

## M/M/1 Queue에서 Busy Cycle에 대한 민감도 분석

박 흥 식\*

### Sensitivity Analysis for the Busy Cycle in M/M/1 Queue

Heungsik Park\*

#### Abstract

In this paper, by using perturbation analysis method, We find the sensitivity of the mean busy cycle with respect to mean interarrival time in M/M/1 Queue. We show that the Perturbation analysis estimate can be expressed as a sum of the infinitesimal perturbation analysis(IPA) estimate and the effect caused by changes in transition probabilities, thus explaining why IPA estimates are not consistent in general.

#### 1. 서 론

Infinitesimal Perturbation Analysis(IPA) 방법은 그것이 최근에 개발된 이산사건 시스템(Discrete Event System)의 민감도 분석(Sensitivity Analysis)에 효과적으로 사용되어 왔다. 간단히 설명하면 IPA 방법은 주어진 모수(parameter)에 대해 Sample Path를 미분하므로써 이산사건 시스템의 수행 척도(Performance Measure)들에 대한 민감도를 구하려는 방법이라고 말할 수 있다. 좀 더 구체적으로 설명하면,  $Y(\theta)$ 를 관심의 대상이 되는 이산사건 시스템에서의 수행척도라 할 때 많은 경

우에  $dY(\theta)/d\theta$ 는 Sample Path로부터 관찰되므로 N번의 서로 독립인 시뮬레이션 실행(Simulation Run)을 통해  $dE[Y(\theta)]/d\theta$ 의 추정치를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{dY_i(\theta)}{d(\theta)} \quad (1)$$

$dY(\theta)/d\theta$ 를 관찰하여 추정치를 구하는 위의 IPA 방법은  $[Y(\theta + \Delta\theta) - Y(\theta)]/\Delta\theta$ 를 통하여 추정치를 구하는 재래의 Finite Difference 방법에 비해 계산시간이 더 적게 걸릴뿐만 아니라 Sample Path를 관찰하는 동안 민감도를 구할 수 있으므로 시뮬레이션을 하지 않고도 실제

시스템에서 직접 민감도를 구할수 있는 장점이 있다. 이러한 장점에도 불구하고 식(1)에서 주어졌던 추정치는  $N$ 이 증가함에 따라 실제의 값  $dE[Y(\theta)]/d\theta$ 에 수렴하지 않는다면 바람직한 추정값이 되지 못하게 된다. 다시말해 IPA 방법을 적용할 수 있기위해

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{dY_k(\theta)}{d\theta} = \frac{dE[Y(\theta)]}{d\theta} \quad (2)$$

이 만족 되어야 한다.

그동안 IPA 방법이 어떤 시스템에 적용될 수 있는가, 즉 위의 식(2)가 어떤 경우에 성립하는가에 관한 연구가 다각도로 수행되어 왔으며 최근에는 이론적인 결과도 발표 되었다 [8, 10, 11]. 이와 더불어 IPA 방법이 왜 어떤 경우에는 효과적이지만 다른 경우에는 그렇지 않은가를 규명하려는 연구도 행해져 왔다 [4, 1]. 특히 Heidelberg et al. [4]은 regenerative process에서 steady state 수행 측도들의 민감도를 구할때 IPA 방법이 적용될 수 있는 조건을 제시 하였으며 Perturbed Sample Path를 원래의 Sample Path와 비교할때 길이의 변화뿐 아니라 event 순서에 변화가 있다면 다시말해 모수가 변할때 transition probability도 변한다면 이것이 IPA 방법이 성공하지 못하는 것의 주된 원인이 될 수 있다는 것을 보였다.

본 논문에서는 M/M/1 Queue의 평균 busy cycle에 대해 Perturbation Analysis를 행하여 민감도를 구하고 이 민감도가 IPA 방법에 의해 얻은 값과 transition probability의 변화(event 순서의 변화)에 기인한 값의 함으로 명료하게 표현됨을 보임으로서 IPA 방법이 일반적으로 성공 할 수 없음을 예를 들어 명확하게 보였다. 더욱이 transition probability의 변화에 기인하는 값도 IPA 추정치와 마찬가지로 Sam-

ple Path를 관찰 하므로써 얻을 수 있음을 보임으로서 IPA 방법의 확장이 가능성을 보였다.

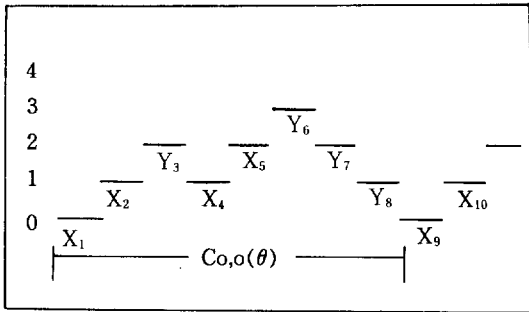
## 2. Busy Cycle에 대한 Perturbation Analysis

이 장에서는 누적 확률분포 함수들  $F(x, \theta) = 1 - \exp(-x/\theta)$ 와  $G(y, \mu) = 1 - \exp(-y/\mu)$ 에 의해 Birth and Death Process로 정의되는 M/M/1 Queue에서 모수  $\theta$ 에 대한 평균 busy cycle의 민감도를 Perturbation Analysis를 통하여 구하고자 한다. M/M/1 Queue와 같은 간단한 시스템에서는 평균 busy cycle의 민감도를 해석적으로도 쉽게 구할 수 있으나 Perturbation Analysis를 통해 구하므로써 서론에서 언급 했듯이 Perturbation Analysis 추정치가 IPA 추정치와 Sample Path 순서의 변화(transition probability의 변화)에 기인하는 값의 함으로 이루어짐을 명확히 보이고 더 나아가 Perturbation Analysis 추정치도 Sample Path를 관찰함으로써 얻을 수 있다는 것을 보이고자 한다.

### 2.1 부호의 정의

$F(x, \theta)$ 에 의해 생성되는 확률변수를  $X$ ,  $G(y, \mu)$ 에 의해 생성되는 확률 변수를  $Y$ 로 표시하자. 먼저 Birth and Death Process에 의해 정의되는 M/M/1 Queue를 설명하면, state 0에서 항상  $X$ 만이 생성되어 Sojourn time 이되고  $X$ 의 끝에서 state은 한 스텝 증가하여 1이 된다. state의 값이 1보다 크거나 같은 경우  $X$ 와  $Y$  둘 다를 생성하여  $X \leq Y$ 라면  $X$ 가 Sojourn time 이 되고  $X$ 의 끝에서 state은 한 스텝 증가하

고,  $X > Y$  라면  $Y$ 가 Sojourn time 이 되고  $Y$ 의 끝에서 state 은 한 스텝 감소하게 된다.  $X_i$ 를  $F(x, \theta)$ 에 의해  $i$ 번째 생성된 확률 변수,  $Y_i$ 를  $G(y, \mu)$ 에 의해  $i$ 번째 생성된 확률 변수라 하면  $\{X_1, X_2, Y_3, X_4, X_5, Y_6, Y_7, Y_8, X_9, X_{10}, \dots\}$ 은 전형적인 한 Sample Path를 표시하며 그 형태는 아래 그림에 주어지는 것과 같다.



[그림 1] M/M/1 Queue의 Sample Path

$Co, o(\theta)$ 는 busy cycle의 길이를 표시하고  $Ci, o(\theta)$ 는 State  $i$ 로부터 State  $o$ 에 처음으로 도착할때까지의 시간을 나타낸다.

$U$ 는  $Co, o(\theta)$ 동안 state이 증가한 Sojourn time 들의 인덱스를,  $D$ 는 state이 감소한 Sojourn time들의 인덱스를 표시하는 집합이다. 예로서 위의 그림 1에서

$$U = \{1, 2, 4, 5\}, D = \{3, 6, 7, 8\}$$

이 기호를 사용하면

$$Co, o(\theta) = \sum_{i \in U} X_i + \sum_{i \in D} Y_i$$

$|U|$ 는  $U$  집합 안에 있는 요소들의 숫자를  $|D|$ 는  $D$ 안에 있는 요소들의 숫자를 나타낸다. 위의 예에서  $|U| = 4 = |D|$ . Busy cycle에서  $|U| = |D|$ 인 것은 자명하다.

$$A_i = \{w \mid Y_i < X_i, Y_i \geq X_i - \Delta X_i\}$$

$$B_i = \{w \mid Y_i < X_i, Y_i < X_i - \Delta X_i\}$$

위의 부호를 좀더 설명하면  $A_i$ 는  $i$ 번째의 state이 원래는 한스텝 감소하는 것이었으나 (즉  $Y_i < X_i$ ), 모수  $\theta$ 가  $\theta - \Delta\theta$ 로 감소하여  $X_i$ 가  $X_i - \Delta X_i$ 로 감소하게되어  $i$ 번째의 state이 반대로 한스텝 증가하게 되는 (즉  $Y_i \geq X_i - \Delta X_i$ ) event를 나타낸다. 즉 모수의 변화에 따라 Sample Path에 interchange가 일어남을 나타낸다.  $B_i$ 도 마찬가지로 설명되며 모수가 변화하여도 Sample Path에 interchange가 일어나지 않음을 나타낸다.

$I$ 는 busy cycle의 Sample Path에서 두 번이상의 interchange가 일어났을때 그들이 일어난 index들의 집합을 나타낸다.

편의를 위해 다음 부호를 하나 더 정의한다.

$$W_j = \begin{cases} A_j & j \text{가 } I \text{안에 있는 경우} \\ B_j & j \text{가 } I \text{안에 있지 않는 경우} \end{cases}$$

다음과 같은 형태의 event 들을 생각하자.

$$\{X_1 \leq Y_1, X_2 \leq Y_2, X_3 > Y_3, \dots, X_k > Y_k\}$$

$k$ 가 주어진다면 부등호를 바꿈으로서 많아야  $2^k$ 개의 위와같은 형태의 event들을 얻게 된다. 이러한 event들을  $H_{km}, k = 2, 3, 4, \dots; m = 1, 2, 3, \dots, 2^k$ 으로 표시한다 하자. 그러면

$$\bigcup_{t, m} H_{tm} = \emptyset \text{이 됨은 자명하다.}$$

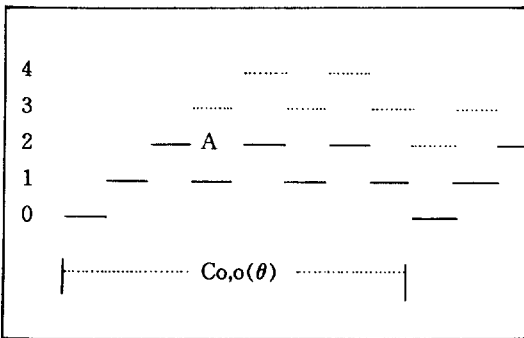
$P(H_{km}) = 0$ 인 경우  $E[\cdot \mid H_{km}] = 0$ 이라고 정의한다.

편의상  $H_{km}$  위에서의  $D$ 를  $D_{km}$ 으로 표시하고  $H_{km}$  위에서의  $U$ 를  $U_{km}$ 으로 표시한다.

## 2.2 Perturbation Analysis 결과

이 절에서는 본 논문의 주된 결과를 제시하려고 한다. 먼저 모수  $\theta$ 를 조금 변화시켰을 때 Sample Path에 어떤 영향을 주는가를 관찰해 보도록 하자.  $\theta$ 가  $\theta - \Delta\theta$ 로 바뀐다면  $X$ 는  $X - \Delta X$ 로 줄어들지만  $Y$ 는 변하지 않는다. 이것

이 Sample Path에 주는 영향은 다음 두가지로 생각해 볼 수가 있다. 먼저 X의 길이만 ΔX만큼 줄어들고 다른 영향이 없는 경우 busy cycle의 길이 Co.o(θ)는 ∑<sub>i∈U</sub>ΔX만큼 줄어들게 된다. 반면 X의 길이만 줄어드는 것이 아니라 Sample Path의 모양새가 바뀌는 경우, 즉 처음에는 Y<sub>i</sub> < X<sub>i</sub> 였으나 X<sub>i</sub>가 X<sub>i</sub> - ΔX<sub>i</sub>로 줄어들므로서 X<sub>i</sub> - ΔX<sub>i</sub> ≤ Y<sub>i</sub>가 되는 경우에는 보다 심각한 영향을 받게 된다. 이경우 처음에는 Y<sub>i</sub>가 Sojourn time 이 되고 Y<sub>i</sub>의 끝에서 Sample Path가 한 스텝 감소 하였으나 θ가 θ - Δθ로 바뀌므로서 X<sub>i</sub> - ΔX<sub>i</sub>가 Sojourn time이 되고 X<sub>i</sub> - ΔX<sub>i</sub>의 끝에서 Sample Path가 한 스텝 증가 하며 Sojourn time의 길이는 Y<sub>i</sub> - (X<sub>i</sub> - ΔX<sub>i</sub>)만큼 줄어드나 아래 그림 2에서 점선으로 보여 주듯 busy cycle의 길이가 C<sub>2,0</sub>(θ - Δθ)만큼 늘어나는 심각한 영향을 받게된다.



[그림2] A시점에서 일어난 interchange의 영향

만약 이런 interchange가 m번 있게 되면 Sojourn time 은 ∑<sub>i=1</sub><sup>m</sup>{Y<sub>i</sub> - (X<sub>i</sub> - ΔX<sub>i</sub>)}만큼 줄어들지만 busy cycle의 길이 C<sub>0,0</sub>(θ)는 C<sub>2,0</sub>(θ - Δθ)만큼 늘어나게 된다. 지금까지 설명한 것을 종합하여 θ가 θ - Δθ로 줄어들때 busy cycle이 받은 영향을 다음의 식으로 표시할 수 있다.  
 C<sub>0,0</sub>(θ) - C<sub>0,0</sub>(θ - Δθ) = 1(no interchange) ×

$$\left\{ \sum_{j \in U} \Delta X_j \right\} + \sum_{i \in D} 1(\text{only one interchange at } Y_i) \times \left[ \sum_{j \in U} \Delta X_j + \{Y_i - (X_i - \Delta X_i)\} - C_{2,0}(\theta - \Delta\theta) \right] + 1(\text{two or more interchanges}) \left[ \sum_{j \in U} \Delta X_j + \sum_{i \in I} \{Y_i - (X_i - \Delta X_i)\} - C_{2|1|1,0}(\theta - \Delta\theta) \right]$$

공통인자 ∑<sub>j∈U</sub>ΔX<sub>j</sub>를 밖으로 빼내면,

$$C_{0,0}(\theta) - C_{0,0}(\theta - \Delta\theta) = \sum_{j \in U} \Delta X_j + \sum_{i \in D} 1(\text{only one interchange at } Y_i) [\{Y_i - (X_i - \Delta X_i)\} - C_{2,0}(\theta - \Delta\theta)] + 1(\text{two or more interchanges}) \left[ \sum_{i \in I} \{Y_i - (X_i - \Delta X_i)\} - C_{2|1|1,0}(\theta - \Delta\theta) \right]$$

θ는 scale parameter이므로 ΔX = (X/θ)Δθ이 된다 [8]. 이를 위 식에 대입하면,

$$C_{0,0}(\theta) - C_{0,0}(\theta - \Delta\theta) = \sum_{j \in U} \{X_j/\theta\} \Delta\theta + \sum_{i \in D} 1(A_i) \left\{ \prod_{j \in D-i} 1(B_j) \right\} [Y_i - X_i(1 - \Delta\theta/\theta) - C_{2,0}(\theta - \Delta\theta)] + \sum_{\substack{|D| \\ |I|=2}}^{|D|} \left\{ \prod_{i \in D} 1(W_i) \right\} \left[ \sum_{j \in I} \{Y_j - X_j(1 - \Delta\theta/\theta)\} - C_{2|1|1,0}(\theta - \Delta\theta) \right] \tag{3}$$

여기서 |I| = K는 K interchange 들의 모든 가능한 방법들을 표시한다.

우리의 목표는 다음의 값을 구하는 것이다.

$$\frac{d}{d\theta} E[C_{0,0}(\theta)] = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{E[C_{0,0}(\theta) - C_{0,0}(\theta - \Delta\theta)]}{\Delta\theta}$$

M/M1 Queue에서 depaeature rate이 avrial rate보다 큰 경우 즉 μ/θ < 1인 가정하에서 E[C<sub>0,0</sub>(θ)] < ∞인고로 아래식의 모든 기대치가 유한이고 따라서 다음식을 갖게 된다.

$$\frac{E[C_{0,0}(\theta) - C_{0,0}(\theta - \Delta\theta)]}{\Delta\theta} = \frac{1}{\theta} E \left[ \sum_{j \in U} X_j \right] - \frac{1}{\Delta\theta} E \left[ \sum_{i \in D} 1(A_i) \left\{ \prod_{j \in D-i} 1(B_j) \right\} C_{2,0}(\theta - \Delta\theta) \right] + \frac{1}{\Delta\theta} E \left[ \sum_{i \in D} 1(A_i) \left\{ \prod_{j \in D-i} 1(B_j) \right\} \{Y_i - X_i(1 - \Delta\theta/\theta)\} \right] + \frac{1}{\Delta\theta} E \left[ \sum_{\substack{|D| \\ |I|=2}}^{|D|} \left\{ \prod_{i \in D} 1(W_i) \right\} \sum_{j \in I} \{X_j - X_j(1 - \Delta\theta/\theta)\} \right]$$

$$-\frac{1}{\Delta\theta} E \left[ \sum_{i=1}^{D-1} \left\{ \prod_{i \in D} 1(W_i) \right\} C_{2,1,1,0}(\theta - \Delta\theta) \right] \quad (4)$$

우리는 먼저 위의 식의 두째항에 대해  $\Delta\theta$ 가 0으로 갈때의 극한값을 구하고 세째항부터 마지막항까지의 극한값이 0이 된다는 것은 부록에서 보이도록 한다.

1절에서 정의 하였듯이  $U_{k,m} H_{km} = \Omega$  이므로

$$E \left[ \sum_{i \in D} 1(A_i) \left\{ \prod_{j \in D-i} 1(B_j) \right\} C_{2,0}(\theta - \Delta\theta) \right] = E \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2^k} 1(H_{km}) \sum_{i \in D} 1(A_i) \left\{ \prod_{j \in D-i} 1(B_j) \right\} C_{2,0}(\theta - \Delta\theta) \right]$$

Monotone convergence 정리에 의하면 위의 식은 아래식과 같이 된다.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2^k} E \left[ 1(H_{km}) \sum_{i \in D} 1(A_i) \left\{ \prod_{j \in D-i} 1(B_j) \right\} C_{2,0}(\theta - \Delta\theta) \right]$$

Birth and Death Process 에 의해 M/M/1 Queue를 생성할때  $X_i$ 들은 서로 독립이고 동일한 분포  $F(x, \theta)$ 를 가지며  $Y_i$ 들도 서로 독립이고 동일한 분포  $G(y, \mu)$ 를 가졌으며  $X_i$ 들과  $Y_i$ 들도 서로 독립이었다.  $1(A_i)$ 은  $X_i$ 와  $Y_i$ 의 함수이며  $1(B_j)$ 는  $X_j$ 와  $Y_j$ 의 함수인 고로 서로 다른  $i$ 와  $j$ 에 대해  $1(A_i)$ 들과  $1(B_j)$ 들은 서로 독립이고 이들은 또한  $C_{2,0}(\theta - \Delta\theta)$ 와도 독립이다. 이들로부터 위의 식은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2^k} E \left[ 1(H_{km}) \sum_{i \in D} 1(A_i) \left\{ \prod_{j \in D-i} 1(B_j) \right\} \right] E[C_{2,0}(\theta - \Delta\theta)] \\ &= E[C_{2,0}(\theta - \Delta\theta)] \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2^k} E \left[ \sum_{i \in D} 1(A_i) \times \left\{ \prod_{j \in D-i} 1(B_j) \right\} \mid H_{km} \right] P(H_{km}) = E[C_{2,0}(\theta - \Delta\theta)] \\ & \times \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2^k} \{ |D_{km}| E[1(A_i) \mid H_{km}] \times E \left[ \prod_{j \in D-i} 1(B_j) \mid H_{km} \right] \} P(H_{km}) \end{aligned}$$

$E[1(A_i) \mid H_{km}] = E[1(A_i) \mid Y_i < X_i]$ 은 D에 속

하는 모든  $i$ 에 대해 동일한 상수이고  $E \left[ \prod_{j \in D-i} 1(B_j) \mid H_{km} \right]$ 도 D에 속하는 모든  $i$ 에 대해 동일한 상수이므로 위의 식은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} & E[C_{2,0}(\theta - \Delta\theta)] E[1(A_i) \mid H_{km}] E \left[ \prod_{j \in D-i} 1(B_j) \mid H_{km} \right] \\ & \times \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2^k} |D_{km}| P(H_{km}) = E[C_{2,0}(\theta - \Delta\theta)] \times E[1(A_i) \mid Y_i < X_i] E \left[ \prod_{j \in D-i} 1(B_j) \mid H_{km} \right] E[|D|] \end{aligned} \quad (5)$$

Dominated convergence 정리에 의해

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} E \left[ \prod_{j \in D-i} 1(B_j) \mid H_{km} \right] \\ &= \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} E \left[ \prod_{j \in D-i} 1 \left( \frac{Y_j}{1 - \Delta\theta/\theta} < X_j \right) \mid H_{km} \right] \\ &= E \left[ \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \prod_{j \in D-i} 1 \left( \frac{Y_j}{1 - \Delta\theta/\theta} < X_j \right) \mid H_{km} \right] \\ &= E \left[ \prod_{j \in D-i} 1(Y_j < X_j) \mid H_{km} \right] = 1 \end{aligned} \quad (6)$$

$$E[C_{2,0}(\theta - \Delta\theta)] = E[C_{2,1}(\theta - \Delta\theta)] + C_{1,0}(\theta - \Delta\theta) = 2E[C_{1,0}(\theta - \Delta\theta)]$$

충분히 작은  $\Delta\theta$ 에 대해  $C_{1,0}(\theta - \Delta\theta) \leq C_{1,0}(\theta)$  이고  $E[C_{1,0}(\theta)] \leq E[C_{0,0}(\theta)] < \infty$ 이므로 다시 Dominated convergence 정리를 사용하여

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} E[C_{2,0}(\theta - \Delta\theta)] = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} 2E[C_{1,0}(\theta - \Delta\theta)] \\ &= 2E[\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} C_{1,0}(\theta - \Delta\theta)] = 2E[C_{1,0}(\theta)] \\ &= E[C_{2,1}(\theta) + C_{1,0}(\theta)] = E[C_{2,0}(\theta)] \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & E[1(A_i) \mid Y_i < X_i] \\ &= E \left[ 1(Y_i < X_i \leq \frac{Y_i}{1 - \Delta\theta/\theta}) \mid Y_i < X_i \right] \\ &= \frac{P \left\{ Y_i < X_i \leq \frac{Y_i}{1 - \Delta\theta/\theta} \right\}}{P\{Y_i < X_i\}} \\ &= \frac{\mu \Delta\theta}{\theta(\mu + \theta - \Delta\theta)} \end{aligned}$$

이로부터

$$\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\theta} E[1(A_i) | Y_i < X_i] = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\theta} \frac{\mu \Delta\theta}{\theta(\mu + \theta - \Delta\theta)}$$

$$= \frac{\mu}{\theta(\mu + \theta)} \quad (8)$$

식 (4), (5), (6), (7), (8) 그리고 부록의 식 (13), (15), (16), (19), (20)으로부터 지금까지의 결과를 다음의 정리로 요약할 수 있다.

<정리> : Arrival rate  $1/\theta$  departure rate  $1/\mu$  인 M/M/1 Queue에서  $\mu/\theta < 1$ 을 가정한다면

$$\frac{d}{d\theta} E[C_{0,0}(\theta)] = \frac{1}{\theta} E[\sum_{j \in U} X_j] - \frac{\mu}{\theta(\mu + \theta)} E[|D|]$$

$$\times E[C_{2,0}(\theta)] = \frac{1}{\theta} E[X_1] + \frac{1}{\theta} E[|U| - 1] \times$$

$$E[X | X \leq Y] - \frac{1}{\theta^2} E[Y | Y < X] \times$$

$$E[|D|] E[C_{2,0}(\theta)] \quad (9)$$

### 2.3 결과의 해석

위의 식 (9)에 의해 주어지는 결과를 검토해 보면 모든 항들이 Sample Path를 관찰하므로서 얻어질 수 있다는 것을 알 수 있다. 예를 들어  $E[|D|]$ 의 추정치를 구하기 위해 busy cycle에서 state가 한 스텝 감소한 것이 몇 번이나 되는가를 세어 보기만 하면 된다. 결국  $dE[Co.o(\theta)]/d\theta$ 의 추정치는 Single Sample Path를 관찰 하므로서 얻게된다.

또한 위의 결과에서  $dE[Co.o(\theta)]/d\theta$ 는 두 부분으로 나누어져 있음을 알 수 있다. 첫째항  $\frac{1}{\theta} E[\sum_{j \in U}]$ 는  $\theta$ 가 변해도 X의 길이만 변하고 Sample Path의 구조에는 변화가 없다는 가정하에 구한  $dE[Co.o(\theta)]/d\theta$ 의 값, 즉 IPA 추정치에 해당되고 둘째항은 Sample Path에 구조적 변화가 일어났을때의 영향을 표시 한다. 결국 이 두번째 항 때문에 IPA 추정치가 일반적으로

는 적용될 수 없는 것이다.

### 2.4 해석적으로 얻은 결과와의 비교

여기서는  $dE[Co.o(\theta)]/d\theta$ 를 해석적인 방법으로 구하고 이 값을 식 (9)에 의해 얻은 값과 비교하려 한다.

$$E[C_{0,0}(\theta)] = E[X_1] + E[C_{1,0}(\theta)]$$

$$\theta + \frac{1}{1/\theta - 1/\mu} = \frac{\theta^2}{\theta - \mu} \quad (\text{Wolff 1989 참조})$$

이로 부터

$$\frac{d}{d\theta} E[C_{0,0}(\theta)] = \frac{2\theta(\theta - \mu)^2 - \theta^2}{(\theta - \mu)^2} = \frac{\theta(\theta - 2\mu)}{(\theta - \mu)^2} \quad (10)$$

한편

$$E[|D|] = E[|U|] = E[C_{0,0}(\theta)] \text{ 동안 도착한 사람수} = \frac{1}{\theta} E[C_{0,0}(\theta)] = \frac{\theta}{\theta - \mu} \quad (11)$$

$$E[C_{2,0}(\theta)] = E[C_{2,1}(\theta)] + E[C_{1,0}(\theta)]$$

$$= 2E[C_{1,0}(\theta)] = \frac{2\theta\mu}{\theta - \mu} \quad (12)$$

X와 Y가 exponential 확률변수이므로

$$E[X | Y \geq X] = E[Y | Y < X] = E[\min(X, Y)]$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\mu}} = \frac{\theta\mu}{\theta + \mu} \quad (13)$$

식 (11), (12) 그리고 (13)을 식 (9)의 오른쪽 항에 대입하면

$$\frac{d}{d\theta} E[C_{0,0}(\theta)] = \frac{1}{\theta} E[X_1] + \frac{1}{\theta} E[|U| - 1]$$

$$E[X | Y \geq X] - \frac{1}{\theta^2} E[Y | Y < X] E[|D|]$$

$$E[C_{2,0}(\theta)] = \frac{1}{\theta} \theta + \frac{1}{\theta} \left[ \frac{\theta}{\theta - \mu} - 1 \right] \frac{\theta\mu}{\theta + \mu}$$

$$- \frac{1}{\theta^2} \left[ \frac{\theta\mu}{\theta + \mu} \right] \left[ \frac{\theta}{\theta - \mu} \right] \frac{2\theta\mu}{\theta - \mu}$$

$$= \frac{\theta(\theta - 2\mu)}{(\theta - \mu)^2} \quad (14)$$

식(10)과 (14)로 부터 해석적으로 얻은 결

과와 식 (9)에 의해 주어지는 결과가 예상했던 대로 같음을 알 수 있다.

### 3. 결론

본 연구에서는 M/M/1 Queue의 평균 busy cycle의 민감도(Sensitivity)를 구하기 위하여 Perturbation Analysis 방법을 사용하였다. 그 결과 Perturbation Analysis 추정치가 IPA 추정치와 transition probability의 변화에 기인하는 값의 합으로 명확히 표현 된다는 것을 밝힘으로서 IPA방법이 일반적으로 적용될 수는 없음을 보였다. 더구나 Perturbation Analysis 추정치중 transition probability의 변화에 기인하는 부분도 IPA 추정치와 마찬가지로 Single Sample Path로부터 관찰에 의해 구할 수 있어 여기서 구한 Perturbation Analysis 추정치가 시뮬레이션에 효율적으로 사용될 수 있음을 보였다. 현재 여기서 보인 바와 같이 IPA 방법의 extension을 위해 여러가지로 연구가 진행중이며 [5, 2, 3] 좀 더 일반적인 Stochastic system으로의 확장에 관해서도 연구가 진행중에 있다.

### 부 록

본 부록에서는 본문 2장 식 (4)의 세번째 이하의 항들이  $\Delta\theta$ 가 0으로 갈때 모두 극한값 0을 갖는다는 것을 보인다. 먼저 식 (4)의 세번째 항의 극한값을 구하자.

$A_i$ 위에서  $Y_i < X_i$ 이므로

$$Y_i - X_i \left( 1 - \frac{\Delta\theta}{\theta} \right) < Y_i - Y_i \left( 1 - \frac{\Delta\theta}{\theta} \right) = Y_i \frac{\Delta\theta}{\theta}$$

이것을 이용하여

$$\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\theta} E \left[ \sum_{i \in D} 1(A_i) \left\{ \prod_{j \in D-i} 1(B_j) \right\} \left\{ Y_i - X_i \left( 1 - \frac{\Delta\theta}{\theta} \right) \right\} \right]$$

$$< \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\theta} E \left[ \sum_{i \in D} 1(A_i) \left\{ \prod_{j \in D-i} 1(B_j) \right\} Y_i \right]$$

$$\sum_{i \in D} 1(A_i) \left\{ \prod_{j \in D-i} 1(B_j) \right\} Y_i \leq \sum_{i \in D} Y_i \leq C_{0,0}(\theta) \text{ 이고}$$

$E[C_{0,0}(\theta)] < \infty$ 이므로

Dominated convergence 정리에 의해 위의 식은 다음과 같이 된다.

$$\frac{1}{\theta} E \left[ \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \sum_{i \in D} 1(A_i) \left\{ \prod_{j \in D-i} 1(B_j) \right\} Y_i \right]$$

$$= \frac{1}{\theta} E \left[ \sum_{i \in D} \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} 1 \left( Y_i < X_i \leq \frac{Y_i}{1 - \frac{\Delta\theta}{\theta}} \right) \times \right]$$

$$\left\{ \prod_{j \in D-i} 1 \left( \frac{Y_j}{1 - \frac{\Delta\theta}{\theta}} < X_j \right) \right\} Y_i$$

$$= 0 \tag{15}$$

다음으로 식(4)의 네번째 항이 극한값 0을 갖는다는 것을 보이자.

$A_j$ 위에서  $Y_j < X_j$ 인고로

$$\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\theta} E \left[ \sum_{|I|=2}^{|D|} \left\{ \prod_{i \in D} 1(W_i) \right\} \sum_{j \in I} \left\{ Y_j - X_j \left( 1 - \frac{\Delta\theta}{\theta} \right) \right\} \right]$$

$$\leq \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\theta} E \left[ \sum_{|I|=2}^{|D|} \left\{ \prod_{i \in D} 1(W_i) \right\} \sum_{j \in I} Y_j \frac{\Delta\theta}{\theta} \right]$$

$$\leq \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\theta} E \left[ \sum_{|I|=2}^{|D|} \left\{ \prod_{i \in D} 1(W_i) \right\} \sum_{j \in I} Y_j \right]$$

$$\sum_{|I|=2}^{|D|} \left\{ \prod_{i \in D} 1(W_i) \right\} \sum_{j \in I} Y_j \leq \sum_{j \in D} Y_j \leq C_{0,0}(\theta) \text{ 이므로}$$

Dominated convergence정리를 사용하면 위 식은 다음과 같이 된다.

$$\frac{1}{\theta} E \left[ \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \sum_{|I|=2}^{|D|} \left\{ \prod_{i \in D} 1(W_i) \right\} \sum_{j \in I} Y_j \right] = 0 \tag{16}$$

마지막으로 식(4)의 마지막 항이  $\Delta\theta$ 가 0으로 갈 때 극한값 0을 갖는다는 것을 보이자.

$$\begin{aligned}
 & E\left[ \sum_{\substack{|D|=2 \\ i \in D}}^{|D|} \{ \prod_{i \in D} 1(W_i) \} C_{2|D|,0}(\theta - \Delta\theta) \right] \\
 & \leq E\left[ \sum_{\substack{|D|=2 \\ i \in D}}^{|D|} \{ \prod_{i \in D} 1(W_i) \} C_{2|D|,0}(\theta - \Delta\theta) \right] \\
 & = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2^k} E\left[ \sum_{\substack{|D|=2 \\ i \in D}}^{|D|} \{ \prod_{i \in D} 1(W_i) \} C_{2|D|,0}(\theta - \Delta\theta) \right. \\
 & \quad \left. | H_{km} \right] P(H_{km}) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2^k} \sum_{\substack{|D_m|=2 \\ i \in D_m}}^{|D_m|} \{ \prod_{i \in D_m} E[1(W_i) \\
 & \quad | H_{km}] \} E[C_{2|D_m|,0}(\theta - \Delta\theta) | H_{km}] P(H_{km}) \\
 & = E[1(A) | Y < X] \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2^k} \sum_{\substack{|D_m|=2 \\ i \in D_{km}}}^{|D_m|} \left\{ \prod_{i \in D_{km}} E[1(W_i) \right. \\
 & \quad \left. | H_{km}] \right\} / E[1(A) | Y < X] \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2^k} |D_{km}| \times \\
 & \quad E[C_{1,0}(\theta - \Delta\theta) | H_{km}] P(H_{km}) \\
 & \text{편의상 } D^* \text{를 } D \text{로부터 } E[1(A) | Y < X] \text{에 해} \\
 & \text{당되는 index를 제외한 index들의 집합이라 정} \\
 & \text{의하면 부호 } D^* \text{를 사용하여 위 식은 다음과} \\
 & \text{같이 표시된다.} \\
 & E[1(A) | Y < X] E[C_{1,0}(\theta - \Delta\theta)] \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2^k} \\
 & E\left[ \sum_{\substack{|D|=2 \\ i \in D^*}}^{|D|} \{ \prod_{i \in D^*} 1(W_i) \} 2 | D | | H_{km} \right] P(H_{km}) \\
 & = E[1(A) | Y < X] E[C_{1,0}(\theta - \Delta\theta)] \times \\
 & E\left[ \sum_{\substack{|D|=2 \\ i \in D^*}}^{|D|} \{ \prod_{i \in D^*} 1(W_i) \} 2 | D | \right] \quad (17)
 \end{aligned}$$

다음으로  $\Delta\theta \rightarrow 0$ 일 때 극한값을 구하자. Dominated convergence 정리에 의해

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} E\left[ \sum_{\substack{|D|=2 \\ i \in D^*}}^{|D|} \prod_{i \in D^*} 1(W_i) \} 2 | D | \right] \\
 & = E\left[ \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \sum_{\substack{|D|=2 \\ i \in D^*}}^{|D|} \prod_{i \in D^*} 1(W_i) \} 2 | D | \right] = 0 \quad (18)
 \end{aligned}$$

식 (7), (8), 그리고 (17), (18)로 부터

$$\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\theta} E\left[ \sum_{\substack{|D|=2 \\ i \in D}}^{|D|} \prod_{i \in D} 1(W_i) \} C_{2|D|,0}(\theta - \Delta\theta) \right] = 0 \quad (19)$$

다음으로 식 (9)에서 주어지는

$$E\left[ \sum_{j \in U} X_j \right] = E[X_1] + E[X | X \leq Y] E[ | U | - 1 ]$$

을 증명하도록 하자.

$$E\left[ \sum_{j \in U-1} X_j \right] = E\left[ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2^k} 1(H_{km}) \sum_{j \in U-1} X_j \right]$$

monotone convergence 정리에 의해 위 식은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2^k} E\left[ 1(H_{km}) \sum_{j \in U-1} X_j \right] \\
 & = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2^k} E\left[ \sum_{j \in U-1} X_j | H_{km} \right] P(H_{km}) \\
 & = E[X_j | X_j < Y_j] \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2^k} ( | U_{km} | - 1 ) P(H_{km}) \\
 & = E[X_j | X_j < Y_j] E[ | U | - 1 ]
 \end{aligned}$$

이로 부터

$$\begin{aligned}
 E\left[ \sum_{j \in U} X_j \right] & = E[X_1] + E\left[ \sum_{j \in U-1} X_j \right] \\
 & = E[X_1] + E[X | X \leq Y] E[ | U | - 1 ] \quad (20)
 \end{aligned}$$

### 참고 문헌

- [1] Cao, X. R., "Convergence of Parameter Sensitivity Estimates in a Stochastic Experiment," *IEEE Trans Automatic Control*, 30, 9(1985), pp. 845-853.
- [2] Glasserman, P., "Infinitesimal Perturbation Analysis of a Birth and Death Process," *Oper. Res. Lett.*, 7(1988), pp. 43-49.
- [3] Gong, W. B. and Y. C. Ho, "Smoothed



- (Conditional) Perturbation Analysis of Discrete Event Dynamic Systems," *IEEE Trans Automatic Control*, 32(1987), pp. 856–866.
- [4] Heidelberger, P., X. R. Cao, M. A. Zazanis and R. Suri, "Convergence Properties of Infinitesimal Perturbation Analysis Estimates," *Management Science*, 34, 11 (1988), pp. 1281–1302.
- [5] Ho, Y. C. and S. Li, "Extensions of Infinitesimal Perturbation Analysis," *IEEE Trans Automatic Control*, 33, 5(1988), pp. 427–438.
- [6] Park, H. S., *Sensitivity Analysis of Discrete Event Simulations*, Ph. D. Dissertation, Northwestern University, 1988.
- [7] Ross, S. M., *Introduction to Probability Models*, Academic Press, 1985.
- [8] Suri, R. and M. A. Zazanis, "Perturbation Analysis Gives Strongly Consistent Sensitivity Estimates for the M/G/1 Queue," *Management Science*, 34, 1(1988), pp. 39–64.
- [9] Wolff, R. W., *Stochastic Modeling and the Theory of Queues*, Prentice–Hall, 1989.
- [10] Zazanis, M. A., "Infinitesimal Perturbation Analysis Estimates for Moments of the System Time of an M/M/1 Queue," *Operations Research*, 38, 2(1990), pp. 364–369.
- [11] Zazanis, M. A. and R. Suri, "Estimating Second Derivatives of Performance Measure for G/G/1 Queue from a Single Sample Path," Working Paper, Division of Applied Sciences, Harvard Univ(1985).