韓國經營科學會誌
第17卷 第1號
1992年 4月

一般 多重選擇 線型背囊問題의 擴張問題에 대한 效率的인 解法

元 重 淵*・鄭 聖 進**

An Efficient Algorithm for an Extension of the Generalized Linear Multiple Choice Knapsack Problem

J. Y. Won* and S. J. Chung**

Abstract

An extension of the generalized linear multiple choice knapsack problem[1] is presented and an algorithm of order $0([n \cdot n_{max}]^2)$ is developed by exploiting its extended properties, where n and n_{max} denote the total number of variables and the cardinality of the largest multiple choice set, respectively. A numerical example is presented and computational aspects are discussed.

1. 序 論

一般 多重選擇 線型背囊問題[1]의 擴張問題(LEGK)는 다음과 같이 정의된다.

$$\text{(LEGK)} \quad \text{Minimize} \sum_{i \in I} \sum_{j \in Ni} c_{ij} x_{ij}, \tag{1.1a}$$

$$\text{s. t.} \sum_{i \in I} \sum_{j \in Ni} a_{ij} x_{ij} \geq b, \tag{1.1b}$$

$$\sum_{j \in Ni} x_{ij} \leq r_i, \; i \in I, \tag{1.1c}$$

$$\sum_{j \in Ni} x_{ij} \geq \ell_i, \; i \in I, \tag{1.1d}$$

$$0 \leq x_{ij} \leq 1, \; j \in N_i, \; i \in I. \tag{1.1e}$$

選擇集合 N_i들은 서로 중복되지 않는다고 하고, $c_{ij} \geq 0$, $a_{ij} \geq 0$, $b \geq 0$이며, 최소선택상수 ℓ_i와 최대선택상수 r_i는 $0 \leq \ell_i \leq r_i \leq |N_i|$를 만족하는 정수들로 가정한다($\forall j \in N_i$, $i \in I$). 단, $\ell_i = r_i = 0$인 경우는 제외하기로 한다. 또한 각 選擇集合 N_i마다 모든 변수들은 제약식 (1.1b)의 계수 a_{ij}가 가장 작은 것부터 시작하여 비감소하는 순서로 재배열 되었다고 가정한다.($\forall i \in I$)

선형문제 (LEGK)는 각 변수들에 정수조건이 부가됨에 따라 대응하여 나타나는 정수문제(EGK)의 선형완화문제로서 주로 사용된다. 정수문제 (EGK)는 서로 독립된 부서(選擇集合)들이 각각 계획하고 있는 과제들중 각 부서 i마다 ℓ_i개 이상, r_i개 이하의 범위에서 과제들을 복수로 선택해야 하는 상황에 적용할 수 있는 새로운 배낭문제이다($i \in I$). 문제 (EGK)에

* 경기대학교 산업공학과
** 서울대학교 산업공학과

서 모든 i에 대해 $\ell_i=r_i=1$인 경우의 문제 (EGK)는 각 부서로부터 하나만의 과제가 선택되어야 하는 기존의 多重選擇 背囊問題[2, 3, 8, 10]가 되며, $\ell_i=r_i(\geq 1)$인 경우에는 각 부서로부터 하나 이상의 r_i개 과제들을 선택할 수 있는 一般多重選擇 背囊問題[1]가 된다. 또한, 모든 ℓ_i 및 r_i가 각각 0과 $|N_i|$인 경우에는 0-1背囊問題[4]가 된다.

제약식 (1.1c) 및 (1.1d)의 특수구조를 지니면서 제약식 (1.1b)가 복수개가 되는 일반 0-1 정수문제들은 현실적으로 유연생산계획 분야에서 기계그룹에 대한 작업할당문제등의 모형화에 빈번히 나타나고 있다(Stecke[10] 참조). 문제 (EGK)는 이러한 특수구조를 갖는 좀 더 복잡한 정수문제들을 풀기 위한 代用緩和問題 (surrogate relaxed problem)로서 활용될 수 있다.

정수계획문제의 정수 최적해를 찾기 위하여 선형완화에 기초한 分枝限界技法을 적용할때 후보문제들의 선형완화문제를 효율적으로 푼다는 것은 매우 중요한 일이다. 이것은 분지한계틀내에서 탐색해야 할 많은 후보문제들을 미리 절단할 수 있고 분지방향에 대한 정보를 얻을 수 있기 때문이다.

본 연구에서 고려한 선형문제 (LEGK)는 모든 i에 대해 $\ell_i=r_i=1$인 경우 多重選擇 線型背囊問題가 되며 특히 이 문제에 대해서는 최근에 여러 특성들이 연구되었고 효율적인 해법들이 제시되었다 [2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12]. 문제 (LEGK)에서 $\ell_i=r_i(\geq 1)$인 경우에는$(\forall i\in I)$ 一般 多重選擇 線型背囊問題 (LGK)가 되며 이 문제의 특성 및 해법은 [1]에서 연구된 바 있다. 문제 (LEGK)에서는 一般問題 (LGK)[1]와 마찬가지로 변수간의 우월성이 성립하지 않으나 一般問題 (LGK)와는 달리 최적해에서 한개나 두개의 변수가 분수값을 취할 수 있다. 본 研究에서는 문제 (LEGK)의 목적함수치가 제약식(1.1b)의 우변상수 b에 대해 아래로 볼록한 부분 선형곡선을 형성한다는 점에 착안하여 b에 대한 母數分析 특성을 연구, 이를 활용하여 최악상황하의 계산상 복잡도가 $O([n\cdot n_{max}]^2)$인 효율적 해법을 제시한다. n은 총 변수의 수, n_{max}는 각 선택집합들의 원소수들 중에서 최대수를 의미한다. 본 연구에서는 단지 우변상수 b가 증가하는 경우에의 母數分析 특성만을 제시하였으나, 이는 우변상수가 감소하는 경우의 모수분석에도 같은 방법으로 적용될 수 있다.

2. 擴張特性

副問題 $(SP_i(b_i))$들을 다음과 같이 정의하자 $(i\in I)$.

$$(SP_i(b_i))\quad z_i(b_i) = \text{Minimize} \sum_{j\in N_i} c_{ij}\, x_{ij}, \tag{2.1a}$$

$$\text{s. t.} \sum_{j\in N_i} a_{ij}\, x_{ij} \geq b_i, \tag{2.1b}$$

$$\sum_{j\in N_i} x_{ij} \leq r_i, \tag{2.1c}$$

$$\sum_{j\in N_i} x_{ij} \geq \ell_i, \tag{2.1d}$$

$$0\leq x_{ij}\leq 1,\ j\in N_i. \tag{2.1e}$$

여기서, b_i는 구간 $[0,\ ub_i]$에 속하는 값을 취한다고 하자. 단, $ub_i\equiv\sum_{j=n_i-r_i+1}^{n_i} a_{ij}$, $n_i\equiv|N_i|$이다. 또한, $ub\equiv\sum_{i\in I} ub_i$ 라 하자.

副問題 $(SP_i(b_i))$는 b_i가 0과 ub_i의 사이값일 때 가능해가 존재하며, 목적함수치 $z_i(b_i)$는 b_i에 대해 아래로 볼록한 부분선형함수이다. 다음의 主問題 (MP(b))를 고려하자.

$$(\mathrm{MP(b)})\quad z(b)=\text{Minimize} \sum_{i\in I} z_i(b_i), \tag{2.2a}$$

$$\text{s. t.} \sum_{i\in I} b_i \geq b, \tag{2.2b}$$

$$0 \leq b_i \leq ub_i,\ i\in I. \tag{2.2c}$$

補助定理 1. 확장문제 (LEGK)와 주문제 (MP(b))는 다음과 같은 의미에서 동일한 문제이다. 즉, 한 문제에 가능해가 존재하면 대응되는 가능해가 다른 문제에 항상 존재하며 두 문제의 목적함수치는 서로 같다.

證明. 벡타 $\tilde{x}_1,\cdots,\tilde{x}_m$를 문제 (LEGK)의 가능해라 하자. 여기서, $\tilde{x}_i\equiv(\tilde{x}_{i1},\cdots,\tilde{x}_{in_i})$, $\forall i\in I$, $m=|I|$이다. 각 벡타 $\tilde{x}_i$는 부문제 $(SP_i(b_i))$의 제약식 (2.1c), (2.1d), (2.1e)를 만족시킨다. $\tilde{b}_i\equiv\sum_{j\in N_i} a_{ij}\tilde{x}_{ij}$라 하면 ($\forall i\in I$), $\tilde{x}_i$는 부문제 $(SP_i((\tilde{b}_i))$의 가능해이다. 제약식 (2.1b)는 등식으로 만족된다. 부문제 $(SP_i(\tilde{b}_i))$는 가능해 $\tilde{x}_i$를 갖으므로 $\tilde{b}_i$는 구간 $[0,\ ub_i]$에 속하고 따라서 주문제의 제약식 (2.2c)를 만족시킨다. 또한, $(\tilde{b}_1,\cdots,\tilde{b}_m)$은 제약식(2.2b)를 만족시킨다. 이것은 $\sum_{i\in I}\tilde{b}_i=\sum_{i\in I}\sum_{j\in N_i} a_{ij}\tilde{x}_{ij}$이며, $(\tilde{x}_1,\cdots,\tilde{x}_m)$은 제약식 (1.1b)를 만족시키기 때문이다. 따라서, $(\tilde{b}_1,\cdots,\tilde{b}_m)$는 주문제 (MP(b))의 가능해가 된다. 다음으로, 벡타 $(\tilde{b}_1,\cdots,\tilde{b}_m)$를 문제 (MP(b))의 가능해라고 하자. 그러면, 부문제 $(SP_i(\tilde{b}_i))$는 가능해를 갖으므로 이 해를 $\tilde{x}_i=(\tilde{x}_{i1},\cdots,\tilde{x}_{in_i})$라 하면, 문제 (LEGK)의 제약식 (1.1c), (1.1d), (1.1e)를 만족시킨다. 또한, $(\tilde{x}_1,\cdots,\tilde{x}_m)$는 문제(LEGK)의 제약식 (1.1b)를 만족시킨다. 즉, $\sum_{i\in I}\sum_{j\in N_i} a_{ij}\tilde{x}_{ij}\geq\sum_{i\in I}\tilde{b}_i\geq b$가 성립한다. 이것은 각 $\tilde{x}_i$가 부문제 $(SP_i((\tilde{b}_i))$의 제약식 (2.1b)를 만족시키고, 또한 $(\tilde{b}_1,\cdots,\tilde{b}_m)$는 주문제 (MP(b))의 제약식 (2.2b)를 만족하기 때문이다. 따라서, $(\tilde{x}_1,\cdots,\tilde{x}_m)$는 문제 (LEGK)의 가능해가 된다. 끝으로, 문제 (LEGK)의 목적함수는 주문제 (MP(b))의 목적함수와 항상 같으므로 정리가 성립된다. ■

縮小基底行列(working basis) B는 副問題 (SP_i)의 제약식들 (2.1b), (2.1c), (2.1d)에 대한 정칙인 정방행열로서 차원이 3×3인 행열로 정의한다. 단, r_i가 ℓ_i와 같은 경우에는 縮小基底行列의 차원은 2×2가 된다. 한 副問題에 縮小基底行列이 주어졌을때 열벡타에 해당하는 기저변수만을 고려하기로 한다.

副問題 (SP_i)에서 비율 $\theta(i, j_1, j_2)$를 다음과 같이 정의한다. (단, $a_{ij_1}=a_{ij_2}$이면 $\theta\equiv\infty$로 정의한다.)

$$\theta(i, j_1, j_2) = (c_{ij_1}-c_{ij_2})/(a_{ij_1}-a_{ij_2})$$

위 식에서 j_1(또는 j_2)이 N_i에 속하지 않는 지수이면, 즉 제약식 (2.1c), (2.1d), (2.1e)에 대한 여유변수나 잉여변수일 때, $j_1\equiv0(j_2\equiv0)$이라 한다. 이 경우 $a_{ij_1}=c_{ij_1}=0(a_{ij_2}=c_{ij_2}=0)$이다. 제약식 (2.1c)에 대한 여유변수를 s_i, (2.1d)에 대한 잉여변수를 p_i, (2.1e)에 대한 여유변수를 s_{ij}라 하자. 단, $\ell_i=r_i$인 경우에는 이들 여유변수나 잉여변수는 고려되지 않는다([1] 참조). 또한, 앞으로 전개될 정리들에서 다음을 가정한다. 즉, 副問題 $(SP(b_i))$에서 $b_i=b_i^*$일때의 LP最適解가 整數解이고, 이때 1의 값을 갖는 변수들의 지수집합을 J_i라 한다. 그러면, $b_i^*=\sum_{j\in N_i} a_{ij}$가 성립하고 $|J_i|$는 $\ell_i\leq|J_i|\leq r_i$를 만족한다. 副問題$(SP_i(b_i))$에서 b_i값의 변화에 따라 분수값을 취하게 되는 최적기저변수의 지수들을 $f_1(i)$, $f_2(i)$라 하자. 또한, 벡타 $\mathbf{b}_i^*\equiv(b_i^*, r_i,$

$\ell_i)^t$, 벡타 $\mathbf{b}_i' \equiv (1, 0, 0)^t$라 한다.

定理 2. $|J_i| < r_i$라고 가정하자. 부문제 ($SP_i(b_i)$)에서 b_i가 b_i^*로부터 $b_i^*+\alpha$로 증가함에 따라 (단, $\alpha>0$, α는 충분히 작은 수) 분수값을 취하게 되는 최적 기저변수의 지수 $f_1(i)$, $f_2(i)$는 다음 식에 의해 결정된다.

$$\theta\,(i, f_1(i), f_2(i)) = \min[\min_{j_1 \in J_i} \min_{j_2 \in N_i \setminus J_i,\ j_2 > j_1} \{\theta(i, j_1, j_2)\}, \min_{j_2 \in N_i \setminus J_i} \{\theta(i, 0, j_2)\}] \tag{2.3}$$

證明. 가정에 의하여 $|J_i| < r_i$ 이므로, s_i는 기저변수이다. 또한, $a_{ij} \geq 0$ 이므로 ($\forall j$) 최적해는 제약식 (2.1b)를 항상 등식으로 만족시킨다. 잉여변수 p_i가 기저변수인가의 여부에 따라 다음의 두가지 경우가 발생한다.

1) 잉여변수 p_i가 비기저 변수인 경우, 제약식 (2.1d)는 등식으로 만족이 된다. 그러므로, s_i 이외의 두 기저변수는 모두 N_i에 속하고 그 합이 1이므로 α가 증가함에 따라 두 기저변수는 동시에 분수값을 취한다; 증가된 α를 충족시키기 위해서는 집합 J_i에 속한 하나의 변수 x_{ij_1}이 현재의 값 1에서 감소하고, 집합 $N_i \setminus J_i$에 속하면서 $a_{ij_2} > a_{ij_1}$인 다른 변수 x_{ij_2}가 현재의 해 0에서 증가해야 한다. 이외의 모든 변수는 0이나 1을 취한다. 그러므로, 축소기저행열 B는 기저벡타 (x_{ij_1}, x_{ij_2}, s_i)에 해당되며 이때의 최적 목적함수치 $z_i(b_i^*+\alpha)$는 다음과 같다. 단, 부문제 ($SP_i(b_i^*+\alpha)$)에의 최적기저는 부문제 ($SP_i(b_i^*)$)에서도 최적임에 유의한다.

$$\begin{aligned} z_i(b_i^*+\alpha) &= z_i(b_i^*) + \alpha c_B B^{-1}\mathbf{b}_i' \\ &= z_i(b_i^*) + \alpha(c_{ij_1} - c_{ij_2})/(a_{ij_1} - a_{ij_2}) \\ &= z_i(b_i^*) + \alpha\theta\,(i, j_1, j_2) \end{aligned}$$

여기서, $c_B = (c_{ij_1}, c_{ij_2}, 0)$는 축소기저행열 B에 해당되는 기저비용벡타이다. 그러므로, 목적함수치 $z_i(b_i^*+\alpha)$는 α가 증가함에 따라 $\theta\,(i, j_1, j_2)$의 비율로 증가하므로 목적함수치의 최소증가를 위하여 다음의 식 (2.4)에서의 $f_1(i)$, $f_2(i)$가 기저변수의 지수로 선택된다.

$$\theta\,(i, f_1(i), f_2(i)) = [\min_{j_1 \in J_i} \min_{j_2 \in N_i \setminus J_i,\ j_2 > j_1} \{\theta(i, j_1, j_2)\} \tag{2.4}$$

식 (2.4)에서 $j_2 > j_1$의 조건은 $a_{ij_2} > a_{ij_1}$의 조건과 같다. 이것은 기저변수가 최소비율에 의해 결정되고 제약식 (2.1b)의 계수들은 비감소하는 순으로 배열됐기 때문이다.

2) 잉여변수 p_i가 기저변수인 경우, s_i는 기저변수이므로 이외의 하나의 기저변수는 집합 N_i에서 발생한다. α가 증가하여도 현재의 1을 갖는 해집합에는 변함이 없다; 증가된 α를 충족시키기 위하여 $N_i \setminus J_i$에 속하는 하나의 변수 x_{ij_2}가 현재의 해 0에서 증가해야 한다. 이 경우 제약식 (2.1e)에 의해 변수 x_{ij_2}에 해당되는 여유변수 s_{ij_2}가 또한 분수값을 갖는다. 이외의 모든 변수들은 0이나 1을 취한다. 이때의 축소기저행열 B는 기저벡타 (x_{ij_2}, s_i, p_i)에 해당되며 최적 목적함수치 $z_i(b_i^*+\alpha)$는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} z_i(b_i^*+\alpha) &= z_i(b_i^*) + \alpha c_B B^{-1}\mathbf{b}_i' \\ &= z_i(b_i^*) + \alpha\, c_{ij_2}/a_{ij_2} \\ &= z_i(b_i^*) + \alpha\theta\,(i, 0, j_2) \end{aligned}$$

여기서, $c_B = (c_{ij_2}, 0, 0)$이다. 그러므로, 목적함수치 $z_i(b_i^*+\alpha)$는 α가 증가함에 따라 $\theta\,(i, 0, j_2)$의 비율로 증가하므로 목적함수치의 최소증가를 위하여 다음의 식에 의하여 기저변수가 선택된다.

$$\theta\,(i, f_1(i), f_2(i)) = \min_{j_2 \in N_i \setminus J_i} \{\theta(i, 0, j_2)\}] \tag{2.5}$$

이상의 두 경우로부터 α가 증가함에 따라 목

적합수치의 최소증가가 이루어지는 최적 기저 변수로는 위의 식 (2.4), (2.5)중에서 최소비율을 갖는 $f_1(i)$, $f_2(i)$가 선택되야 한다. 따라서, 정리의 식 (2.3)이 성립한다. ■

定理 3. $|J_i|=r_i$ 이고 $b_i^*<ub_i$ 라 가정하자. 부문제 $(SP_i(b_i))$에서 b_i가 b_i^*로부터 $b_i^*+\alpha$로 증가함에 따라 (단, $\alpha>0$, α는 충분히 작은 수) 분수값을 취하게 되는 최적 기저변수의 지수 $f_1(i)$, $f_2(i)$는 다음 식에 의해 결정된다.

$$\theta(i, f_1(i), f_2(i))=\min_{j_1\in J_i}\ \min_{j_2\in N_i\setminus J_i,\ j_2>j_1}\{\theta(i, j_1, j_2)\} \quad (2.6)$$

證明. b_i^*가 ub_i보다 적으므로 현 정수해에서 1의 값을 취하는 변수들의 집합 J_i는 집합 N_i의 진부분집합이며 따라서 지수 $f_1(i)$, $f_2(i)$는 항상 찾아진다. $|J_i|$값이 r_i이면 b_i가 증가하여도 $|J_i|$값은 변함이 없다. 가정에 의하여 $|J_i|=r_i$이므로 제약식 (2.1c)는 등식으로 만족이 되며, 따라서 두 기저변수는 모두 N_i에 속하고 그 합은 1이다. 그러므로 정리 2의 증명 1)과 같이 집합 N_i에 속하는 두기저변수는 x_{ij_1}, x_{ij_2} 이며 이때 $j_1\in J_i$, $j_2\in N_i\setminus J_i$, $j_2>j_1$이 성립한다. 이외의 모든 변수들은 0이나 1의 값을 취한다. $r_i>\ell_i$일 경우 p_i는 기저변수이다. 따라서 축소기저행열 B는 기저벡타$(x_{ij_1}, x_{ij_2}, p_i)$에 해당되며, 이때의 최적 목적함수치는 다음과 같다.

$$z_i(b_i^*+\alpha)=z_i(b_i^*)+\alpha c_B B^{-1}\mathbf{b}_i'$$
$$=z_i(b_i^*)+\alpha\theta(i, j_1, j_2)$$

여기서, $c_B=(c_{ij_1}, c_{ij_2}, 0)$이다. 그러므로, 목적함수치의 최소증가를 위해서는 정리의 식 (2.6)과 같은 $f_1(i)$, $f_2(i)$가 최적 기저변수의 지수로 선택된다. $r_i=\ell_i$인 경우에는 제약식 (2.1c)와 제약식 (2.1d)는 동일하고, 이때의 축소기저행열 B의 차원은 2×2이며 기저벡타(x_{ij_1}, x_{ij_2})에 해당된다. 최적목적함수치는 $r_i>\ell_i$ 경우와 같으며 다만 $c_B=(c_{ij_1}, c_{ij_2})$이고 $\mathbf{b}_i'=(1, 0)^t$이다. 이상으로부터 정리가 성립된다. ■

定理 3에서 b_i^*가 ub_i 이상의 값일때 副問題 $(SP_i(b_i^*+\alpha))$는 모든 양수 α에 대해 비가해이며 이때는 지수 $f_2(i)$가 찾아지지 않는다. 定理 2및 定理 3으로부터 選擇集合 N_i에서 한개 또는 두개의 기저변수가 발생한다는 것을 알 수 있다.

從定理 4. 부문제 $(SP_i(b_i^*+\alpha))$에서 정리 2및 정리 3에서와 같이 분수값을 취하는 최적 기저변수들을 $x_{if_1(i)}$, $x_{if_2(i)}$라 하자(단, $f_2(i)>f_1(i)$). 현 기저가 최적으로 유지되는 α의 범위는 $0<\alpha<a_{if_2(i)}-a_{if_1(i)}$이다. 단, $a_{if_2(i)}-a_{if_1(i)}>0$이다.

證明. 정리 2 및 정리 3에서 기저변수들은 최소비율에 의하여 결정되므로 $a_{if_2(i)}-a_{if_1(i)}$는 항상 양의 값을 취한다. 부문제 $(SP_i(b_i))$에서 제약식들 (2.1b), (2.1c), (2.1d)에 해당하는 j번째 열벡타를 $A_{ij}\equiv(a_{ij}, 1, 1)^t$라 하고, 벡타 $\mathbf{u}_1\equiv(1, 1, \infty)^t$, 벡타 $\mathbf{u}_2\equiv(1, \infty, \infty)^t$라 하자. $|J_i|$값이 r_i인가의 여부에 따라 다음의 두가지 경우를 고려한다.

1) $|J_i|<r_i$인 경우 s_i는 항상 기저변수이며, p_i가 기저인가의 여부에 따라 다음의 두가지 경우를 고려한다.(정리 2 참조) i) p_i가 비기저변수이면 제약식 (2.1d)는 등식으로 성립한다. 그러므로 집합 N_i에서 두 기저변수가 발생하고, 축소기저행열 B는 기저벡타 $(x_{if_1(i)}, x_{if_2(i)}, s_i)$에 해당된다. 현 기저가 최적으로 유지되기 위한 조건은 다음과 같다.

$$\mathbf{0}\le B^{-1}(\mathbf{b}_i^*+\alpha\mathbf{b}_i'-\sum_{j\in J_i\setminus\{f_1(i)\}}A_{ij})\le\mathbf{u}_1$$

여기서, 1의 값을 취하는 비기저변수의 집합은 $J_i \backslash \{f_1(i)\}$이다. 그러므로 정리의 α범위가 성립된다. ii) p_i가 기저변수이면 집합 N_i에서 한개의 기저변수가 발생한다. 축소기저행열 B는 기저벡타 $(x_{if_2(i)}, s_i, p_i)$에 해당되며, 현 기저가 최적으로 유지되기 위한 조건은 다음과 같다.

$$\mathbf{0} \leq B^{-1}(\mathbf{b}_i^* + \alpha \mathbf{b}_i' - \sum_{j \in J_i} A_{ij}) \leq \mathbf{u}_2$$

1의 값을 취하고 있는 비기저변수의 집합은 J_i이다. 위의 조건을 만족시키는 α의 범위는 $0 \leq \alpha \leq a_{if_2(i)}$이다. 그러나, 이 경우 $x_{if_1(i)}$는 여유변수에 해당되므로 $a_{if_1(i)}$의 값은 0이다. 따라서, 정리의 α 범위가 성립한다.

2) $|J_i| = r_i$ 인 경우 제약식 (2.1c)는 등식으로 만족된다. i) $r_i > \ell_i$ 인 경우 p_i는 기저변수이며, 집합 N_i에서 두 기저변수가 발생한다. 축소기저행열 B는 기저벡타 $(x_{if_1(i)}, x_{if_2(i)}, p_i)$에 해당되며 현 기저가 최적으로 유지되기 위한 조건은 다음과 같다.

$$\mathbf{0} \leq B^{-1}(\mathbf{b}_i^* + \alpha \mathbf{b}_i' - \sum_{j \in J_i \backslash \{f_1(i)\}} A_{ij}) \leq \mathbf{u}_1$$

여기서, 1의 값을 취하는 비기저변수의 집합은 $J_i \backslash \{f_1(i)\}$이다. 따라서, 정리의 범위가 성립한다. ii) $r_i = \ell_i$ 인 경우 축소기저행열 B는 기저벡타 $(x_{if_1(i)}, x_{if_2(i)})$에 해당되며 현 기저가 최적으로 유지되기 위한 조건은 $r_i > \ell_i$ 인 경우와 같다. 단, $\mathbf{b}_i^*$, A_{ij}, $\mathbf{b}_i'$, $\mathbf{u}_1$은 각각 $(b_i^*, r_i)'$, $(a_{ij}, 1)'$, $(1, 0)'$, $(1, 1)'$로 대체된다. 따라서, α의 범위가 성립된다. ■

從定理 4에서 b_i가 b_i^*로부터 $\alpha^* = a_{if_2(i)} - a_{if_1(i)}$ 만큼 더 증가하면, 기저변수 $x_{if_1(i)}$와 $x_{if_2(i)}$는 각각 0과 1의 값을 취함을 쉽게 알 수 있다.

定理 2 및 定理 3에서 사용될 최적 정수해는 쉽게 구할 수 있다. 본 연구에서는 초기해로서 최적 목적함수치 $z_i(b_i)$의 하한치에 해당하는 정수해를 사용한다. 즉, 副問題 (SP_i)에서 목적함수의 계수들중 가장 작은 ℓ_i개 변수의 지수들을 찾고 이 지수들의 집합을 J_i라 하자. (단, $\ell_i = 0$이면 $J_i = \{0\}$이라 한다.) ℓ_i번째로 작은 지수가 여러 개 있을 경우에는 해당되는 제약식의 계수 a_{ij}가 가장 큰 것을 선택한다. 그러면 최적 목적함수치에 대한 하한치 z_i^l은 $z_i^l = \sum_{j \in Ji} c_{ij}$ 이며, 이 목적치가 LP최적이 되는 b_i의 구간은 $[0, b_i^l]$이다. 단, $b_i^l = \sum_{j \in Ji} a_{ij}$ 이다.

3. 解法 및 分析

問題 (LEGK)에 대한 해법은 2절에서의 副問題 특성 및 主問題 (MP(b))에 대한 母數分析特性에 기반하고 있다. 定理 5 및 定理 6에서 다음을 가정한다. 즉, $b = b^*$일때의 主問題 $(MP(b^*))$에서 각 副問題(SP_i)의 최적해는 정수해라고 가정하고 1의 값을 취하는 변수들의 지수집합을 J_i라 하자 $(\forall i \in I)$.

定理 5. 주문제 $(MP(b^*))$에서 $b^* < ub$라 가정하자. 주문제 (MP(b))에서 b가 b^*로부터 $b^* + \alpha$로 증가함에 따라($\alpha > 0$, α는 충분히 작은 수), 분수해가 발생하는 부문제 (SP_q) 및 이 부문제에서의 분수값을 취하는 최적 기저변수의 지수 $f_1(q)$, $f_2(q)$는 다음 식에 의해 결정된다.

$$\theta(q, f_1(q), f_2(q)) = \min_{i \in I} \{\theta(i, f_1(i), f_2(i))\} \quad (3.1)$$

단, $\theta(i, f_1(i), f_2(i))$는 $|J_i| < r_i$이면 식 (2.3)에

의하여, $|J_i|=r_i$ 이면 식 (2.6)에 의하여 계산된다.

證明. b^*가 $ub(=\sum_{i\in I} ub_i)$보다 적을때 문제($MP(b^*+\alpha)$)는 충분히 적은 α에 대해서 가능해를 갖으며, 따라서 $f_1(q)$ 및 $f_2(q)$는 항상 찾아진다. 가정에 의하여 문제 ($MP(b^*)$)의 최적해는 정수해이다. b가 b^*에서 α만큼 증가함에 따라 분수해가 발생하며, 충분히 작은 α에 대해 분수해가 발생하는 부문제는 유일하다. 이 부문제를 (SP_i)라 하면, (SP_i)이외의 부문제에서의 정수해는 변함이 없다. 부문제(SP_i)에서 분수값을 취하는 최적 기저변수들은 $|J_i|<r_i$ 이면 정리 2에 의해 결정되며, $|J_i|=r_i$ 이면 정리 3에 의해 결정된다. 따라서, 최적 목적함수치 $z(b^*+\alpha)$는 다음과 같다.

$$z(b^*+\alpha)=z(b^*)+\alpha\theta\ (i,\ f_1(i),\ f_2(i))$$

최적 목적함수치 $z(b^*+\alpha)$는 α가 증가함에 따라 $\theta\ (i,\ f_1(i),\ f_2(i))$ 의 비율로 증가한다. 목적함수의 최소증가를 위해서 증가된 α를 할당해야 할 부문제로는 가장 작은 비율로 형성하는 부문제 (SP_q)가 선택된다. 그러므로, 정리의 식 (3.1)이 성립한다. ■

定理 5에서 $b^*=ub$이면 문제 ($MP(b^*+\alpha)$)는 임의의 양수 α에 대해 항상 비가해이며 이 경우 $f_2(q)$는 찾아지지 않는다. 문제 ($MP(b)$)에서 $b^*\geq b$인 정수해가 주어지면 $(b^*=\sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i} a_{ij})$, 문제 ($MP(b^*)$)에 우변상수 b가 감소하는 형태의 모수분석을 사용할 수 있다. 이 경우에도 定理 5는 쉽게 수정되어 적용될 수 있다.

다음 定理 6은 문제 (LEGK)에 가능해가 존재하면, 定理 5의 반복적용에 의하여 문제 (LEGK)의 最適解를 항상 찾을 수 있음을 보여준다. 문제(LEGK)를 (LEGK(b))로 표시하자. 定理 6은 b^*보다 작은 임의의 우변상수를 갖는 문제 (LEGK)에 대해서도 쉽게 수정되어 적용 가능하다.

定理 6. 문제 (LEGK(b))에서 $b=b^*$ 일때의 최적해가 정수해라 하자. b^*보다 큰 임의의 우변상수 $\hat{b}$에 대한 문제 (LEGK($\hat{b}$))의 최적기저는 주어진 정수해에서 시작하여 유한번안에 구해진다.

證明. 문제 (LEGK(b^*))의 최적 정수해도 가능해이므로 보조정리 1에 의하여 문제 ($MP(b^*)$)의 가능해가 존재하며 ($MP(b^*)$)의 각 부문제에서의 최적해도 또한 정수해이다. 문제($MP(b)$)에서 b가 b^*로부터 α만큼 증가함에 따라, 충분히 적은 α에 대해서 단지 하나의 부문제만이 분수해를 갖으며 정리 5에 의하여 이 부문제에 대한 최적기저 B^1이 찾아진다. 이 부문제를 (SP_q)라 하면 이외의 부문제의 해는 변함이 없다. B^1이 최적으로 유지되는 b의 구간은 종정리 4에 의해 $b^*\leq b\leq b^*+\alpha_1$이다. 단, $\alpha_1=a_{qf_2(q)}-a_{qf_1(q)}>0$이다. $b^*+\alpha_1\geq\hat{b}$이면, B^1은 부문제 (SP_q)의 최적기저이다. $b^*+\alpha_1<\hat{b}$이면, 문제 ($MP(b^*+\alpha_1)$)의 최적해는 또한 정수해이므로, 정리 5가 재적용 가능하다. 그러므로, 다음을 만족하는 $\tau(\tau\geq2)$가 존재한다. (단, $\alpha_t>0$, $\forall t=1,\cdots\cdots,\tau$)

$$b^*+\sum_{t=1}^{\tau-1}\alpha_t<\hat{b}\leq b^*+\sum_{t=1}^{\tau}\alpha_t$$

즉, $\alpha_t>0(\forall t)$이므로 정리 5에 의해 유한번 안에 $B^1, B^2, \ldots, B^\tau$가 구해지고, B^τ는 주문제 ($MP(\hat{b})$)의 분수해를 갖는 부문제에 대한 최적기저가 된다. 따라서, 보조정리 1에 의하여 기저 $B^1,\ldots,$

B^r로 부터 문제 (LEGK($\hat{b}$))의 최적해가 구해진다. ■

定理 5 및 定理 6에서 사용될 整數解는 쉽게 구해져야 한다. 본 硏究에서는 初期 整數解로서 최적 목적함수치 z(b)의 下限值가 발생하는 整數解를 사용한다. 이 整數解는 각 副問題 (SP_i)의 최적 목적함수치 $z_i(b_i)$의 下限值에 해당하는 整數解들로부터 구해진다 ($\forall i$). 이 해에서 1의 값을 취하는 변수들의 指數集合을 J, 이 해가 문제 (LEGK(b))에서 LP최적해가 될 수 있는 b의 구간 $[0, b^1]$은 다음과 같다.

$$J = \bigcup_{i \in I} J_i,\quad b^1 = \sum_{i \in I} b_i^1$$

다음에는 擴張問題 (LEGK)에 대한 解法을 제시한다.

단계 1. 각 選擇集合 N_i마다 모든 변수들을 制約式의 계수 a_{ij}가 비감소하는 순서로 재배열한다 ($\forall i \in I$).

단계 2. 각 選擇集合 N_i에서 목적함수의 계수 c_{ij}가 가장 작은 ℓ_i개 變數의 지수들을 찾고, 이 지수들의 집합을 J_i라 한다 ($\forall i \in I$). (단, $\ell_i = 0$이면, $J_i = \{0\}$이라 한다.) 다음을 계산한다. $\bar{b} = b - \sum_{i \in I} \sum_{j \in J_i} a_{ij}$.
$\bar{b} \le 0$ 이면, 과정을 끝낸다.
問題(LEGK)의 最適解는 다음과 같다.
$x_{ij} = 1,\ j \in J_i,\ x_{ij} = 0,\ j \in N_i \backslash J_i,\ \forall i \in I$.
$\bar{b} > 0$ 이면, 단계 3으로 간다.

단계 3. 다음을 계산하여 분수해가 발생하는 選擇集合 N_q 및 분수값을 취하는 변수의 지수 $f_1(q), f_2(q)$를 결정한다.

$$\theta(q, f_1(q), f_2(q)) = \min_{i \in I}\{\theta(i, f_1(i), f_2(i))\}$$

단, $\theta(i, f_1(i), f_2(i))$는 $|J_i| < r_i$이면 식 (2.3)에 의하여 $|J_i| = r_i$이면 식 (2.6)에 의하여 계산한다.
지수 $f_2(q)$가 존재하지 않으면, 問題 (LEGK)는 非可解이다. 과정을 끝낸다.
최소비율을 갖는 q가 여러개 존재하면, 가장 작은 지수를 선택한다.
$f_1(q) \in N_q$이면, 단계 4로 간다.
$f_1(q) \notin N_q$이면, 단계 5로 간다.

단계 4. $\bar{b} \le a_{qf_2(q)} - a_{qf_1(q)}$이면, 단계 6으로 간다.
$\bar{b} > a_{qf_2(q)} - a_{qf_1(q)}$이면, 다음을 수행한다.
$\bar{b} \leftarrow \bar{b} - (a_{qf_2(q)} - a_{qf_1(q)})$
$J_q \leftarrow J_q \cup \{f_2(q)\} \backslash \{f_1(q)\}$
단계 3으로 간다.

단계 5. $\bar{b} \le a_{qf_2(q)}$이면, 단계 6으로 간다.
$\bar{b} > a_{qf_2(q)}$이면, 다음을 수행한다.
$\bar{b} \leftarrow \bar{b} - a_{qf_2(q)}$
$J_q \leftarrow J_q \cup \{f_2(q)\}$
단계 3으로 간다.

단계 6. 最適解는 다음과 같다. 과정을 끝낸다.
(단, $f_1(q) \notin N_q$이면, $a_{qf_1(q)} = 0$)
$x_{qf_1(q)} = (a_{qf_2(q)} - a_{qf_1(q)} - \bar{b}) / (a_{qf_2(q)} - a_{qf_1(q)})$,
$x_{qf_2(q)} = \bar{b} / (a_{qf_2(q)} - a_{qf_1(q)})$,
$x_{qj} = 1,\ j \in J_q,\ j \neq f_1(q)$,
$x_{qj} = 0,\ j \in N_q \backslash J_q,\ j \neq f_2(q)$,
$x_{ij} = 1,\ j \in J_i,\ x_{ij} = 0,\ j \in N_i \backslash J_i,\ i \in I,\ i \neq q$.

解法의 단계 3에서 최소 비율을 갖는 지수 q가 여러 개 존재할 경우, 최적조건을 만족하는 각 q에 대해 代案 最適解가 발생한다.

解法의 단계 1은 각 副問題마다 모든 변수들을 크기순으로 재배열하는 작업이므로 計算上

複雜度는 $0(\sum_{i \in I} n_i \log(n_i))$이다. 단계 2는 각 副問題마다 목적함수의 계수가 가장 작은 ℓ_i개 변수의 지수를 찾는 작업이므로 複雜度는 $0(n \cdot n_{max})$이다. 단계 3에서 각 副問題에서의 최소의 비율은 $0(r_i n_i)$로서 계산되며, 따라서 모든 副問題에 대한 최소의 비율은 $0(n \cdot n_{max})$로서 계산된다 ($n = \sum_{i \in I} |N_i|$, $n_{max} = \max_{i \in I} |N_i|$). 단계 4, 단계 5 및 단계 6의 計算上 複雜度는 무시할 수 있다. 이상으로부터 주요단계 (단계 3, 단계 4 및 단계 5)가 한 회 적용될 때의 複雜度는 $0(n \cdot n_{max})$이다. 각 副問題에 대해 위의 주요단계가 r_i회 적용될 때마다 적어도 하나의 변수는 제거가능하므로 주요단계가 적용될 수 있는 최대회수는 $\sum_{i \in I} r_i n_i \leq n \cdot n_{max}$ 이다. 그러므로, 위 解法에 대한 計算上 複雜度는 $0([n \cdot n_{max}]^2)$이다.

4. 數値例題

다음과 같은 問題의 最適解를 구한다.

$$\text{Minimize} \sum_{i \in I} \sum_{j \in N_i} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s. t.} \sum_{i \in I} \sum_{j \in N_i} a_{ij} x_{ij} \geq 68, \quad 1 \leq \sum_{j \in N_1} x_{1j} \leq 2,$$

$$2 \leq \sum_{j \in N_2} x_{2j} \leq 3,$$

$$0 \leq x_{ij} \leq 1, \ \forall j \in N_i, \ i \in I.$$

여기서, 選擇集合 N_i의 목적함수 계수 c_{ij} 및 制約式의 계수 a_{ij}는 다음 표와 같으며 $N_i = \{1,...,15\}$, $i \in I = \{1, 2\}$이다.

i	c_{ij}, a_{ij} \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	c_{1j}	5	3	4	6	5	5	7	8	13	15	17	15	21	23	30
	a_{1j}	2	3	7	10	12	15	17	19	23	25	28	30	31	32	35
2	c_{2j}	4	2	3	4	5	7	9	6	8	11	13	13	14	19	20
	a_{2j}	1	2	4	5	7	9	11	12	13	14	15	16	17	18	19

<1회>

단계 1. 계수 a_{ij}들은 이미 증가하는 순으로 배열되었다. ($\forall j \in N_i$, $i = 1,2$)

단계 2. $J_1 = \{2\}$, $J_2 = \{2, 3\}$

$\bar{b} = 68 - (3+2+4) = 59 > 0$, 단계 3으로 간다.

단계 3. $\theta(q, f_1(q), f_2(q)) = \min\{\theta(1,2,6),$

$\theta(2,3,8)\} = \theta(1,2,6) (=2/12)$

$f_1(1)(=2) \in N_1$, 단계 4로 간다.

단계 4. $\bar{b}(=59) > a_{16} - a_{12}(=12)$

$\bar{b} = 59 - 12 = 47$

$J_1 = \{6\}$, 단계 3으로 간다.

<2회>

단계 3. $\theta(q, f_1(q), f_2(q)) = \min\{\theta(1,0,7),$

$\theta(2,3,8)\} = \theta(2,3,8) (=3/8)$

$f_1(2)(=3) \in N_1$이므로, 단계 4로 간다.

단계 4. $\bar{b}(=47) > a_{28} - a_{23}(=8)$

$\bar{b} = 47 - 8 = 39$

$J_2 = \{2,8\}$, 단계 3으로 간다.

<3회>

단계 3. $\theta(q, f_1(q), f_2(q)) = \min\{\theta(1,0,7),$

$\theta(2,2,3)\} = \theta(1,0,7) \ (=7/17)$

$f_1(1)(=0) \notin N_1$, 단계 5로 간다.

단계 5. $\bar{b}(=39) > a_{17} \ (=17)$

$\bar{b} = 39 - 17 = 22$

$J_1 = \{6,7\}$, 단계 3으로 간다.

<4회>

단계 3. $\theta(q, f_1(q), f_2(q)) = \min\{\theta(1,7,8),$

$\theta(2,2,3)\} = \theta(1,7,8) (=1/2)$

$f_1(1) \ (=7) \in N_1$, 단계 4로 간다.

단계 4. $\bar{b}(=22) > a_{18} - a_{17}(=2)$

$\bar{b} = 22 - 2 = 20$

$J_1 = \{6,8\}$, 단계 3으로 간다.

<5회>

단계 3. θ (q, f_1(q), f_2(q)) = min{θ (1,8,12), θ (2,2,3)} = θ (2,2,3)(=1/2)

$f_1(2)(=2) \in N_2$이므로, 단계 4로 간다.

단계 4. $\bar{b}(=20) > a_{23}-a_{22}(=2)$

$\bar{b}=20-2=18$

$J_2=\{3,8\}$, 단계 3으로 간다.

<6회>

단계 3. θ (q, f_1(q), f_2(q)) = min{θ (1,8,12), θ (2,3,9)} = θ (2,3,9)(=5/9)

$f_1(2)(=3) \in N_2$, 단계 4로 간다.

단계 4. $\bar{b}(=18) > a_{29}-a_{23}(=9)$

$\bar{b}=18-9=9$

$J_2=\{8,9\}$, 단계 3으로 간다.

<7회>

단계 3. θ (q, f_1(q), f_2(q)) = min{θ (1,8,12), θ (2,0,5)} = θ (1,8,12) (=7/11)

$f_1(1)(=8) \in N_1$이므로, 단계 4로 간다.

단계 4. $\bar{b}(=9) < a_{1,12}-a_{18}(=11)$,

단계 6으로 간다.

단계 6. 最適解는 다음과 같다.

$x_{18}=2/11,\ x_{1,12}=9/11,\ x_{16}=1,\ x_{1j}=0,$

$\forall j \neq 6,8,12$

$x_{2j}=1,\ j=8,9,\ x_{2j}=0,\ \forall j \neq 8,\ 9$

5. 結論 및 討議

본 硏究에서는 기존의 多種選擇 線型背囊問題 [2,3,5,6,7,8,9,11,12]와 一般 多重選擇 線型背囊問題[1]를 특수한 경우로서 포함하는 擴張問題를 제시하고, 그 擴張特性을 연구하여 효율적인 解法을 개발하였다. 본 擴張問題에서는 一般問題[1]와는 달리 選擇集合 N_i에서 분수값을 취하는 변수의 수는 한개나 두개가 될 수 있다. 확장에 수반된 난점들을 해결하기 위하여 母數分析의 槪念을 활용하였으며, 최악상황하에서 제시된 解法의 計算上 複雜度는 $O([n \cdot n_{max}]^2)$이다. 여기서, n은 총 변수의 수, n_{max}는 각 選擇集合들의 원소수들중 최대수이다.

본 硏究에서는 자원할당양이 증가하는 경우만을 고려하여 정리들을 정립하였으나, 자원할당양이 감소하는 경우에도 동일한 논리가 적용될 수 있다. 특히, 정수 문제를 풀기 위한 分枝限界技法에서 여러 후보문제의 선형 완화문제에 본 해법을 적용할 때, 각 후보문제에서 쉽게 구해지는 초기 정수해에 따라 증가나 감소하는 형태의 母數分析을 적절히 적용함으로써 더욱 효율적으로 整數最適解를 찾을 수 있다.

參 考 文 獻

[1] 元 重淵, 鄭 聖進, "一般 多重選擇 線型背囊問題에 대한 效率的인 解法,"「韓國經營科學會誌」, 15권, 2호(1990), pp. 33-44.

[2] Armstrong, R, D., Kung, D. S. Sinha, P. and Zoltners, A. A., "A Computational Study of a Multiple-Choice Knapsack Problem," *J. ACM.*, 9(1983), pp. 184-198.

[3] Armstrong, R. D., Sinha, P. and Zoltners, A. A. "The Multiple Choice Nested Knapsack Model," *Management Sci.*, 28 (1982), pp. 34-43.

[4] Balas, E. and Zemel, E. "An Algorithm for Large Zero-One Knapsack prob-

lems," *Opns. Res.*, 28(1980), pp. 1130–1154.

[5] Dudzinski, K. and Walukiewicz, S. "A Fast Algorithm for the Linear Multiple-Choice Knapsack Problem," *Opns. Res. Letters*, 3 (1984), 00. 205–209.

[6] Dyer, M. E., "An O(n) Algorithm for the Multiple-Choice Knapsack Linear Problem," *Math. Progr.*, 29(1984), pp. 57-63.

[7] Glover, F. and Klingman, D. "A O(nlogn) Algorithm for LP Knapsacks with GUB Constraints, " *Math. Progr.*, 17(1979), pp. 345-361.

[8] Johnson, E. L. and M. W. Padberg, " A Note on the Knapsack Problem with Special Ordered Sets," *Opns. Res. Letters*, 1 (1981), pp. 18-22.

[9] Sinha, P. and A. A. Zoltners, "The Multiple Choice Knapsack Problem," *Opns. Res.*, 27 (1979), pp. 503-515.

[10] Stecke, K. E., " Formulation and Solution of Nonlinear Integer Production Planning Problems for Flexible Manufacturing Systems,"*Management Sci.*, 29(1983), pp. 273-288.

[11] Zemel, E., "The Linear Multiple Choice Knapsack Problem," *Opns. Res.*, 28(1980), pp. 1412-1423.

[12] Zemel, E., "An O(n) Algorithm for the Linear Multiple Choice Knapsack Problem and Related Problems," *Inform. Process. Lett.*, 18(1984), pp. 123-128.