간접적인 답변만을 제시하고 있다. 즉 Zangwill은 [정리 1]의 (ii)와 같이 가동준비비용이 (7)의 형태로 감소하면 재고를 보유하는 기간의 수가 단조감소함(바꾸어 말하면 재고가 0이 되는 기간의 수가 단조증가함)을 증명하고, 이 결과에 의해 가동준비비용이 감소하면 보다 무재고(ZI)에 가까이 간다고 주장하였다. 또한 [정리 2]와 같이 가동준비비용의 감소가 (7)의

형태를 취하고 생산비용함수가 (10)의 형태를 취한다면 가동준비비용이 감소함에 따라 총재고비용은 단조감소한다는 것이다. 따라서 Zangwill은 가동준비비용과 재고수준과의 관계를 직접적으로 규명하지는 못하였다고 볼 수 있다.

여기서는 Zangwill이 간과한 다음과 같은 몇 가지 점을 지적하고 분석함으로써 앞서 제기된 질문 즉 가동준비비용의 감소가 재고수준에 미치는 영향에 대해 직접적인 답을 제시하고자 한다.

첫째, 가동준비비용의 감소가 (7)의 형태를 취하면 가동준비비용이 감소함에 따라 [정리 1]의 (ii)와 같이 재고를 보유하는 기간의 수는 단조감소하지만 총재고수준은 오히려 증가할 수도 있음을 보인다.

둘째, 가동준비비용의 감소가 (7)의 형태를 취하고 생산비용함수가 (10)의 형태를 취하면 [정리 2]와 같이 가동준비비용이 감소함에 따라 총재고비용은 단조감소하지만 이 경우 역시 총재고수준은 오히려 증가할 수도 있음을 보인다.

셋째, 가동준비비용이 감소함에 따라 총재고수준이 반드시 단조감소하는 비용구조의 충분 조건을 제시하고 이를 증명한다.

먼저 가동준비비용의 감소가 (7)의 형태를 취하더라도 가동준비비용의 감소가 총재고수준을 오히려 증가시킬 수도 있음을 다음의 [예 1]을 통해 보인다.

[예 1] 4-기간 DLSM에서 수요를 $d_1=5$, $d_2=4$, $d_3=7$, $d_4=2$ 라 하자. 재고유지비용함수는 $h_i(I_i)=h_i I_i$ 로 놓고 $h_1=1$, $h_2=1$, $h_3=4$ 라 하자. 가동준비비용은 $K_1=8$, $K_2=6$, $K_3=10.5$, $K_4=10$ 이라 하고, $\bar{p}_i(X_i)=\bar{p} X_i$ 로 두면 단위당

생산비용은 고려할 필요가 없게 된다(왜냐하면 모든 가능해에서 총생산비용은 $\bar{p} \sum_{i=1}^n d_i$ 로 같기 때문임). 이 4-기간 DLSM을 (6)의 동적계획해법으로 풀어보면 최적해는 $X_1=9$, $X_2=0$, $X_3=9$, $X_4=0$ 그리고 $I_1=4$, $I_2=0$, $I_3=2$, $I_4=0$ 가 된다.

이제 매기간의 가동준비비용이 모두 3만큼 줄었다고 하자(즉 $R=3$). 그러면 $K_1=5$, $K_2=3$, $K_3=7.5$, $K_4=7.5$ 된다. 이 경우 최적해를 구해보면 $X_1=5$, $X_2=11$, $X_3=0$, $X_4=2$ 그리고 $I_1=0$, $I_2=7$, $I_3=0$, $I_4=0$ 가 된다.■

이 예에서 보는 바와 같이 매기간의 가동준비비용이 모두 일정하게 3만큼 감소함에 따라 재고를 보유하는 기간의 수는 2기간에서 1기간으로 줄어들었다. 이는 Zangwill의 연구결과 ([정리 1]의 (ii))와 일치한다. 하지만 총재고는 6에서 7로 오히려 늘어났음을 알 수 있다.

다음은 가동준비비용의 감소가 (7)의 형태를 취하고 생산비용함수가 (10)의 형태를 취하는 경우 가동준비비용이 감소함에 따라 총재고비용은 단조감소하지만 이 경우 역시 총재고수준은 오히려 증가할 수도 있음을 다음의 [예 2]를 통해 보인다.

[예 2] 4-기간 DLSM에서 수요를 $d_1=1$, $d_2=1$, $d_3=5$, $d_4=1.5$ 라 하자. 재고유지비용함수는 $h_i(I_i)=h_i I_i$ 로 놓고 $h_1=6$, $h_2=1$, $h_3=6$ 이라 하자. 가동준비비용은 $K_i=K=13$, $\forall i=1,2,3,4$ 라 하고, $\bar{p}_i(X_i)=\bar{p} X_i$ 라 하자. 이 문제의 최적해를 구해 보면 $X_1=2$, $X_2=0$, $X_3=6.5$, $X_4=0$ 그리고 $I_1=1$, $I_2=0$, $I_3=1.5$, $I_4=0$ 가 된다.

이제 이 문제에서 매기간의 가동준비비용이 7만큼 줄어(즉 $R=7$) $K=6$ 이라 하자. 이 경우 최적해를 구해 보면 $X_1=1$, $X_2=6$, $X_3=0$,

$X_4=1.5$ 그리고 $I_1=0$, $I_2=5$, $I_3=0$, $I_4=0$ 가 된다.■

이 예에서 보면 가동준비비용 K 가 13에서 6으로 감소함에 따라 총재고비용이 15에서 5로 줄어듬을 알 수 있다. (또한 재고를 보유하는 기간의 수도 2기간에서 1기간으로 줄어든다.) 이 결과는 Zangwill의 [정리 2]와 일치한다. 하지만 이 경우에도 총재고는 2.5에서 5로 오히려 늘어났음을 알 수 있다.

그렇다면 어떤 경우에 가동준비비용이 감소하면 총재고수준이 반드시 단조감소하는가? [예 1]과 [예 2]에서 보면 단위당 재고유지비용이 매기간 급격하게 변하기 때문에 가동준비비용이 감소하더라도 총재고가 오히려 증가하는 것이 아닌가하는 직관을 얻을 수 있다. 따라서 재고유지비용함수가 선형(linear)이고 정태적이면, 즉

$$h_i(I_i) = hI_i, \quad \forall i \quad (11)$$

이면 다음 [정리 3]과 같이 보다 강한 결과를 얻을 수 있다.

[정리 3] (3)의 DLSM에서 가동준비비용의 감소는 (7)의 형태를, 생산비용함수는 (10)의 형태를 그리고 재고유지비용함수는 (11)의 형태를 취한다고 가정하자. 그러면 가동준비비용의 감소분 R 이 증가함에 따라 최적해에서 총재고수준은 반드시 단조감소한다.

증명: 먼저 $I_i^s (i=1,2,\dots,n)$ 를 n 기간중 s 번 ($s=1,\dots,n$) 생산(가동준비)이 일어날 때의 최적해에서 각 기간별 재고라 하고

$$I^s = \sum_{i=1}^n I_i^s$$

로 정의하자(즉 I^s 는 n 기간중 s 번 생산이 일어날 때의 최적해에서 총재고).

그러면 n 기간중 s 번 생산이 일어날 때의 최소비용 $f(s)$ 는 비용구조 (10)과 (11)로부터 다음과 같이 표현된다(단, 단위당 생산비용은 일정하므로 제외).

$$f(s) = sK + hI^s$$

따라서 가동준비비용이 R 만큼 감소된 후의 최소비용 $g(R)$ 은 (8)과 (9)로부터 다음과 같게 된다.

$$\begin{aligned} g(R) &= \min_s g_s(R) \\ &= \min_s \{f(s) - sR\} \\ &= \min_s \{s(K-R) + hI^s\} \\ &= s^*(K-R) + hI^{s^*} \text{(여기서 } s^* \text{는 최적 } s). \end{aligned}$$

그러므로 모든 $t=1,\dots,n$ 에 대해

$$s^*(K-R) + hI^{s^*} \leq t(K-R) + hI^t$$

가 성립한다. 따라서

$$hI^{s^*} \leq (t-s^*)(K-R) + hI^t.$$

더욱이 $R \leq K$ 이므로 모든 $t \leq s^*$ 에 대해

$$hI^{s^*} \leq hI^t.$$

또한 $h>0$ 이므로 모든 $t \leq s^*$ 에 대해

$$I^{s^*} \leq I^t. \quad (12)$$

[정리 1]의 (ii)에 의하면 R 이 증가함에 따

라 s^* 가 단조증가하고, (12)에서 s^* 가 단조증가하면 총재고는 단조감소함을 알 수 있다. 따라서 R 이 증가함에 따라 최적해에서 총재고수준은 반드시 단조감소한다.■

[정리 3]에서 가정한 비용구조는 [정리 1]과 [정리 2]의 비용구조를 포함하므로 이 비용구조하에서는 [정리 1]과 [정리 2]의 결과도 당연히 성립함을 유의할 필요가 있다.

3.2.2 가동준비비용의 감소가 로트크기에 미치는 영향

JIT/ZI에서는 가동준비비용(가동준비시간)을 줄여 될 수 있는대로 로트크기를 작게 하고자 한다. 일반적으로 로트크기가 줄어들면 재고수준도 감소하게 된다.

DLSM에서는 EOQ와는 달리 수요가 매기간 변하기 때문에 여기서는 가동준비비용의 감소가 평균로트크기에 미치는 영향을 분석하고자 한다.

[정리 4] (3)의 DLSM에서 가동준비비용의 감소가 (7)의 형태를 취하면 가동준비비용의 감소분 R 이 증가함에 따라 최적해에서 평균로트크기는 단조감소한다.

증명 : s^* 와 $\bar{Q}(s^*)$ 를 각각 가동준비비용이 R 만큼 감소되었을 때의 최적해에서 생산횟수와 평균로트크기로 정의하자. 생산이 몇번 일어나더라도 총생산량은 반드시 $\sum_{i=1}^n d_i$ 가 되어야 하므로

$$\bar{Q}(s^*) = \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{s^*} \quad (13)$$

가 된다. 그런데 [정리 1]의 (ii)에서 R 이 증가함에 따라 s^* 는 단조증가하므로 (13)에서 평균로트크기는 단조감소함을 알 수 있다.■

3.2.3 가동준비비용의 감소가 수요예측기간에 미치는 영향

(3)의 DLSM과 같은 확정적 생산재고모형은 미래의 어떤 한정된 기간의 수요예측에 기반을 두고 있다. 그러나 이 경우 현시점에서의 최적해는 계획대상기간의 길이에 따라 달라질 수 있다는 큰 약점이 있다. 따라서 현시점에서의 최적해가 무한대기간(infinite horizon)에 걸쳐 항상 최적이 되기 위해서는 미래의 어느 시점까지 수요를 예측해야 할 것인가, 즉 계획대상기간을 얼마나 해야 할 것인가가 문제가 된다. 이와 같은 문제를 다루는 것이 계획기간이론(planning horizon theory)이다(계획기간이론에 대한 보다 상세한 내용은 Lundin과 Morton [6] 참조).

계획기간이론에서 예측기간(forecast horizon)과 계획기간 또는 의사결정기간(planning horizon or decision horizon)은 다음과 같이 정의된다. 미래의 어떤 기간 \hat{n} 까지의 수요예측 하의 문제에서(즉 계획대상기간이 \hat{n} 의 문제에서) 최초 \bar{n} ($\leq \hat{n}$)기간에 걸친 최적해가 \hat{n} 기간 이후의 수요(때로는 비용까지 포함)가 어떠하든 간에 관계없이 언제나 최초 최적해가 되면 \hat{n} 을 예측기간, 그리고 \bar{n} 을 계획기간 또는 의사결정기간이라 한다. 예를 들어, 어떤 4-기간 DLSM에서 최적해가 $X_1 = \sum_{i=1}^2 d_i$, $X_2 = 0$, $X_3 = \sum_{i=3}^4 d_i$, $X_4 = 0$ 라 하자. 만일 모든 $n (> 4)$ 기간 문제에서 기간 5, 6, 7, …의 수요가 어떻게 되든 최적해에서 $X_1 = \sum_{i=1}^2 d_i$, $X_2 = 0$ 가 변함없다고 하면 기간 4를 예측기간이라 하고 기간 2를 계획기간 또는 의사결정기간이라 한다. 즉 기간 4까지의 수요만 예측하면 4-기간문제의 최적해의 최초부분 “기간 1에서 기간 2까지의 수요를 한꺼번에 생산 한다”는 기간 5, 6, 7, …의 수요가 어떻게 되든 4보다 기간이 긴 모든 문제의 최적해에서 변함이

없다는 뜻이 된다. 이러한 계획기간결과를 이용하면 기업이 실제 생산계획을 수립함에 있어서 불필요한 미래수요를 예측하는 비용과 수고를 덜 수 있게 된다.

문제는 특정 모형에서 예측기간을 어떻게 구하느냐이다. Wagner와 Whitin[16]이래 DLSM의 예측기간은 많은 사람에 의해 연구되어 왔다([6] 참조). 만일 DLSM에서 가동준비비용이 감소함에 따라 예측기간이 줄어든다면 이 또한 가동준비비용의 감소가 가져다 주는 유리한 효과가 될 것이다. 왜냐하면 가동준비비용이 작을수록 수요예측을 길게 할 필요가 없기 때문이다.

Lundin과 Morton[6]의 계산적 연구결과 (computational study)에 의하면 DLSM에서 생산비용함수가 (10)의 형태를 그리고 재고비용함수가 (11)의 형태를 취하는 경우 예측기간 \hat{n} 은 경험적으로 대략 다음과 같이 추정된다고 한다.

$$\hat{n} = 5\sqrt{2K/hd} \quad (14)$$

여기서 \bar{d} 는 평균수요율.

[정리 5] 가동준비비용의 감소분 R 이 증가함에 따라 예측기간의 경험적인 추정치 \hat{n} 은 감소하며 그 감소폭은 점점 더 커진다.

증명 : 가동준비비용이 R 만큼 감소된 후의 예측기간의 추정치를 $\hat{n}(R)$ 이라 하면 식 (14)로부터

$$\hat{n}(R) = 5\sqrt{2(K-R)/hd} .$$

한편 $0 \leq R < K$ 에 대해 $\hat{n}'(R) < 0$, $\hat{n}''(R) < 0$ 이므로 $\hat{n}(R)$ 은 R 에 대해 감소하는 오목함수

이다. 따라서 R 이 증가함에 따라 $\hat{n}(R)$ 은 감소하며 그 감소폭은 점점 더 커진다.■

이상의 [정리 5]로부터 DLSM에서 가동준비비용이 감소하면 적어도 경험적으로는 예측기간이 감소하며 그 한계감소율도 커짐을 알 수 있다. 사실상 극단적으로 (3)의 DLSM에서 생산비용함수가 $p_i(X_i) = \bar{p}X_i$ 라면, 즉 가동준비비용이 없고 단위당 생산비가 정태적이라면 매기간 수요예측을 하여 그 기간의 수요만을 생산하는 것이 무한대기간문제에서 언제나 최적이 되므로 예측기간이나 의사결정기간은 모두 1이 된다. 문제는 “DLSM에서 가동준비비용이 감소하면 예측기간이 짧아진다”는 사실을 DLSM 그 자체에서 바로 분석적으로 증명할 수 있느냐이며 이는 향후 연구과제라고 보겠다.

4. EOQ모형에서 가동준비비용의 감소효과

재고관리에서 가장 기본적이고도 고전적인 모형이 경제적주문량 모형 즉 EOQ모형이다. d 를 단위기간당 제품의 수요율, K 를 가동준비비용 그리고 h 를 단위기간당 한단위의 재고유지비용이라 하면 기간당 최소비용 C , 최적로트크기(즉, 1회 생산량) Q , 평균재고수준 I 및 최적가동준비횟수 N 은 다음과 같다.

$$C = \sqrt{2Kh}d$$

$$Q = \sqrt{\frac{2Kd}{h}}$$

$$I = \frac{Q}{2} = \sqrt{\frac{Kd}{2h}}$$

$$N = \frac{d}{Q} = \sqrt{\frac{hd}{2K}} .$$

여기서는 EOQ모형에서 K 의 감소가 C , Q , I , N 에 미치는 영향을 분석·음미하고, 이를 DLSM에 있어서의 가동준비비용의 감소효과와 비교해 보기로 한다.

먼저 가동준비비용이 $R(0 \leq R \leq K)$ 만큼 감소되었을 때의 최소비용, 최적로트크기, 평균재고수준, 최적가동준비횟수를 각각 $C(R)$, $Q(R)$, $I(R)$, $N(R)$ 로 두면

$$C(R) = \sqrt{2(K-R)hd}$$

$$Q(R) = \sqrt{\frac{2(K-R)d}{h}}$$

$$I(R) = \sqrt{\frac{(K-R)d}{2h}}$$

$$N(R) = \sqrt{\frac{hd}{2(K-R)}}.$$

[정리 6] EOQ모형에서 가동준비비용이 감소함에 따라 다음 결과가 성립한다.

(i) 최소비용, 최적로트크기 및 평균재고수준은 감소하며 그 감소폭(한계감소율)은 점점 더 커진다.

(ii) 최적가동준비횟수(생산횟수)는 증가하며 그 증가폭(한계증가율)은 점점 더 커진다.

증명 : (i) $0 \leq R < K$ 에 대해 $C'(R) < 0$, $C''(R) < 0$, $Q'(R) < 0$, $Q''(R) < 0$, $I'(R) < 0$, $I''(R) < 0$ 이므로 $C(R)$, $Q(R)$ 및 $I(R)$ 은 R 에 대해 감소하는 오목함수이다.

(ii) $0 \leq R < K$ 에 대해 $N'(R) > 0$, $N''(R) > 0$ 이므로 $N(R)$ 은 R 에 대해 증가하는 볼록함수(convex function)이다. ■

EOQ모형에서의 가동준비비용의 감소효과 [정리 6]은 앞서 살펴본 DLSM에 있어서의 가동준비비용의 감소효과와 거의 일치한다. 다만 EOQ에서는 그 효과가 가동준비비용이 감소함

에 따라 점점 더 커진다는 보다 강한 결과를 가져왔다(단 최소비용의 경우는 EOQ에서나 DLSM에서나 마찬가지 임). 이는 EOQ모형은 비용과 수요 모두가 정태적이고 연속적이며 따라서 분석이 보다 단순하고 용이하기 때문이다.

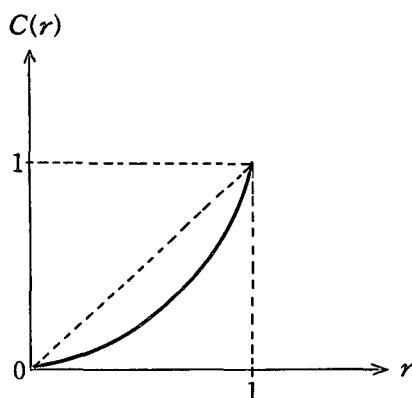
여기서 한가지 흥미있는 질문을 제기할 수 있다. 일반적으로 EOQ모형은 각종 비용의 변화에 둔감(insensitive)한 것으로 알려져 있다. 그렇다면 왜 일본기업들은 가동준비비용의 감소에 많은 노력을 기울이는가? [정리 6]은 이 질문에 대한 좋은 답이 된다. 즉 가동준비비용의 감소가 최소비용, 최적로트크기, 평균재고수준 및 최적가동준비횟수에 미치는 유리한 효과는 가동준비비용이 감소함에 따라 점점 더 커지기 때문이다. 이 점은 다음과 같은 또 다른 분석을 통해서도 알 수 있다.

가동준비비용의 절감률을 $r(0 \leq r \leq 1)$ 로 두면 $100r\%$ 만큼 감소된 후의 가동준비비용은 $(1-r)K$ 가 된다. C_r 를 가동준비비용이 $100r\%$ 만큼 감소되었을 때의 최소비용으로 정의하면 총비용의 절감률 $C(r)$ 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} C(r) &= \frac{C - C_r}{C} \\ &= 1 - \frac{C_r}{C} \\ &= 1 - \frac{\sqrt{2(1-r)Khd}}{\sqrt{2Kh}} \\ &= 1 - \sqrt{1-r} \end{aligned} \tag{15}$$

$0 \leq r < 1$ 에 대해 $C'(r) > 0$, $C''(r) > 0$ 이고 $C(0)=0$, $C(1)=1$ 이므로 $C(r)$ 은 [그림 1]과 같이 증가하는 볼록함수이다. 또한 $r=0$ 와 $r=1$ 일때만 $r=C(r)$ 이며 $0 < r < 1$ 에서는 언

제나 $C(r) < r$ 임을 쉽게 알 수 있다. 이상을 종합해 보면 총비용의 절감률 $C(r)$ 은 $0 < r < 1$ 에서는 언제나 가동준비비용의 절감률 r 에 미치지는 못하지만 r 이 커짐에 따라(즉 r 이 1에 접근함에 따라) $C(r)$ 의 증가폭은 점점 더 커져 r 에 근접함을 알 수 있다(〈표 1〉 참조).



[그림 1] $C(r)$ 의 모양

〈표 1〉 r 과 $C(r)$ 과의 관계

r	$C(r)$
0	0
0.01	0.0050
0.05	0.0253
0.10	0.0513
0.20	0.1056
0.30	0.1633
0.40	0.2254
0.50	0.2929
0.60	0.3675
0.70	0.4523
0.80	0.5528
0.90	0.6838
0.95	0.7764
0.99	0.9000
0.995	0.9293
1	1

이상의 분석은 최적로트크기와 평균재고수준에 대해서도 마찬가지이다. 즉 $Q(r)$ 과 $I(r)$ 을 가동준비비용이 100%만큼 감소되었을 때의 로트크기의 절감률과 평균재고수준의 절감률로 각각 정의하면 $C(r)$ 과 마찬가지로

$$Q(r) = I(r) = 1 - \sqrt{1-r}$$

임을 쉽게 유도할 수 있다.

또한 $N(r)$ 을 가동준비비용이 100r%만큼 감소되었을 때의 가동준비횟수(생산횟수)의 증가율로 정의하면

$$N(r) = (1-r)^{-\frac{1}{2}} - 1$$

임도 쉽게 알 수 있다. 여기서 $0 \leq r < 1$ 에 대해 $N'(r) > 0$, $N''(r) > 0$ 이므로 $N(r)$ 은 $N(0)=0$, $\lim_{r \rightarrow 1} N(r) = \infty$ 인 r 에 대해 증가하는 불록함수이다. 따라서 r 이 증가함에 따라 $N(r)$ 의 증가폭은 점점 더 커진다.

이상의 분석을 종합하면 가동준비비용의 감소가 총비용, 로트크기, 평균재고수준 및 가동준비횟수에 미치는 영향은 처음에는 크지 않지만 가동준비비용의 감소가 커짐에 따라 그 효과는 빠른 속도로 커짐을 알 수 있다. 따라서 기업이 현저한 혜택을 보려면 가동준비비용을 크게 감소시켜야 한다는 결론이 생긴다. 이는 “기업이 총재고비용을 현저히 줄일려면 가동준비시간을 현재의 5~10% 수준(본 논문에서는 $r=0.9 \sim 0.95$ 에 해당)까지 크게 줄여야 한다”는 Chase와 Aquilano[3 : p.507]의 관찰과도 일치한다.

현실적인 예를 들면, 미국의 제너럴모터스(General Motors)社는 대형 펀치프레스(punch press)에서 형판(die)을 바꾸는 데 소요되는 시

간을 6시간에서 18분으로 단축하였더니 재고가 100만불에서 10만불로 줄어들었다는 사례보고가 있다[11]. 즉 가동준비시간을 95%($=\frac{360-18}{360} \times 100\%$) 단축시켰더니 재고가 90%($=\frac{100-10}{100} \times 100\%$)나 줄어들었다는 것이다. 실제 많은 일본기업은 가동준비시간을 10분 이내의 한자리 숫자로 줄이려고 노력하고 있으며 이것이 달성되면 다시 1분이내로 단축하려고 한다. <표 2>는 일본의 Jidosha KiKi Co. 가 4년간 가동준비시간을 엄청나게 줄인 결과를 보여주고 있다. 이와 같이 가동준비시간(가동준비비용)을 대폭 줄임으로써 JIT/ZI의 목표인 이상적인 1단위(또는 아주 소규모)로트생산이 가능해지고 재고가 대폭 줄게 되는 것이다.

<표 2> Jidosha KiKi Co.에서
가동준비시간의 감소 추이

가동준비시간	1976년	1977년	1980년
>60분	30%	0	0
30~60분	19%	0	0
20~30분	26%	10%	3%
10~20분	20%	12%	7%
5~10분	5%	20%	12%
100초~5분	0	17%	16%
<100초	0	41%	62%

* 백분율(%)은 모든 기계의 전체 가동준비작업에서의 비율

자료원 : Chase 와 Aquilano[3], p.726.

5. 결론 및 향후 연구과제

본 연구에서는 먼저 DLSM에 있어서 가동준비비용의 감소효과를 분석하였다. 이를 위해

Zangwill[17]의 연구결과를 소개한 다음, 그가 간과한 가동준비비용의 감소가 총재고수준, 평균로트크기 및 예측기간에 미치는 영향을 다음과 같이 분석하였다.

첫째, 가동준비비용이 매기간 일정하게 감소하면 재고를 보유하는 기간의 수는 단조 감소하지만 총재고는 오히려 증가할 수도 있음을 보였다.

둘째, 생산비용함수가 정태적이고 (가동준비비용+비례비)의 형태를 취하면 가동준비비용이 매기간 일정하게 감소함에 따라 총재고비용은 단조감소하지만 이 경우 역시 총재고는 오히려 증가할 수도 있음을 보였다.

셋째, 생산비용함수와 재고유지비용함수가 모두 정태적이고 각각 (가동준비비용+비례비), 비례비의 형태를 취하면 가동준비비용이 매기간 일정하게 감소함에 따라 총재고수준은 반드시 단조감소함을 증명하였다.

넷째, 가동준비비용이 매기간 일정하게 감소하면 평균로트크기는 단조감소함을 보였다.

끝으로, 가동준비비용이 감소하면 적어도 경험적으로는 예측기간이 감소하며 그 감소폭도 커짐을 보였다.

다음으로는 EOQ모형에서 가동준비비용의 감소가 총비용, 로트크기, 평균재고수준 및 가동준비횟수에 미치는 영향을 분석하고 음미하였다. 특히 가동준비비용의 감소가 이들에 미치는 영향은 처음에는 크지 않지만 가동준비비용의 감소가 커짐에 따라 그 효과는 빠른 속도로 커짐을 지적하였다. 이 결과는 왜 일본기업들이 가동준비비용이나 가동준비시간을 크게 감소시키기 위해 많은 노력을 기울이고 있는가에 대한 좋은 답이 된다.

본 연구와 관련하여 몇가지 향후 연구과제를 제시해 보면 다음과 같다.

앞서 우리는 DLSM에서 가동준비비용이 감소하면 적어도 경험적인 연구상으로는 예측기간이 감소하며 그 감소폭도 커짐을 [정리 5]에서 보았다. 문제는 “DLSM에서 가동준비비용이 감소하면 예측기간이 짧아진다”는 사실을 DLSM 그 자체에서 바로 분석적으로 증명할 수 있느냐이며 이에 대한 연구가 향후 요청된다.

또한 DLSM이나 EOQ모형외에 여러가지 단계 DLSM이나 ELSP(Economic Lot Scheduling Problem)와 같은 다른 생산재고모형에서 가동준비비용이나 가동준비시간의 감소효과를 여러 각도에서 분석해 보는 것도 향후 좋은 연구과제가 될 것이다. 최근 ELSP에서 가동준비비용의 감소와 가동준비시간의 단축효과를 분석한 Moon[8 : chapter 4, 5]의 연구와 일렬 설비시스템에서 가동준비비용의 감소를 다룬 Zangwill[18]의 연구는 이의 좋은 예가 된다고 보겠다.

참 고 문 헌

- [1] 안병훈, 현재호, 장영권, “용량제약하의 단일 제품 동적 생산계획에 있어서의 가동준비 절감효과에 관한 연구,” 「경영과학」, 제5권, 제2호(1988), pp. 48-56.
- [2] Bahl, H.C., L.P. Ritzman and J.N.D. Gupta, “Determining Lot Sizes and Resource Requirements : A Review,” *Operations Research*, Vol. 35, No. 3 (1987), pp. 329-345.
- [3] Chase, R.B. and N.J. Aquilano, *Production and Operations Management*, 4th ed., Richard D. Irwin, Inc., Homewood, Illinois, 1985.
- [4] Hall, R., *Zero Inventories*, Dow Jones-Irwin, Homewood, Ill., 1983.
- [5] Karmarkar, U.S., “Lot Sizes, Lead Times and In-Process Inventories,” *Management Science*, Vol. 33, No.3 (1987), pp. 409-418.
- [6] Lundin, R.A. and T.E. Morton, “Planning Horizons for the Dynamic Lot Size Model : Zabel vs. Protective Procedures and Computational Results,” *Operations Research*, Vol. 23, No.4(1975), pp.711-734.
- [7] Monden, Y., “Adaptable Kanban System Helps Toyoto Maintain Just-In-Time Production,” *Industrial Engineering*, (1981), pp. 29-46.
- [8] Moon, Ilkyeong, “Some Issues in the Economic Lot Scheduling,” Ph.D. Dissertation, Columbia University, New York, N.Y., 1991.
- [9] Porteus, E. L., “Investing in Reduced Setups in the EOQ Model,” *Management Science*, Vol. 31, No.8(1985), pp.998-1010.
- [10] Porteus, E.L., “Investing in New Parameter Values in the Discounted EOQ Model,” *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol.33(1986), pp. 39-48.
- [11] Porteus, E.L., “Optimal Lot Sizing, Process Quality Improvement and Setup Cost Reduction,” *Operations Research*, Vol 34, No.1(1986), pp.137-144.
- [12] Schonberger, R., *Japanese Manufacturing Techniques*, The Free Press, New York, 1982.

-
- [13] Schroeder, R. G., *Operations Management*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1985.
 - [14] Shingo, S., *Study of Toyota Production System from Industrial Engineering Viewpoint*, Japan Management Association, 1981.
 - [15] Spence, A. M. and E. L. Porteus, "Setup Reduction and Increased Effective Capacity," *Management Science*, Vol.33, No.10(1987), pp.1291-1301.
 - [16] Wagner, H.M. and T.M. Whitin, "Dynamic Version of the Economic Lot Size Model," *Management Science*, Vol. 5 (1958), pp. 89-96.
 - [17] Zangwill, W. I., "From EOQ Towards ZI," *Management Science*., Vol. 33, No. 10(1987), pp. 1209-1223.
 - [18] Zangwill, W.I., "Eliminating Inventory in a Series Facility Production System," *Management Science*, Vol. 33, No.9 (1987), pp. 1150-1164.