韓國經營科學會誌
第17卷 第1號
1992年 4月

(p_1, p_2)-PLP의 해법에 관한 연구+

손기형*

An Efficient Solution Procedure for (p_1, p_2)-PLP

Ki Hyoung Son*

Abstract

This paper concerns with (p_1, p_2)-Plant Location Problem in which entire set of candidate sites for facility locations is divided by two overlapping subsets, each of which with its own number of facilities to be established. We propose an algorithm which attempts to solve the Lagrangean dual of (p_1, p_2)-PLP by dividing sub-problem into two p-Plant Location Problems and solving them based on the convexity of the Lagrangean dual problem with respect to the number of facilities to be established. In doing so, Orthogonal Move procedure is proposed to provide easy-to-obtain lower bound to the Lagrangean Dual of (p_1, p_2)-PLP. Computational experience is reported.

1. 서 론

입지선정문제는 광범위한 응용가능성과 잠재적인 비용절감효과 때문에 많은 관심과 연구의 대상이 되어왔다. 특히 설치가능지역의 수가 한정된 이산적 입지선정모형 (Discrete Facility Location Model) 은 제품유통구조 디자인 [8], 생산시설 또는 중간공급시설 설치지역의 선정, 제철회사의 최적 잉곳 몰드의 크기와 수량결정 [17] 등 일반 사기업 경영에는 물론 응급진료소, 소방서, 폐기물 중간집적장, 우체국, 학교등 공공건물의 입지선정에도 널리 활용될수 있는 모형으로 지적되어 왔다. 그러나 일반적으로 이산적 입지선정문제는 계량적 모형 중에서도 어려운 문제로 인식되고있는 Combinatorial Optimization Problems 계열에 속하는 것이어서 많은 노력에도 불구하고 만족스러운 수준의 해법들이 개발되었다고 보기는 어려우며, 따라서 그 활용가능성 또한 제한되어 왔음이 사실이다.

이산적 입지선정문제의 기본형에 속하는 p-Plant Location Problem (이하 pPLP 로 약칭)

+ 이 논문은 1990년도 문교부 지원 한국학술진흥재단의 자유공모과제 학술연구조성비에 의하여 연구되었음.
* 전남대학교 경영학과

이나 p-Median Problem (이하 pMP 로 약칭) 은 사전에 선정된 m 개의 시설물 설치가능지점 중 주어진 평가기준에 따라 p 개의 최적지점을 선정하는 문제이며, 이동중인 자금규모 축소를 위한 은행계정설치문제 [6]나 수송 네트웍 디자인 및 공공 시설물 입지선정등에 이용되어 왔으나 문제의 규모증대에따라 가중되는 복잡성때문에 기 개발된 해법들을 손쉽게 사용 하기에는 어려운 실정이다. 또한 기존의 pPLP 또는 pMP 모형은 전체 후보지역에 대한 시설물 설치수의 제한만 가능하도록 설정되어 있어 Aikens[1] 가 지적했듯이 최적지로 선정된 지점들이 특정 지역에 집중되는 바람직하지 못한 현상이 나타날수 있다. 특히 Mercer [14] 등에 의하면 생산시설의 설치가 그 지역의 마켓팅 전략과 밀접한 관련이 있는경우 전체 후보지에 대한 시설물 설치수의 제한은 물론 특정 지역내의 시설물 설치수에도 제한을 가할 필요성이 제기된다. 이것은 입지선정모형이 보다 넓은 응용력을 갖기 위하여는 고려 되어야할 과제라 할수있다.

본 연구는 전체 후보지를 중복이 허용되는 두개의 부분집합으로 나누고 각각의 집합에 시설물 설치수를 제한하는 모형을 고려함으로서 입지선정에 있어 특정 지역별 시설물 설치수에 대한 추가제약을 허용하는 보다 일반적인 형태의 pPLP 와 pMP 모형을 설정하고 그 효율적인 해결방안을 모색한다.

2. (P_1, P_2)-PLP 모형

기존의 pPLP 모형에 둘로 나누어진 특정 지역의 시설물 설치수를 제한하는 조건을 추가하면 아래와 같은 혼합정수계획모형을 얻을수 있다. 아래 모형(P) 를 (p1, p2)-PLP 라 부르기로 한다. $I=\{1, 2, \cdots, m\}$, $J=\{1, 2, \cdots, n\}$라 하자.

$$(P):\ \text{Min} \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} C_{ij}X_{ij}+\sum_{i\in I}F_i Y_i$$

$$\text{s.t.}\quad \sum_{i\in I_K} Y_i=p_k,\ k=\{1,2\} \qquad (1)$$

$$\sum_{i\in I} X_{ij}=1,\ j\in J \qquad (2)$$

$$X_{ij}\le Y_i,\ i\in I,\ j\in J \qquad (3)$$

$$X_{ij}\ge 0,\ i\in I,\ j\in J \qquad (4)$$

$$Y_i\in\{0,1\},\ i\in I \qquad (5)$$

문제 (P)를 수요와 공급의 관점에서 파악하면 C_{ij}는 수요지 j 의 수요를 공급지 i 에서 공급할때 발생하는 생산및 수송비용등 모든 가변비용의 총합이며, F_i는 i지점에 공급시설을 설치할 경우에 발생하는 고정비용이다. X_{ij}는 수요지 j 의 총 수요량중 공급지 i 가 공급하는 비율이며, Y_i는 0-1변수로 지점 i 에 공급시설이 설치되면 1, 아니면 0 으로 정의된다. I는 모든 공급시설 설치가능지점의 집합이며, J는 수요지점의 집합이다. I_k는 I 의 부분집합으로 $\cup_{k=1,2} I_k=I$, $\cap_{k=1,2} I_k\neq\phi$ 이라 가정한다. 제약조건 (1)은 전체 설치가능 지점중 특정 지역 k 에는 반드시 p_k개의 시설물이 설치되어야 한다는 조건이며, 제약조건 (2)는각 수요지 j 의 수요량이 반드시 충족되어야 한다는 조건이다. (3)은 공급시설 설치지점으로 선정되지 않은 지점에서의 공급을 금지하는 조건이며, 나머지 조건들 (4)와 (5)는 비음수 제약조건과 정수조건이며 $p_1 \le p_2$ 라 가정한다.

문제 (P)가 기존의 pPLP 모형과 다른점은 pPLP 가 설치하는 시설물의 총수에 제한을 가하는 반면 모형 (P)는 전 지역을 상호 부분적으로 중복이 허용되는 두 지역으로 나누어 각

지역의 시설물 설치수에 제한을 가한다는 점이다. 상기 모형에서 제약조건식 (1) 의 $k=1$, $p_1=p$ 이며 $I_1=I$ 이면 기존의 pPLP 모형이며 이때 모든 i 에 대하여 고정비용 F_i 가 0이면 pMP라 불리운다.

모형 (P) 의 Lagange 쌍대문제 (D)는 다음과 같이 쓰여진다.

$$
\begin{aligned}
(D):\ & \mathrm{Max}_{u1,\,u2}\, L(u_1, u_2) \\
&= \mathrm{Max}_{u1,\,u2} - \textstyle\sum_{k=1,2} u_k p_k \\
&\quad + \mathrm{Min}\ \textstyle\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} C_{ij} X_{ij} + \sum_{i\in I} F_i Y_i \\
&\quad + \textstyle\sum_{k=1,2} \sum_{i\in Ik} u_k Y_k \\
&\qquad \text{s.t. } (2), (3), (4), (5) \\
&= \mathrm{Max}_{u1,\,u2} - \textstyle\sum_{K=1,2} u_k p_k + (SPLP)_{u1,\,u2}
\end{aligned}
$$

u_k, $k = 1, 2$ 는 (1)의 각 k에 대한 Lagrange 쌍대변수이며 문제 (D)의 내부최소화문제는 잘 알려진 Simple Plant Location Problem (SPLP)이다. 이 SPLP 는 Khumawala[12], Bilde and Krarup[3], Erlenkotter[7], Guignard [9] 등에 의하여 많은 연구성과가 축적되어 있으며, Erlenkotter 의 DUALOC이라는 해법은 대단히 효율적인 것으로 입증되었다.

제약조건식 (2) 또는 (3)을 이완하여 얻는 Lagrange 쌍대문제를 고려할수도 있으나 일반적으로 특정 제약조건식을 이완하여 얻는 Lagrange 쌍대문제의 해결의 용이성과 그 쌍대문제에 의거하여 얻을수 있는 하한치의 질과는 서로 상치되는 경향이 있어 어느 제약조건을 이완할것인가 하는 문제는 결국 선택의 문제라 할수있다. 문제(P) 의 경우에도 조건식 (2) 또는 (3)을 이완하면 해결이 용이한 내부 최소화 문제를 얻을수 있다는 장점이 있으나 이들 제약조건식을 이완할 경우 얻을수 있는 문제 (P) 의 하한치는 정수조건을 이완한후 선형계획으로 얻을수 있는 문제 (P) 의 최적목적함수 값과 같으며 이것은 (D) 가 제공할수 있는 하한치와 같거나 못하다는 것은 쉽게 증명할 수 있다. 제약조건식 (2) 또는 (3)을 이완하는 방법은 pMP, pPLP, SPLP등의 문제에 Christofides and Beasley [5], Cornuejols et. al. [6], Narula et. al. [15], Hanjoul and Peeters[10], Guignard[9] 등이 이미 고려한바 있으나 pMP 와 pPLP 에 관한한 문제 (P) 의 해결방안으로는 조건식 (1)을 이완한후 DUALOC 을 이용하여 내부 최소화문제인 SPLP 를 푸는 방법보다 효율적이지 못한것으로 판명되었다[18].

2.1 Lagrange 쌍대문제의 몇가지 성질

다음 수리계획문제 (Z) 를 고려하자.

$$(Z):\ \mathrm{Min}\ \{\, f(x) \mid g(x) \le b,\ x \in X \,\}$$

문제 (Z) 의 Lagrange 쌍대문제 L(b) 는 아래와 같다.

$$
\begin{aligned}
L(b) &= \mathrm{Max}\{L(u,b) \mid u \ge 0\} \\
L(u, b) &= \mathrm{Min}\{f(x) + u(g(x) - b) \mid x \in X\} \\
&= -ub + \mathrm{Min}\{f(x) + ug(x) \mid x \in X\} \\
&= -ub + h(u)
\end{aligned}
$$

〈**Theorem**〉 L(b) 는 b 의 볼록함수이다.

〈증명〉 임의의 b_1, b_2, $b_1 \neq b_2$, 와 $\lambda \in [0, 1]$에 대해 $L(b_1)$ 혹은 $L(b_2)$ 가 ∞ 이면 $\lambda L(b_1) - (1-\lambda)L(b_2) \ge L(\lambda b_1 + (1-\lambda)b_2)$ 인것은 자명하다. 만약 $L(b_1)$ 혹은 $L(b_2)$가 $-\infty$ 라면 모든 b에 대해 $L(b) = -\infty$ 이므로 역시 증명의 대상이 아니다. 따라서 $L(b_1)$, $L(b_2)$ 모두 한정된 값을

갖는다 가정하고 $u^* \geq 0$를 $L(\lambda b_1 + (1-\lambda)b_2)$ 의 최적해라 하자. 그러면

$L(\lambda b_1 + (1-\lambda)b_2) = -u^*(\lambda b_1 + (1-\lambda)b_2) + h(u^*)$ 이며

$L(b_1) \geq -u^* b_1 + h(u^*)$, $L(b_2) \geq -u^* b_2 + h(u^*)$ 이다. 따라서

$\lambda L(b_1) + (1-\lambda)L(b_2) \geq -u^*(\lambda b_1 + (1-\lambda) b_2) + h(u^*) = L(\lambda b_1 + (1-\lambda)b_2)$ ■

위의 Theorem 은 널리 알려진 것으로 Bitran et. al. [4]은 이 성질을 이용한 역 최적화기법(Inverse Optimization Technique) 으로 Capacitated Facility Location Problem 의 우변상수에 대한 Parametric Analysis 방법을 제안한 바 있다.

이제 문제 (Z) 의 제약조건식 $g(x) \leq b$ 가 $g_1(x) \leq b_1$, $g_2(x) \leq b_2$ 의 둘로 구성되어 있다 하고, 그 Lagrange 쌍대문제 $L(b_1,b_2)$를 아래와 같이 정의하자.

$$
\begin{aligned}
L(b_1, b_2) &= \text{Max}_{u1,\ u2} - u_1 b_1 - u_2 b_2 + \text{Min} \\
&\quad \{f(x) + u_1 g_1(x) + u_2 g_2(x) \mid x \in X\} \\
&= \text{Max}_{u1,\ u2}\ L(u_1, u_2)
\end{aligned}
$$

또한 임의의 $u_2^k \geq 0$ 에 대해 $L(u_1)u_2^k$ 와 $L(u_1 | u_2^k)$를 아래와 같이 정의한다.

$$
\begin{aligned}
L(u_1)u_2^k &= \text{Max}_{u1} - u_1 b_1 + \text{Min}\{f(x) + u_1 g_1(x) \\
&\quad + u_2^k g_2(x) \mid x \in X\} \\
L(u_1 | u_2^k) &= -u_2^k b_2 + \text{Max}_{u1} - u_1 b_1 + \text{Min}\{f(x) \\
&\quad + u_1 g_1(x) + u_2^k g_2(x) \mid x \in X\} \\
&= -u_2^k b_2 + L(u_1)u_2^k
\end{aligned}
$$

그러면 u_1^k를 $L(u_1)u_2^k$ 의 최적해라 하면 다음 관계가 성립한다.

〈정리 1〉 $L(u_1 | u_2^k) \leq L(u_2 | u_1^k)$

〈증명〉 $L(u_1 \mid u_2^k) = L(u_1^k, u_2^k)$

$$
\begin{aligned}
&= -u_2^k b_2 - u_1^k b_1 + \text{Min}\{f(x) + u_1^k g_1(x) \\
&\quad + u_2^k g_2(x) \mid x \in X\} \\
&\leq -u_1^k b_1 + \text{Max}_{u2} - u_2 b_2 + \text{Min}\{f(x) \\
&\quad + u_1^k g_1(x) + u_2 g_2(x) \mid x \in X\} \\
&= L(u_2 \mid u_1^k)
\end{aligned}
$$ ■

〈정리 1〉은 주어진 u_2^k를 사용하여 $L(u_1)u_2^k$ 의 최적해 u_1^k 를 얻고, 다시 이를 기준으로 $L(u_2)u_1^k$ 의 최적해 u_2^{k+1}를 얻는 방법을 반복적으로 사용함으로서 $L(b_1, b_2)$의 하한치를 얻을 수 있음을 보여주고 있다. 물론 이러한 방법을 이용하여 얻는 쌍대변수의 값이 $L(b_1, b_2)$의 최적해로의 수렴을 보장하는 것은 아니지만 $L(b_1, b_2)$가 u_1, u_2를 동시에 조정해야 하는 반면 $L(u_1)u_2$, $L(u_2)u_1$는 이를 개별적으로 조정할 수 있어 $L(u_1)u_2$와 $L(u_2)u_1$의 효율적인 해결 방법이 개발되어 있다면 이를 이용할 수 있는 장점이 있다.

2.2 Algorithm

2.1 에서 정리한 성질을 이용하여 문제 (D)의 해법을 개발한다.

주어진 $u_2 \geq 0$에 대하여 $L(p_1)$을 아래와 같이 정의하자.

$$
\begin{aligned}
L(p_1) & \\
&= \text{Max}_{u1}\ -u_1 p_1 + \text{Min} \textstyle\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} C_{ij} X_{ij} \\
&\quad + \textstyle\sum_{i \in I} F_i Y_i + \sum_{k=1,2} \sum_{i \in I k} u_k Y_i \\
&\quad \text{s.t. } (2)(3)(4)(5) \\
&= \text{Max}_{u1} - u_1 p_1 + V(\text{SPLP})u_1, u_2 \\
&= \text{Max}_{u1}\ L(u_1)
\end{aligned}
$$

그러면 주어진 u_2에 대해 $L(p_1)$은 고정비용이 $(\sum_{i\in I} F_iY_i+\sum_{i=I2} u_2 Y_i)$인 아래 (p_1PLP)의 Lagrange 쌍대문제이며 $L(p_1)$의 내부 최소화 문제는 $(\sum_{i\in I} F_iY_i + \sum_{k=1,2} \sum_{i\in Ik} u_kY_i)$ 를 고정비용으로 가진 SPLP 이다.

$$(p_1PLP): \text{Min } \sum_{i\in I} \sum_{j\in J} C_{ij} X_{ij} + \sum_{i\in I} F_iY_i + \sum_{i=I2} u_2Y_i$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i\in I1} Y_i = p_1$$

$$(2), (3), (4), (5)$$

이제 $L(u_1|u_2^k)$, $u_2^k \geq 0$, 를 아래와 같이 정의하자.

$$L(u_1 \mid u_2^k) = -u_2^k p_2 + \text{Max}_{u1} - u_1p_1 + \text{Min } \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} C_{ij} X_{ij} + \sum_{i\in I} F_iY_i + \sum_{i\in I1} u_1Y_i + \sum_{i\in I2} u_2^k Y_i$$

$$\text{s.t.} \quad (2), (3), (4), (5)$$

$$= -u_2^k p_2 + L(p_1)$$

$L(p_1)$ 의 최적해를 u_1^k라 하고 $L(u_2|u_1^k)$와 $L(p_2)$를 같은 방법으로 정의하면 〈정리 1〉에 의해

$$L(u_1|u_2^k) = L(u_1^k, u_2^k) \leq L(u_2 \mid u_1^k)$$
$$= L(u_2^{k+1}, u_1^k)$$
$$\leq L(u_1 \mid u_2^{k+1}) = L(u_1^{k+1}, u_2^{k+1})$$

의 관계가 성립한다. 따라서 $L(p_1)$ 과 $L(p_2)$로부터 u_1^k와 u_2^k를 번갈아 얻을 수 있다. 한편 2.1 의 Theorem에 의하면 $L(p_1)$은 p_1의 볼록함수이다. 이 볼록함수 성질을 이용하여 $L(p_1)$의 최적 쌍대변수 값을 구하는 방법은 [18]에 자세히 기술되어 있으므로 여기서는 이를 간단히 요약한다.

u_q과 u_r을 $L(p_1)$의 내부 최소화 문제인 (SPLP)의 최적해에서 p_q과 p_r개의 시설물을 설치하게 하는 쌍대변수값이라 하자. $p_q \leq p_1 \leq p_r$이라하면 $[L(p_q)-L(p_r)]/(p_r-p_q)$은 p_r과 p_q 사이의 어떤 점 p'에 대한 $L(p')$의 최적 쌍대변수값이 되고 다음 정리에 의해 이 p'은 $(SPLP)u_1$, u_2, $u_1 = [L(p_q)-L(p_r)]/(p_r-p_q)$를 풀어 얻을 수 있다.

〈정리 2〉$(SPLP)u_1$, u_2의 최적해 (X^*, Y^*)가 $\sum_{i\in I1} Y_i^* = p'$ 이라면 (X^*, Y^*)는 $(p'PLP)$의 최적해이며 u_1은 $L(p')$의 최적해이다.

〈증명〉(X^*, Y^*)는 $(p'PLP)$의 실행가능해이며 이때 $V(p'PLP) = L(p')$이므로 (X^*, Y^*)는 $(p'PLP)$의 최적해이며 u_1 은 $L(p')$의 최적해이다. ■

따라서 $(SPLP)u_1$, u_2를 풀어 p'을 구하면 다음 네가지 중의 한가지 경우가 발생한다.

Case 1 : $p' = p_1$
Case 2 : $p_q < p' < p_1$
Case 3 : $p_1 < p' < p_r$
Case 4 : $p_q = p'$ 또는 $p_r = p'$

Case 1은 (p_1PLP)과 $L(p_1)$의 최적해를 얻은 것이며 Case 2와 Case 3의 경우는 $p_q \Leftarrow p'$ 또는 $p_r \Leftarrow p'$으로 한 다음 새로이 u_1을 얻어 $L(p_1)$과 (p_1PLP)를 푸는 과정을 계속한다. Case 4는 $V(p_1PLP)$ 와 $L(p_1)$ 간에 쌍대격차 (Duality Gap)가 존재하거나 $(SPLP)u_1,u_2$에 복수최적해가 있어 (SPLP)의 해법이 $\sum_{i\in I1} Y_i^* = p_1$인 해를 발견하지 못한 경우이다[18]. 이 경우는 일반적인 분단가지치기를 사용하여 (p_1PLP)의 최적해를 발견할 수 있다.

이상을 종합하면 문제 $L(u_1, u_2)$의 해법으로

다음과 같은 Algorithm을 생각 할 수 있다. C, M과 K를 주어진 상수라 하고, I_1^*, I_2^*는 각각 $L(p_1)$과 $L(p_2)$의 최적해에서 선정된 시설물 설치지점의 조합이라하자. $|\cdot|$는 집합 $\cdot$ 의 크기를 나타낸다.

Algorithm

Step 1. 초기단계

$u_1^0 \Leftarrow 0$, $u_2^0 \Leftarrow 0$, $k \Leftarrow 0$, $LB \Leftarrow -\infty$, $m \Leftarrow 0$.

Step 2. $L(u_1 \mid u_2^k)$을 풀어 $L(p_1)$의 최적해 u_1^*를 u_1^{k+1} 이라한다. 만약 $|I_1^*|=p_1$, $|I_2^*|=p_2$ 이면 Go to Step 6.

2.1 만약 $L(u_1 \mid u_2^k)-LB \leq C$ 이면 $m \Leftarrow m+1$. $LB \Leftarrow L(u_1 \mid u_2^k)$. Go to Step 3

2.2 $m \Leftarrow 0$. Go to Step 3.

Step 3. $L(u_2 | u_1^{k+1})$을 풀어 $L(p_2)$의 최적해 u_2^*를 u_1^{k+1} 이라한다. 만약 $|I_1^*|=p_1$, $|I_2^*|=p_2$ 이면 Go to Step 6.

3.1 만약 $L(u_2 \mid u_1^{k+1})-LB \leq C$ 이면 $m \Leftarrow m+1$. $LB \Leftarrow L(u_2 \mid u_1^{k+1})$. Go to Step 4

3.2 $m \Leftarrow 0$. Go to Step 4.

Step 4. 만약 $m \geq M$ 이거나 $k \geq K$이면 Go to Step 5.

$k \Leftarrow k+1$. Go to Step 2.

Step 5. 분단가지치기

Step 6. Stop.

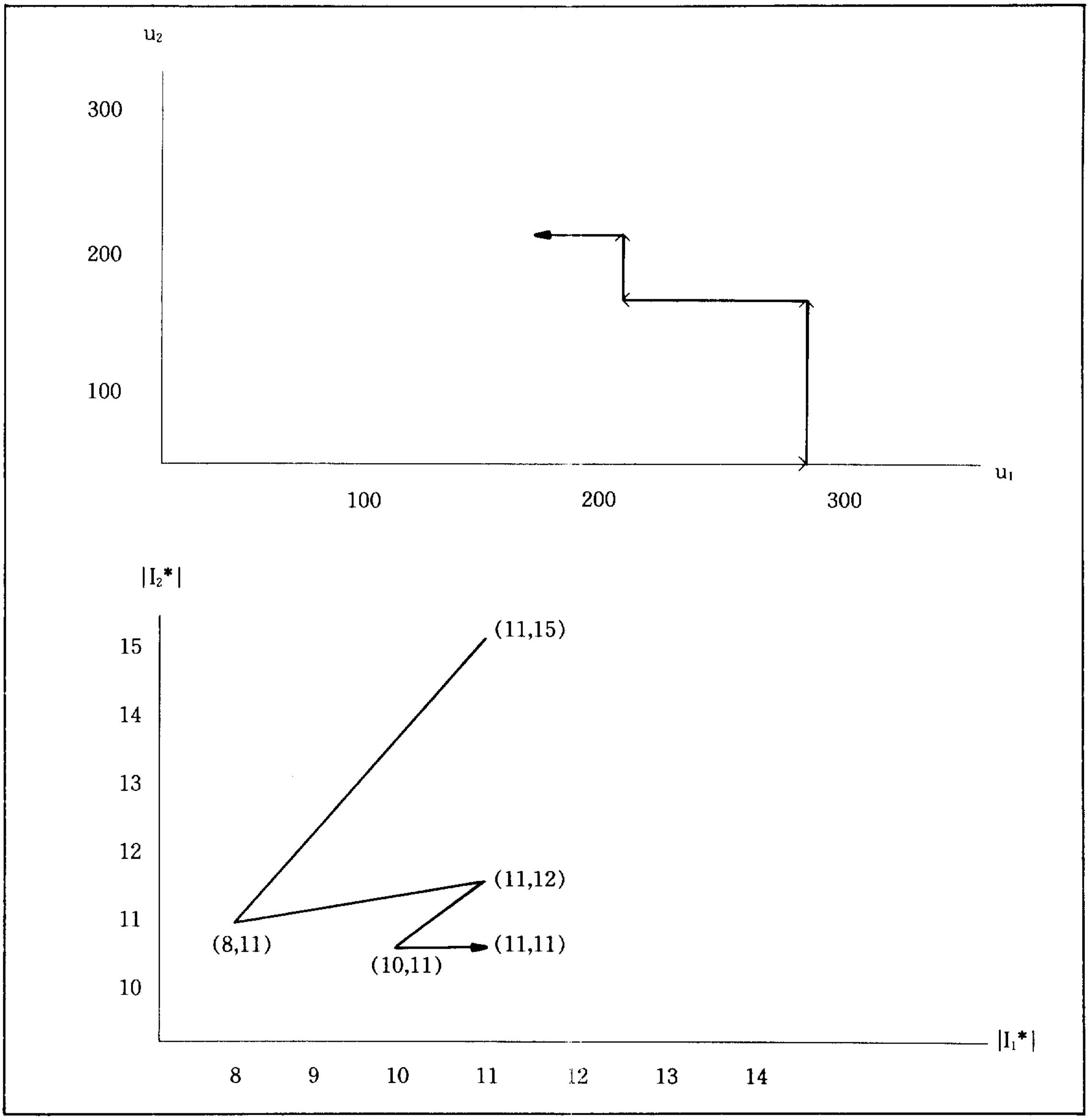
위의 Algorithm 에서 Step 2와 Step 3는 u_1과 u_2의 값을 번갈아가며 구하게 되므로 (u_1, u_2)의 평면에서 보면 (u_1^k, u_2^k)는 다음 그림의 예에서 보듯이 직각행보 (Orthogonal Move)를 하게된다.

〈예〉 **Test Problem**

Size : $(m \times n) = (33 \times 33)$, Fixed Cost : 0

(p_1, p_2) : (11, 11)

k	0	1	1	2	2	3
	Step 1	Step 2	Step 3	Step 2	Step 3	Step 2
u_1	0.00	292.23	292.23	206.44	206.44	187.73
u_2	0.00	0.00	175.56	175.56	203.53	203.53
Lower Bound	$-\infty$	2432.00	2687.31	2817.56	2819.56	2831.00
$(\|I_1^*\|, \|I_2^*\|)$		(11,15)	(8,11)	(11,12)	(10,11)	(11,11)



〈정리 1〉 에 의거한 위와 같은 직각행보가 앞서 지적한 바와 같이 $L(b_1, b_2)$의 최적해 (u_1 *, u_2*)로의 수렴을 보장 하지는 않으므로 최적해를 찾지 못할 경우 Step 2와 Step 3를 중단하기 위한 기준이 주어져야 한다. 이 기준은 하한치의 개선정도에 대한 기준과 직각행보의 허용회수에 대한 기준으로 나누어 볼 수 있다. 즉 하한치 (Lower Bound)가 계속해서 M 번에 걸쳐 정해진 수준 C 이상 개선되지 않거나, K 번이상 직각행보를 계속하여도 최적해를 찾지 못한 경우에는 Step 5의 분단가지치기를 시작한다. 본 연구에서 시험한 문제들에 대하여는 C 는 1로, K 는 10 으로 주어졌다. 분단가지치기는 깊이를 우선적으로 탐색하는 방법을 사

용하였으며, 분단가지치기의 효율성은 상한치의 질에 크게 의존하므로 좋은 상한치를 얻기 위하여 마지막 직각 행보에서 Step 2 의 $L(p_1)$의 최적해에 포함된 지점들을 중심으로 p_1 개의 지점을 선정하여 이들의 Y값을 1로 놓은 다음 $L(p_2)$를 푸는 방법을 사용 하였다. 즉 p_1이 5라면 마지막 직각행보의 Step 2에서 $L(p_1)$의 최적해 I_1^* 에 속한 변수중 Y_i의 값이 1인 변수를 중심으로 5개의 변수를 선정하여 1로 놓은 다음 역으로 거슬러 오는 방법을 택하였다.

3. 시험결과

2.2 에서 제안한 Algorithm 의 효율성을 테스트하기 위하여 Fortran Program을 작성한 다음 Clock Speed 16 MHZ 의 386SX Computer를 사용하여 아래 5문제를 대상으로 시험하여 보았다.

문제 I : (30 × 30), Toregas et. al. [16]
문제 II : (33 × 33), Karg and Thompson [11]
문제 III : (50 × 50), Beasley [2]
문제 IV : (57 × 57), Karg and Thompson [11]
문제 V : (100 × 100), Krolak et. al. [13]

위의 문제들은 <표 1> 에서 보듯이 임의로 선정된 (p_1, p_2)값에 대하여 세가지 각기 다른 고정비용수준에서 시험되었다. 수준 I 은 전지점의 고정비용이 0 이며 수준 II와 III은 각 문제의 최적 목적함수값을 고려하여 고정비용의 수준에 따라 (p_1, p_2)의 최적해가 달라질수 있도록 부여되었으며 각 수준에서 다시 세가지 다른 값이 시설물 설치가능 지점에 차례로 부여 되었다. 또한 각 문제에서 $I_1 = \{1,3,4,6,7,9,....\}$로, $I_2 = \{2,3,5,6,8,9,....\}$로 주어졌다.

<표 1>

고정비용수준	수준 I	수준 II	수준 III
문제 I	(0,0,0)	(10, 20, 30)	(30, 50, 70)
문제 II	(0,0,0)	(50, 100, 150)	(100, 200, 300)
문제 III	(0,0,0)	(500,1000,1500)	(1000,2000,3000)
문제 IV	(0,0,0)	(100, 200, 300)	(300, 500, 700)
문제 V	(0,0,0)	(100, 200, 300)	(300, 500, 700)

<표 2>－<표 4>의 $V(p_1, p_2)$는 최적 목적함수값을 의미하며 $I^* = I_1^* \cup I_2^*$로 $|I^*|$는 최적해에서 설치가 결정된 시설물의 총수를 나타낸다. Time(분. 초. 1/100초)은 입 출력 시간을 제외한 시간이며 Ortho. Move는 직각행보(k)의 회수이다. Gap = [$V(p_1, p_2)$-Best Lower Bound]/$V(p_1, p_2)$, 즉 격차[1] 를 % 로 환산 한것이며 No. of Nodes 는 탐색된 노드의

총수를, Max. Depth 는 가지치기의 최대 깊이를 의미한다. 앞서 언급한 바와 같이 분단가지치기는 p_1 개의 시설물 설치지점에 해당하는 Y 변수의 값을 1로 놓은 다음 시작하므로 가지치기의 최대깊이는 p_1 또는 그 이상이다.

총 135개의 문제중 121 문제는 분단가지치기가 필요없이 직각행보만으로 최적해가 발견되었으며 분단가지치기가 필요한 경우는 14개에 불과하였다. 이들 14문제중 4 문제의 경우에는 $V(p_1,p_2)$ = Best Lower Bound로 엄격한 의미에서 쌍대격차는 존재하지 않으나 $L(p_1)$ 혹은 $L(p_2)$에 복수최적해가 존재하여 제약조건식 (1)을 충족시키는 원본최적해를 발견치 못한탓에 가지치기가 요구되었다. 또한 격차가 존재하는 경우에도 그 정도는 모두 1% 이내여서 본 연구에서 제안한 방법이 양질의 하한치를 제공한다는 것을 입증하고 있다. 이러한 고무적인 결과는 첫째 $L(b_1,b_2)$의 최적해 (u_1^*, u_2^*)가 유일한 값일 가능성은 극히 희박하고 대부분 일정한 범위에 걸쳐있어 $L(b_1,b_2)$의 최적해를 발견할 가능성이 높고, 둘째 쌍대격차의 존재 가능성이 희박한 것으로 알려진 pMP와 pPLP 의 특성이 본 연구에서 제시한 모형에도 적용되기 때문으로 보인다. 최적해 발견시까지 소요된 시간을 살펴보면 거의 모든문제의 최적해가 만족할만한 시간내에 발견되었다. 예외적으로 고정비용수준 II의 문제 III은 $(p_1, p_2) = (10,10)$일때 10분 이상의 시간이 소요되었으나 이 문제의 엄청난 실행가능해의 총 수를 감안하면 충분히 용납될 수 있는 수준이라 하겠다.

유감스럽게도 이 문제에 대한 다른 Algorithm이 개발되어 있지 않아 본 연구에서 제안한 Algorithm 의 효율성의 직접적인 비교는 불가능하다. 그러나 간접적인 비교를 돕기위하여 Hanjoul and Peeters[10]가 개발한 p-Median problem의 해법을 각 p값에 대하여 같은 computer를 사용하여 시험한 결과가 <표 5>에 제시되어 있다.[2] Hanjoul and Peeters의 해법은 고정비용이 모두 0인 pMP의 제약조건식 (2)를 이완하여 얻은 Lagrange 쌍대문제를 Subgradient Optimization Technique를 사용하여 최적해를 발견하고자 하는 방법이다. 물론 문제 (P)에도 이러한 제약조건식 (2)를 이완하는 방법을 사용할수 있으나 이 경우 Lagrange 부문제의 Y 변수에 대한 제약조건식이 둘이어서 비록 이것이 간단한 배낭문제에 지나지 않는다 할지라도 pMP 의 경우처럼 단순한 계수비교에 의해 부문제의 최적해가 발견되는 것은 아니다.

1) 쌍대격차란 원본 및 쌍대문제의 최적목적함수값 간의 차이를 의미하는것이나 일반적으로 두 문제의 최선의 실행가능해값의 차이를 지칭하기도 한다. 여기서는 전자의 의미로는 쌍대격차를, 후자의 의미로는 격차라는 용어를 사용하기로 한다.

2) FORTRAN Program CHANTALH 는 Hanjoul and Peeters 가 제공하였음.

<표 2> 고정비용수준 I

Problem	p_1, p_2	$V(p_1,p_2)$	$\|I^*\|$	Time	Ortho Move	Lower Bound	Gap (%)	No. of Nodes	Max. Depth
I	(5, 5)	878	10	6.53	5	878	0		
(30×30)	(5, 8)	705	13	19.33		705	0	6	7
	(5,11)	602	15	2.63	2	602	0		
	(8, 5)	687	13	2.58	2	687	0		
	(8, 8)	528	16	2.41	2	528	0		
	(8,11)	434	18	2.47	2	434	0		
	(11, 5)	569	15	2.25	2	569	0		
	(11, 8)	414	18	3.46	3	414	0		
	(11,11)	315	20	3.89	3	315	0		
II	(5, 5)	6682	10	2.85	2	6682	0		
(33×33)	(5, 8)	5356	13	2.03	1	5356	0		
	(5,11)	4476	16	2.47	2	4476	0		
	(8, 5)	5562	13	3.02	2	5562	0		
	(8, 8)	4396	16	5.21	4	4396	0		
	(8,11)	3564	19	2.41	2	3564	0		
	(11, 5)	4667	16	2.58	2	4667	0		
	(11, 8)	3623	19	2.52	2	3623	0		
	(11,11)	2831	22	3.40	3	2831	0		
III	(5, 5)	747494	10	11.42	4	747494	0		
(50×50)	(5,10)	714976	15	5.49	2	714976	0		
	(5,15)	701616	19	3.46	1	701616	0		
	(10, 5)	706023	14	5.21	2	706023	0		
	(10,10)	685574	18	9.00	2	685574	0		
	(10,15)	672587	22	17.47	3	672587	0		
	(15, 5)	690148	17	5.49	2	690148	0		
	(15,10)	668554	20	12.68	2	668554	0		
	(15,15)	656101	25	12.68	3	656101	0		
IV	(5, 5)	11429	10	1.08.10	8	11429	0		
(57×57)	(5,10)	8390	14	37.07	4	8390	0		
	(5,15)	6387	19	4.11	1	6387	0		
	(10, 5)	8563	14	10.16	2	8563	0		
	(10,10)	6312	19	23.61	3	6312	0		
	(10,15)	4749	24	6.86	2	4749	0		
	(15, 5)	6744	19	6.04	1	6744	0		
	(15,10)	4793	24	9.44	1	4793	0		
	(15,15)	3697	29	1.58.80		3690	.19	18	15
V	(10,10)	17658	20	1.06.40	5	17658	0		
(100×100)	(10,20)	12675	30	21.64	2	12675	0		
	(10,30)	10275	39	10.87	1	10275	0		
	(20,10)	12545	30	19.93	2	12545	0		
	(20,20)	9282	39	26.47	2	9282	0		
	(20,30)	7192	48	22.24	2	7192	0		
	(30,10)	10386	39	10.54	1	10386	0		
	(30,20)	7460	48	15.43	2	7460	0		
	(30,30)	5613	57	36.25	2	5613	0		

<표 3> 고정비용수준 II

Problem	p_1, p_2	$V(p_1,p_2)$	$\|I^*\|$	Time	Ortho Move	Lower Bound	Gap (%)	No. of Nodes	Max. Depth
I	(5, 5)	1068	10	5.82	4	1068	0		
(30×30)	(5, 8)	949	12	2.80	2	949	0		
	(5,11)	872	15	2.36	1	872	0		
	(8, 5)	927	13	2.14	1	927	0		
	(8, 8)	822	15	2.25	2	822	0		
	(8,11)	757	17	2.41	2	757	0		
	(11, 5)	859	15	1.48	1	859	0		
	(11, 8)	764	18	2.36	2	764	0		
	(11,11)	697	19	4.06	4	697	0		
II	(5, 5)	7732	10	4.33	2	7732	0		
(33×33)	(5, 8)	6700	13	3.18	2	6700	0		
	(5,11)	6144	16	4.88	4	6144	0		
	(8, 5)	6855	12	4.39	2	6855	0		
	(8, 8)	5947	16	2.58	2	5947	0		
	(8,11)	5451	18	4.22	3	5451	0		
	(11, 5)	6162	15	2.74	2	6162	0		
	(11, 8)	5422	18	2.41	2	5422	0		
	(11,11)	4917	21	2.52	2	4917	0		
III	(5, 5)	757994	10	8.67	3	757994	0		
(50×50)	(5,10)	729476	15	5.60	2	729476	0		
	(5,15)	721116	19	8.89	3	721116	0		
	(10, 5)	721023	14	6.75	2	721023	0		
	(10,10)	703103	18	10.24.61		702270	.12	73	25
	(10,15)	692143	20	6.04	2	692143	0		
	(15, 5)	706648	17	3.62	1	706648	0		
	(15,10)	688054	20	42.84		687755	.04	11	10
	(15,15)	678565	23	5.65		678565	0		
IV	(5, 5)	13066	9	1.38.31		13053	.10	9	5
(57×57)	(5,10)	10895	14	10.71	2	10895	0		
	(5,15)	9923	19	5.32	1	9923	0		
	(10, 5)	10914	14	5.38	1	10914	0		
	(10,10)	9599	19	5.54	2	9599	0		
	(10,15)	8920	22	8.84	2	8920	0		
	(15, 5)	10301	18	12.35	2	10301	0		
	(15,10)	9919	21	46.41		9919	0	5	10
	(15,15)	8368	24	21.80	4	8368	0		
V	(10,10)	21109	20	25.92	2	21109	0		
(100×100)	(10,20)	17926	28	19.33	2	17926	0		
	(10,30)	17076	36	7.90	1	17076	0		
	(20,10)	18006	28	13.78	1	18006	0		
	(20,20)	15917	33	17.52	2	15917	0		
	(20,30)	15209	42	26.08	2	15209	0		
	(30,10)	17076	36	15.10	3	17076	0		
	(30,20)	15160	37	3.51.84		15160	0	9	20
	(30,30)	14375	44	15.21	2	14375	0		

<표 4> 고정비용수준 Ⅲ

Problem	p_1, p_2	$V(p_1,p_2)$	$\|I^*\|$	Time	Ortho Move	Lower Bound	Gap (%)	No. of Nodes	Max. Depth
Ⅰ (30×30)	(5, 5)	1331	9	5.71	3	1331	0		
	(5, 8)	1244	11	2.47	1	1244	0		
	(5,11)	1243	14	2.36	2	1243	0		
	(8, 5)	1253	11	10.21		1244	0.7	8	5
	(8, 8)	1177	13	21.86		1174	0.3	15	11
	(8,11)	1163	16	2.58	2	1163	0		
	(11, 5)	1259	13	2.63	2	1259	0		
	(11, 8)	1195	15	2.14	2	1195	0		
	(11,11)	1170	17	2.19	2	1170	0		
Ⅱ (33×33)	(5, 5)	8693	10	3.89	2	8693	0		
	(5, 8)	7846	12	3.62	3	7846	0		
	(5,11)	7516	14	2.03	1	7516	0		
	(8, 5)	7948	11	2.36	1	7948	0		
	(8, 8)	7214	14	1.86	1	7214	0		
	(8,11)	6951	17	1.92	1	6951	0		
	(11, 5)	7416	14	2.14	1	7416	0		
	(11, 8)	6911	15	3.18	2	6911	0		
	(11,11)	6652	18	4.39	3	6652	0		
Ⅲ (50×50)	(5, 5)	768494	10	1.37.76		768167	.04	6	5
	(5,10)	743976	15	4.66	1	743976	0		
	(5,15)	740616	19	4.99	1	740616	0		
	(10, 5)	743976	15	3.89	1	743976	0		
	(10,10)	718202	17	9.66	2	718202	0		
	(10,15)	710468	20	4.66	1	710468	0		
	(15, 5)	722182	17	2.63	1	722182	0		
	(15,10)	706329	19	58.60		706255	.01	11	10
	(15,15)	699015	21	51.08		698898	.02	16	15
Ⅳ (57×57)	(5, 5)	15376	9	19.00	4	15376	0		
	(5,10)	14456	13	41.52		14456	0	1	5
	(5,15)	14758	16	14.82	2	14758	0		
	(10, 5)	14336	13	21.14	4	14336	0		
	(10,10)	13640	14	5.43	1	13640	0		
	(10,15)	14053	19	1.17.60		14039	.10	11	10
	(15, 5)	14818	15	22.08	4	14818	0		
	(15,10)	13400	17	13.45	4	13400	0		
	(15,15)	13521	21	8.07	2	13521	0		
Ⅴ (100×100)	(10,10)	26088	18	10.54	1	26088	0		
	(10,20)	24945	25	8.84	1	24945	0		
	(10,30)	26623	35	24.55	3	26623	0		
	(20,10)	24255	23	1.02.45	6	24255	0		
	(20,20)	22919	27	19.93	3	22919	0		
	(20,30)	24376	35	15.92	2	24376	0		
	(30,10)	25116	31	52.45	5	25116	0		
	(30,20)	23330	35	16.47	2	23330	0		
	(30,30)	24434	42	7.46	1	24434	0		

<표 5> p-Mddian Problem (By CHANTALH)

Problem	p	Time	Problem	p	Time
I	5	10.76	Ⅳ	5	47.40
	8	35.37		10	33.99
	11	6.37		15	39.39
Ⅱ	5	12.85	V	10	6.32.99
	8	14.66		20	2.13.02
	11	6.64		30	8.00.37
Ⅲ	5	12.85			
	10	30.59			
	15	25.43			

참 고 문 헌

[1] Aikens, C. H., "Facility location models for distribution planning," *E.J.O.R* ., Vol. 22(1985), pp. 263-279.

[2] Beasley, J. E., "OR Library : distributing test problems by electronic mail," The Management School, Imperial College, London, 1990.

[3] Bilde, O. and J. Krarup, "Sharp lower bounds and efficient algorithms for the simple plant location problem," *Annals of Discrete Math.*, Vol. 1(1977), pp. 79-97.

[4] Bitran, G. R., V. Chandru, D. E. Sempolonski, and J. F. Shapiro, " Inverse optimization : An application to the capacitated plant location problem," *Mgmt. Sci.*, Vol 27 (1981), pp. 1120-1141.

[5] Christofides, N. and J. E. Beasley, "A tree search algorithm for p-median problem," *E.J.O.R.*, 10(1982), pp. 196-204.

[6] Cornuejols, G., M. L. Fisher, and G. L. Nemhauser, "Location of bank account to optimize float : an analytic study of exact and approximate algorithm, "*Mgmt. Sci.*, Vol. 23(1977), pp. 789-810.

[7] Erlenkotter, D., "A dual-based procedure for uncapacitated facility location," *O.R.*, Vol. 26(1978), pp. 992-1009.

[8] Geoffrion, A.M. and G. W. Graves, "Multicommodity distribution design by Benders decomposition," *Mgmt. Sci.*, Vol. 20(1974), pp. 822-844.

[9] Guignard, M., "A Lagrangean dual ascent algorithm for simple plant location problems," *E.J.O.R.*, Vol. 35(1988), pp. 193-200.

[10] Hanjoul, P. and D. Peeters, "A comparison of two dual-based procedures for solving the p-median problem," *E.J.O.R.*, Vol. 20(1985), pp. 387-396.

[11] Karg, R.L. and G. L. Thompson, "A heu-

ristic approach to solving travelling salesman problem," *Mgmt. Sci.*, Vol. 10(1964), pp. 225−248.

[12] Khumawala, B.M., "An efficient branch and bound algorithm for the warehouse location problem," *Mgmt. Sci.*, Vol. 18 (1972), pp. B−718−731.

[13] Krolak, P., W. Felts, and G. Marble, "A Man-Machine approach to ward solving the travelling salesman problem," *Comm. ACM*, 14(1971), pp. 327−334.

[14] Mercer, A., M. F. Cantley, and G. K. Rand, *Operational distribution research : Innovative case studies*, Taylor and Francis, London.

[15] Narula, S.C., U. I. Ogbu, and H. M. Samuelsson, "An algorithm for the p−median problem," *O. R.*, Vol. 25(1977), pp. 709−713.

[16] Toregas, C., R. W. Swain, C. S. Revelle, and L. Bergman, "The location of emergency service facilities," *O.R.*, Vol.19 (1971), pp. 1353−1371.

[17] Vasko, F. J., F. E. Wolfe, K. L. Scott, and J. W. Scheirer, "Selecting optimal ingot sizes for Bethlehem Steel," *Interface*, Vol. 19(1989), pp. 68−84.

[18] 손 기형, "Lagrange 쌍대문제의 블록함수 성질 이용에 관한 연구," 「산업경제연구」, 제 14집 (1991), pp. 51−71, 전남대학교.