

선형계획을 위한 쌍대신경망

최혁준*·장수영*

Primal-Dual Neural Network for Linear Programming

Hyuk Jun Choi* and Soo Y. Chang*

Abstract

We present a modified Tank and Hopfield's neural network model for solving Linear Programming problems. We have found the fact that the Tank and Hopfield's neural circuit for solving Linear Programming problems has some difficulties in guaranteeing convergence, and obtaining both the primal and dual optimum solutions from the output of the circuit. We have identified the exact conditions in which the circuit stops at an interior point of the feasible region, and therefore fails to converge. Also, proper scaling of the problem parameters is required, in order to obtain a feasible solution from the circuit. Even after one was successful in getting a primal optimum solution, the output of the circuit must be processed further to obtain a dual optimum solution. The modified model being proposed in this paper is designed to overcome such difficulties. We describe the modified model and summarize our computational experiment.

1. 서론

1986년 Tank와 Hopfield[7]는 신경망을 응용하여 선형계획문제를 푸는데 적합한 신경회로를 제시함과 동시에 에너지 함수를 새로이 도입하여 선형계획 문제의 해가 최적해에 도달함에 따라 에너지함수는 점차 감소하여 최소값

에 수렴함을 증명하였으며 이러한 신경회로의 개발로 인해 이를 하드웨어로 구현시 기존의 선형계획문제를 푸는 방법들과는 비교할 수 없는 엄청난 계산속도의 증진을 기대할 수 있게 되었다.

1987년 Chua와 Kennedy는 Tank와 Hopfield 회로를 수정하여 총만족 함수(Total cocontent function)가 최소가 될 때 선형계획문제의 해

* 포항공과대학 산업공학과

가 최적해로 수렴함을 증명하였으며 1990년 Jose L. Heurtas 등은 회로 매개변수 값들을 조정함이 없이 Switched-capacitor를 이용하여 집적회로(VLSI)로의 구현이 가능한 모델을 제시하였다[2, 6].

그러나 Tank와 Hopfield가 발표한 신경회로는 최적해를 얻기 위하여 회로상의 몇가지 회로 매개변수(circuit parameter)값들을 조정해 주어야 하는 문제점을 안고 있으며 앞서 제시한 모든 회로들은 공통적으로 쌍대문제(Dual Problem)에 관한 정보를 얻기가 용이치 않다는 문제점을 안고 있으므로 본 연구에서는 선형계획에서의 complementary slackness theorem을 도입하여 회로매개변수 값들의 조정없이 원문제(Primal problem)와 쌍대문제에 관한 정보를 동시에 산출할 수 있는 새로운 모델을 설계하게 되었다.

2. Hopfield and Tank의 선형계획을 위한 회로

Tank와 Hopfield는 선형계획문제의 형태로 다음과 같은 원문제와 쌍대문제를 설정하고 있다.

| | |
|-------------------|-------------------|
| 〈원문제〉 | 〈쌍대문제〉 |
| $Min \quad AV$ | $Max \quad \pi B$ |
| (s.t) $DV \geq B$ | (s.t) $\pi D = A$ |
| | $\pi \geq 0$ |

이때 2개의 변수와 ($N=2$) 4개의 제약식을 ($M=4$) 갖는 하나의 예제를 다음과 같이 설정하면 이 예제의 가능해영역(feasible region)은 [그림 2-1]과 같으며 이 예제를 중심으로 Tank와 Hopfield회로가 어떻게 선형계획문제의

해를 구하는지 설명하기로 한다.

(예제)

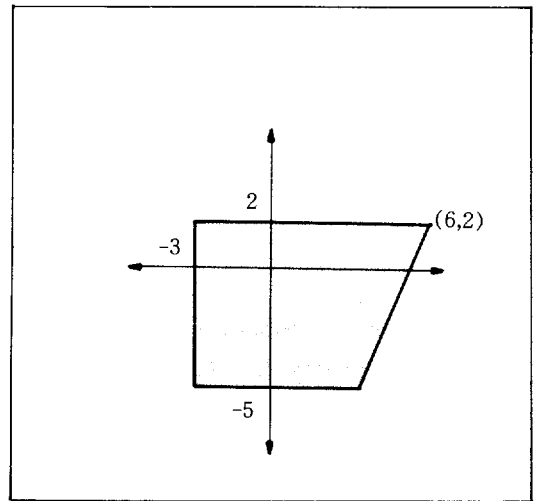
$$Min \quad -A_1x_1 - A_2x_2$$

$$(s.t) \quad x_1 \geq -3$$

$$-x_2 \geq -2$$

$$x_2 \geq -5$$

$$-2x_1 + x_2 \geq -10$$



[그림 2-1] 선형계획 예제의 가능해 영역

2.1 선형계획문제를 풀기 위한 회로

앞서 제시한 선형계획문제를 풀기 위하여 Tank와 Hopfield가 제시한 회로는 [그림 2-2]와 같다.

즉, 원문제의 목적함수 계수와 우변상수(Right Hand Side)의 마이너스 값들이 input전류로써 입력되고 제약식의 계수값들이 conductance 역할을 하며 capacitor C와 resistor R이 amplifier g에 각각 병렬로 연결된 상태에서 amplifier g의 input전압은 U_i ($i=1, 2$) output전압은 V_i 이며 amplifier f의 input 전압은 U_j ($j=1, 4$) output 전압은 π_j 이다.

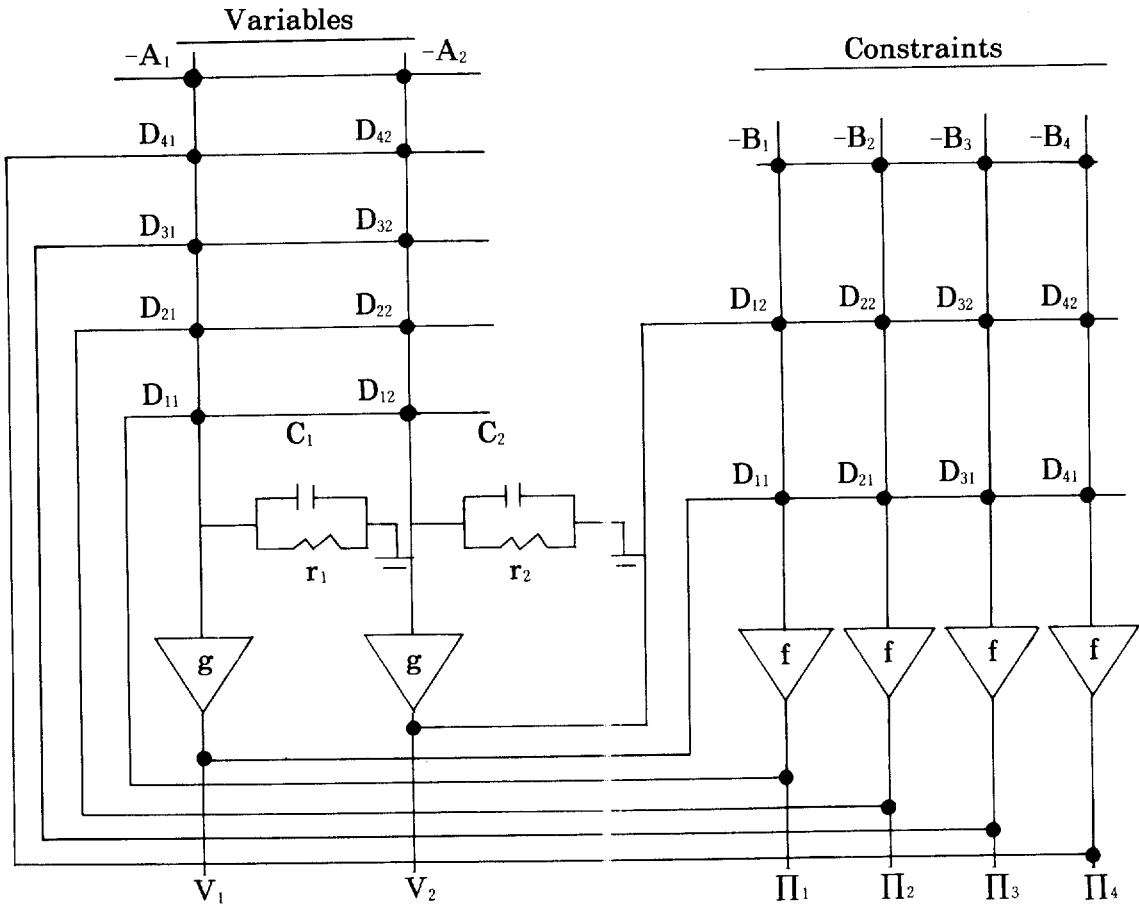
amplifier g 는 선형함수로서 가장 간단한 예로 $U_i = V_i$ 를 생각할 수 있다.

또한 amplifier f 는 다음과 같이 정의되는 비선형 함수이다.

$$f(U_i) = \pi_i, \quad U_i = D_j \cdot V - B_j$$

$$\text{여기서, } f(z) = 0, \quad z \geq 0$$

$$f(z) = -z, \quad z < 0$$



[그림 2-2] 선형계획문제를 풀기 위한 회로

2.2 전류 동적 방정식(Circuit Dynamic Equation)

만약 π_j 의 반응시간이 amplifier g 의 반응시간에 비하여 거의 무시할 수 있을 정도로 작은 시간이라면 amplifier g 의 전류방정식은 (1)과 같다.

$$\begin{aligned} C_i \frac{du_i}{dt} &= -A_i - \frac{u_i}{R} + \sum_j D_{ji} f(u_j) \\ &= -A_i - \frac{u_i}{R} + \sum_j D_{ji} f(D_j \cdot V - B_j) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{단, } \frac{1}{R_i} = \frac{1}{r_i} + \sum_j D_{ji} R = R_1 = R_2$$

이제 이러한 회로의 에너지함수를 아래와 같이 정의하면

$$E = (AV) - \sum_j F(D_j \cdot V - B_j) + \frac{1}{R} \int_0^V g^{-1}(v) dv$$

$$\text{여기서, } f(z) = \frac{dF(z)}{dz}$$

E 의 시간에 대한 미분식은 (2)와 같다.

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \sum_j dv_j dt [A_i - \sum_j D_{ji} f(D_j \cdot V - B_j) + \frac{U_i}{R}] \\ &= - \sum_j C_i \frac{dv_i}{dt} \frac{du_i}{dt} \end{aligned} \quad (2)$$

여기서, C_i 가 양수이며 함수 g 가 $g(U_i) = V_i$, $U_i = V_i$ 인 선형함수이므로 $\frac{du_i}{dt}$ 와 $\frac{dv_i}{dt}$ 는 부호가 같다. 그러므로 $\frac{dE}{dt} \leq 0$ 이 성립한다. 또한 $\frac{dv_i}{dt}$ 가 0으로 수렴함에 따라 $\frac{dE}{dt}$ 역시 0으로 수렴하게 되어 amplifier g 의 output 전압이 시간이 흐름에 따라 더 이상 변하지 않을때 에너지 함수도 최소값에 이르게 된다.

3. Tank와 Hopfield 회로의 문제점

앞에서 설명한 Tank와 Hopfield의 회로는 하나의 수렴점으로 접근하는 것은 사실이나 적절한 저항(R)값을 선정하지 않으면 내부점을 나타내는 출력 전압하에서 더이상 변하지 않는 현상이 있을 수 있다. 또한 A_i 값들을 적절히 축소 조정하지 않을 경우 수렴되는 점의 값이 가능해영역 밖에 머무는 현상을 가져온다. 이를 좀더 자세히 살펴보면 다음과 같다.

3.1 수 렬(Converge)

(1)의 전류방정식에서 amplifier g 의 output 전압인 V_i 가 가능해영역(feasible region) 내에 있다면 $f(U_i) = 0$ 이므로 $\sum_j D_{ji} f(U_j) = 0$ 가 된다.

이때, 만약 $-A_i - \frac{U_i}{R} = 0$ 가 된다면 $C_i \frac{dU_i}{dt} = 0$ 이므로 U_i 는 더이상 변하지 않게 된다. 즉 U_i 는 선형계획문제의 최적점으로 가는 도중에 가능해영역 내의 점인 $-A_i R$ 에서 수렴할 가능성이 존재하게 된다.

3.2 축소 조정(Scaling)

전류 방정식 (1)에 의하여 [그림 3-1]에서 원문제 해인 amplifier f 의 output 전압인 V_i 가 (모든 i 에 대하여) 가능해영역 내에 있다면 $f(U_j) = 0$ (모든 j 에 대하여)이 되어 V_i 는 $-A_i$ 방향으로 계속 가고자 할 것이다.

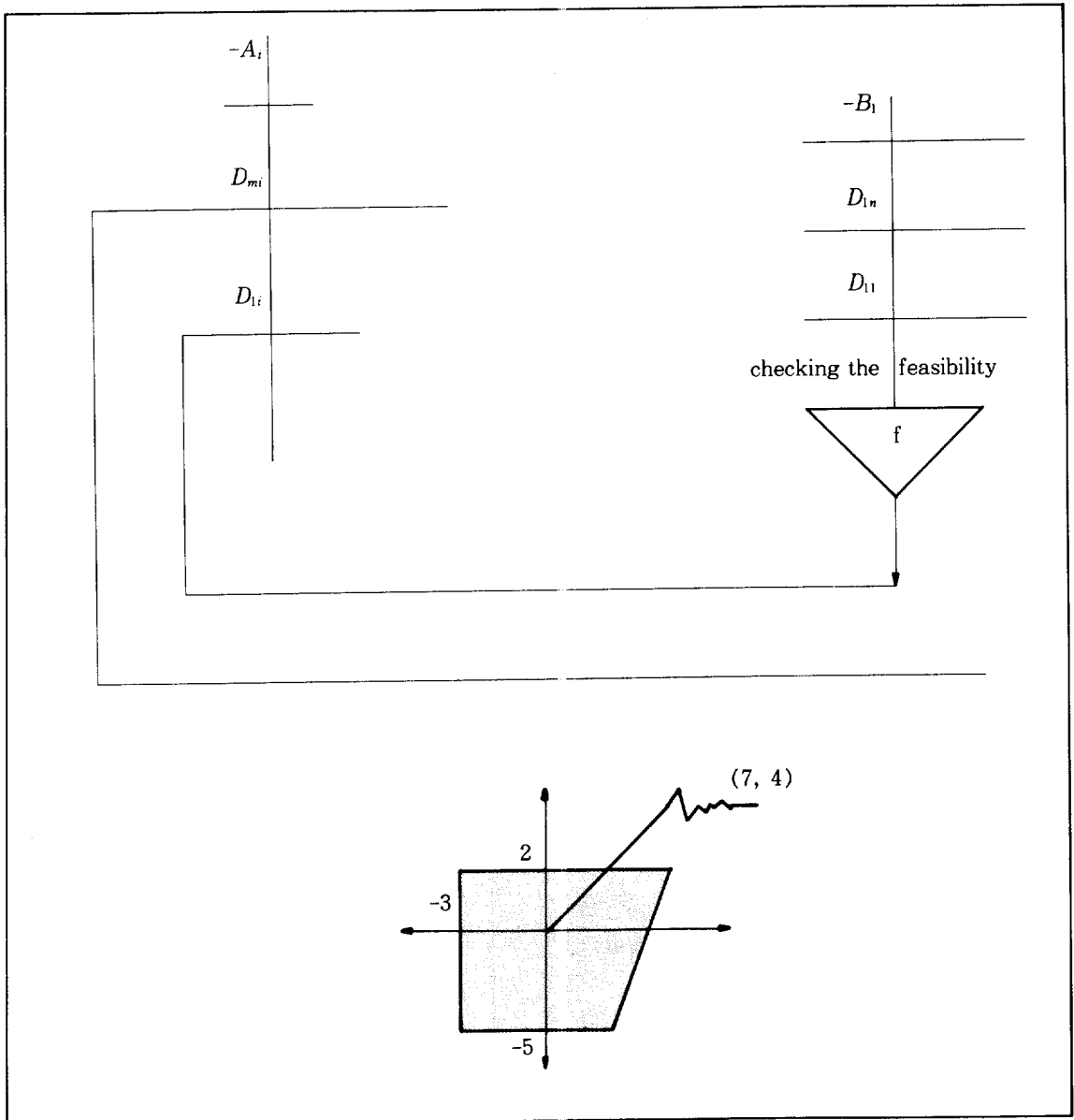
반대로 V_i 가 불충족(infeasible)할 때 그에 해당하는 $f(U_j)$ 가 변수들의 conductance에 곱

해진 값이 $-A_i$ 와 경쟁하여 더이상 V_i 가 $-A_i$ 방향으로 가지 못하도록 즉 V_i 의 가능도(feasibility)를 회복시켜 주어야 한다.

그러나 A_i 의 절대값이 클 경우 원문제의 해인 V_i 가 가능해영역을 벗어났을지라도 V_i 의 가

능도를 회복시켜 주지 못하고 계속 $-A_i$ 방향으로 가고자할 것이다.

[그림 3-1]은 이러한 경우를 보여주는데 $(A_1, A_2) = (-1, -2)$ 인 경우 가능해 영역을 벗어난 점에서 수렴함을 볼 수 있다.



[그림 3-1] $(A_1, A_2) = (-1, -2)$ 인 경우 해의 수렴

4. Tank와 Hopfield회로의 개선책

앞에서 제시한 문제점들을 해결하기 위하여 회로의 저항값(R)을 충분히 크게 해주어야 하며 input 전류인 A_i 값을 축소조정(즉, 모든 A_i 를 Q^*A_i 로 치환하는 작업, $0 < Q < 1$)해야만 한다. 여기서 A_i 값이란 결국 원문제의 목적함수 계수값인 동시에 쌍대문제의 우변 상수 값이므로 A_i 값의 축소조정이 원문제의 최적해를 구하는 데에는 영향을 미치지 않으나 쌍대문제의 해에는 영향을 미치므로 A_i 값의 축소조정 후 쌍대문제의 해 역시 같은 비율의 축소조정이 된 관점에서 해석되어야만 한다.

4.1 저항(R) 값을 조정

원문제 해인 V_i (모든 i 에 대하여)가 가능해 영역 내에 있을 때 (1)의 전류 방정식에 의하여 $f(U_i) = 0$ 이므로 $\sum_j D_{ji} f(U_j)$ 항은 0가 된다.

이때 만약 $-A_i - \frac{U_i}{R} = 0$ 가 된다면 U_i 는 $-A_i R$ 인 내부점에서 멈추게 될 가능성이 있다.

즉 $U_i = -A_i R$ 에서 양변에 절대값을 취하면 $|U_i| = |A_i R|$ 이며 R 값은 항상 양수이고 U_i 값은 원문제의 최적해 이므로 ($U_i = V_i$ 이므로) $2^{O(L)}$ 보다는 반드시 작게 된다.(여기서 L 은 문제의 크기(size)를 말함 [5].)

그러므로 만일

$$|U_i| = |A_i| R \leq 2^{O(L)}, \text{ 즉}$$

$$R \leq \frac{2^{O(L)}}{|A_i|} = 2^{O(L)} \text{ 이면}$$

원문제의 해가 내부점에서 수렴할 가능성이 존

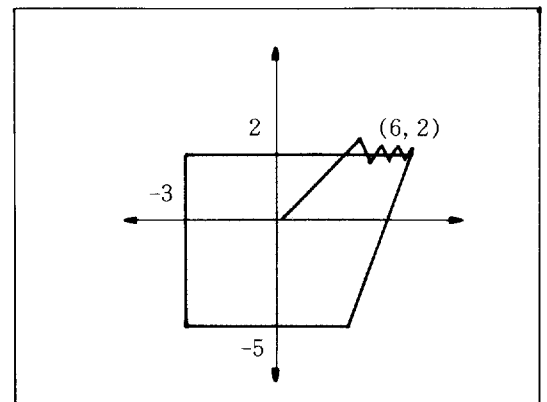
재하므로 만약 저항(R)값을 $2^{O(L)}$ 보다 크게 잡아준다면 이상과 같은 문제점을 사전에 방지할 수 있게 된다.

4.2 축소조정(Scaling)

[그림 3-1]에서 보듯이 원문제 해인 V_i (모든 i 에 대하여)가 가능해 영역 내에 있을 경우 V_i 는 $-A_i$ 방향으로 계속가고자 할 것이다. 반대로 V_i 가 가능해영역을 벗어났을 경우 전류 방정식 (1)에 의하여 $\sum_j D_{ji} f(U_j)$ 값이 $-A_i$ 와 경쟁하여 더이상 V_i 가 $-A_i$ 방향으로 가지못하도록 즉 V_i 의 가능도를 회복 시켜주어야 한다.

그러므로 만약 A_i 의 절대값이 전류 방정식 (1)에 의하여 $\sum_j D_{ji} f(U_j)$ 와 비교하여 충분히 작은값을 가진다면 [그림 4-1]에서 보듯이 임의의 V_i 가 가능해 영역을 조금이라도 벗어나면 가능도를 회복하여 선형계획의 최적점 가까이로 수렴하게 될 것이다.

그러나 일반적인 선형계획문제에서 적절한 R 값 및 A_i 의 축소정도를 결정하는 것은 현실적으로 많은 어려움이 존재하게 된다.



[그림 4-1] 목적함수 계수의 축소에 의한 최적점으로의 수렴

5. 수정된 신경모델 (Modified Neural Model)

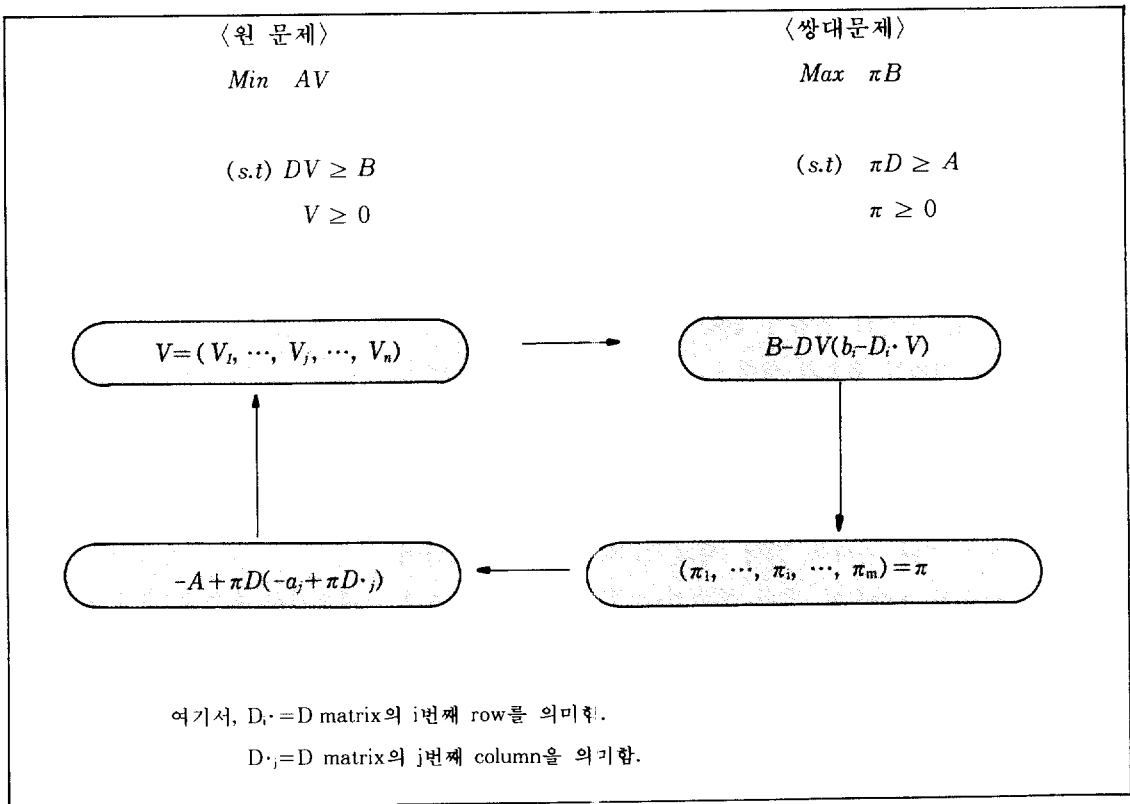
앞에 제시한 Tank와 Hopfield 회로의 문제점을 해결하기 위하여 기존의 회로 원리를 최적화 측면에서 재조명하여 수정된 모델을 도출해 보기로 본다.

먼저 Tank와 Hopfield 회로의 선형계획문제의 최적해를 구하는 원리는 다음과 같다.

[그림 2-2]에서 A_i 의 값들이 축소(Scaling)된 상황에서 amplifier g 의 output 전압인 V_i 값

들이 제약식의 conductance와 곱해진후 $-B_i$ 와 더해져서 그 값들이 양수인 경우 즉 V_i 값들이 제약식을 만족하면(feasible) V_i 는 $-A_i$ 방향으로 변화반게되며 반대로 그 값들이 음수인 경우 즉 V_i 값들이 제약식을 만족하지 않으면(infeasible) V_i 의 가능도를 회복하게 되어 결국 선형 계획문제의 최적점 가까이로 수렴하게 된다.

본 연구에서는 이러한 Tank와 Hopfield의 아이디어에 근거하여 원문제의 최적해와 쌍대문제의 최적해에 관한 정보를 회로매개변수 값들의 조정없이 동시에 산출할 수 있는 새로운 모델을 설계하게 되었다.



[그림 5-1] 수정된 모델의 작동원리

[그림 5-1]에서와 같이 원문제와 쌍대문제를 선형계획에서 널리 사용되어지는 대칭적 쌍(Symmetric Pair)으로 설정하였을 경우 V 값들이 충족(feasible)할 경우 $b_i - D_i \cdot V$ 들이 양수가 아니며 이 값들이 π 에 반영이 되어 πD 의 영향이 줄어들므로 -C방향으로 나가고자 할 것이다.

반대로 V값들이 불충족(infeasible)할 경우 원문제의 제약식 i 에 대하여는 $b_i - D_i \cdot V_i$ 가 양수이며 이 값이 π 에 반영이 되어 πD 의 영향이 커지므로 V의 충족도(feasibility)를 회복하게 될 것이다.

결국 원문제와 쌍대문제가 서로 대칭적 쌍이고 수정된 모델의 작동원리가 상호 연관성을 띄며 순차적으로 진행되기 때문에 쌍대문제의 해인 π 역시 V값을 구하는 것과 같은 시각에서 해석할 수가 있다.

5.1 수정된 모델의 함수 정의

수정된 모델을 자세히 논하기 전에 먼저 몇 가지 함수들을 정의할 필요가 있다.

함수 g 는 $g(r, T) = \tanh(r \cdot T)$ 인 함수로써 [그림 5-2]에서 보듯이 T가 클수록 r값에 대하여 민감하게 반응하며 반대로 T가 작을수록 r값에 상관없이 0에 가까운 값을 갖게 된다. 또한 G는 단순히 g 함수의 벡터 형태임을 알 수 있다.

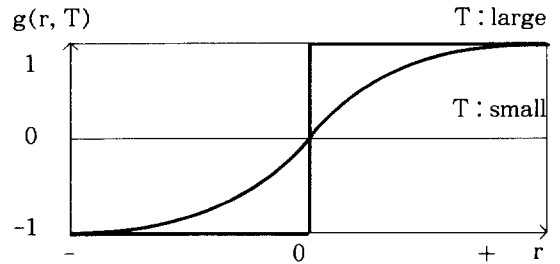
함수 $p(z)$ 는 z값이 양수이면 그대로 z 값을 취하며 z 값이 음수이면 0을 취하게 된다.

$$p(z) = z, \quad z \geq 0$$

$$p(z) = 0 \quad z < 0 \quad \text{즉 원문제와 쌍대문제의 변수들이 비음조건(nonnegativity)을 만족해야}$$

하므로 함수 p 는 변수들이 음수값을 갖는 것을 방지하는 역할을 수행하게 된다.

$$g(r, T) = \tanh(r \cdot T)$$



$$G(Y, T) = \begin{pmatrix} g(y_1, T) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g(y_m, T) \end{pmatrix}$$

[그림 5-2] 함수 g의 정의

5.2 수정된 모델의 작동원리 (Algorithm)

1) 1단계

원문제와 쌍대문제의 초기치 해인 $v(0)$ 와 $\pi(0)$ 를 설정한다.

2) 2단계

t시점에서 구한 $V(t)$ 를 $B - DV(t)$ 에 대입.

단, 원문제의 i 번째 제약조건이 충족할 경우 $b_i - D_i \cdot V(t)$ 는 음수값을 취한다. 원문제의 i 번째 제약조건이 불충족할 경우 $b_i - D_i \cdot V(t)$ 는 양수값

을 취한다.

3) 3단계

2단계에서 구한 B-DV(t)를 함수 G에 대입하여 π 를 구함.

$$\text{즉 } \pi = G(B-DV(t), T)$$

4) 4단계

3단계에서 구한 π 와 바로 전단계 π 값을 더한 후 양수값을 취함.

$$\text{즉 } \pi(t+1) = p(\pi(t) + \pi)$$

5) 5단계

4단계에서 구한 $\pi(t+1)$ 을 $-A + \pi(t+1)D$ 에 대입한 후 함수 G에 의하여 V를 구함.

$$\text{즉, } V = G(-A + \pi(t+1)D, T)$$

단, 쌍대문제의 j 번째 제약조건이 충족할 경우 $-a_j + \pi(t+1)D_j$ 는 음수값을 취한다.

쌍대문제의 j 번째 제약조건이 불충족할 경우 $-a_j + \pi(t+1)D_j$ 는 양수값을 취한다.

6) 6단계

5단계에서 구한 V와 바로 전단계의 V값을 더한 후 양수값을 취함.

$$\text{즉 } V(t+1) = p(V(t) + V)$$

7) 7단계

T값에 감소율(Q)을 곱하여 T값을 줄임.

$$\text{즉 } T \leftarrow T * Q(\text{감소율})$$

8) 8단계

2단계로 돌아감.

이러한 8단계의 계산절차를 $\|V(t+1) - V(t)\|$ 와 $\|\pi(t+1) - \pi(t)\|$ 가 0이 될 때까지 즉 원문제와 쌍대문제의 해가 수렴할 때까지 반복한다.

5.3 수정된 모델의 해석(Complementary Slackness 관점에서)

〈원 문제〉

$$\text{Min } AV$$

$$(s.t) DV \geq B$$

$$V \geq 0$$

〈쌍대문제〉

$$\text{Max } \pi B$$

$$(s.t) \pi D \leq A$$

$$\pi \geq 0$$

원문제와 쌍대문제의 형태가 위와 같을 때 결국 Complementary Slackness Theorem에 의해서 원문제와 쌍대문제의 최적해가 존재할 때 원문제의 최적해 곱하기 쌍대문제의 여분변수(slack variable)와 쌍대문제의 최적해 곱하기 원문제의 여분변수의 합은 0가 되어야 한다.

즉 $C.S(V, \pi) = \pi^T(DV - B) + V^T(A - D^T\pi)$ 로 정의하고

$$\pi(DV - B) = \Phi_1(V, \pi)$$

$$(A - \pi D)V = \Phi_2(V, \pi) \text{라 하면}$$

$V(t+1)$ 은 $V(t) + V$ 에 의해서 결정이 나며 $\pi(t+1)$ 은 $\pi(t) + \pi$ 에 의해서 결정이 나므로 결국 원문제와 쌍대문제의 해가 나가고자 하는 방향이 V와 π 에 의해서 정해지게 된다.

그런데 V는 B-DV 즉 $\Phi_1(V, \pi)$ 의 기울기의 반대방향(negative gradient)에 의해서 결정되고 π 는 $-A + \pi D$ 즉 $\Phi_2(V, \pi)$ 의 기울기의 반대방향(negative gradient)에 의해서 결정되므로 C.S(x, π)값은 감소하는 방향으로 변화받게 되어 결국 C.S(x, π)가 0이 될 때 최로는 정지하고 원문제와 쌍대문제의 최적해를 얻게 된다.

5.4 수정된 모델의 네트워크 Topology

수정된 모델과 Hopfield Net를 비교할 때 몇

가지 차이점을 발견할 수 있으며 수정된 모델의 노드간의 weight와 threshold값들에 대한 의미는 다음과 같다.

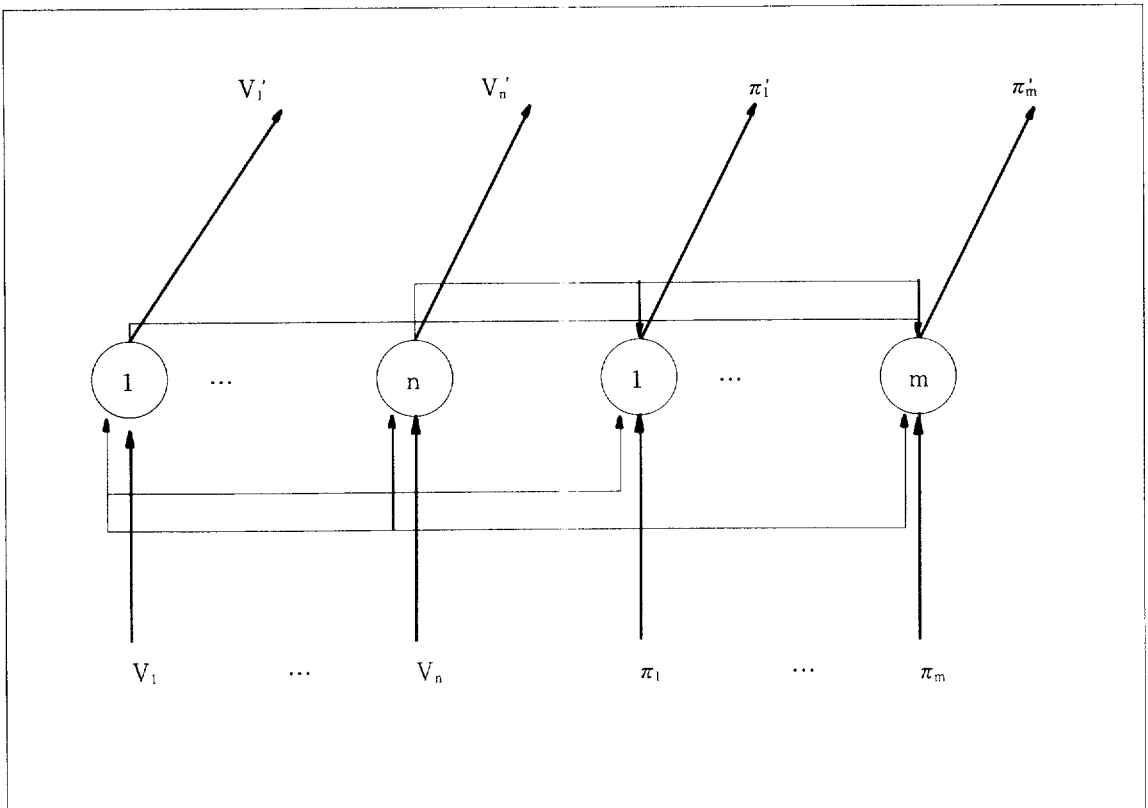
첫째, 쌍대문제에서 원문제로 연결된 weight값은 선형계획 제약식의 계수 행렬(D)로 이해할 수 있으며 원문제에서 쌍대문제로 연결된 weight값은 이것을 전치(transpose)시킨 것이다.

둘째, 원문제의 threshold는 목적 함수의 계수값들이며 쌍대문제의 threshold는 우변상수값들이 된다.

또한 수정된 모델의 네트워크 Topology와 1982년 Hopfield가 발표한 Hopfield Net과의 차이점은 다음과 같다.

첫째, 원래의 Hopfield Net의 input이 binary인 반면 수정된 모델의 input은 연속적인(continuous)값을 가지며

둘째, 원래의 Hopfield Net에선 모든 노드(node)간에 weight가 존재하는 반면 수정된 모델에서는 원문제의 변수에 해당하는 노드와 쌍대문제의 변수에 해당하는 노드간에만 weight가 존재한다.



[그림 5-3] 수정된 모델의 네트워크 Topology

6. Simulation 결과

앞의 3절 및 4절 에서 지적인 Tank와 Hopfield회로의 문제점 및 개선책에 대하여 [그림 2-1]의 예제를 이용한 simulation결과를 정리하고 이와 유사한 예제에 대하여 수정된 모델에서의 simulation결과를 보이기로 한다.

6.1 Tank와 Hopfield회로의 Simulation결과

[그림 2-1]에서와 같은 가능해영역이 주어 졌을 경우 만약 목적함수계수값이 $(A_1, A_2) = (-1, -2)$ 이라면 원문제의 해는 $(V_1, V_2) = (6, 2)$ 이고 쌍대문제의 해는 $(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) = (0, 2.5,$

$0, 0.5)$ 이다.

(표 6-1)에서 보듯이

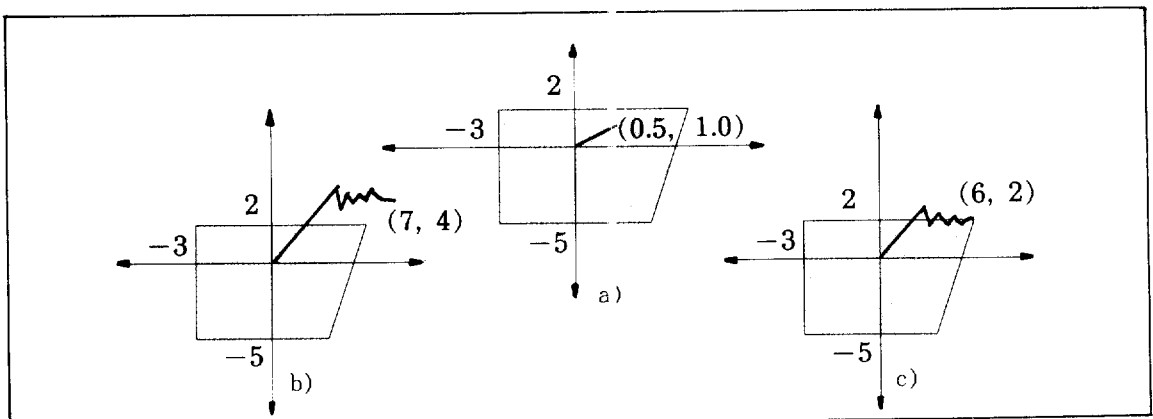
첫째, 저항값(R)을 작은값으로 둔채로 A_i 값 들을 축소시켰을 경우 앞서 예상했듯이 원문제의 해는 최적점으로 가는 도중인 저항값과 마 이너스 A_i 값을 곱한 $(0.5, 1)$ 가까이에서 멈추 게 된다([그림 6-1 a] 참조).

둘째, 저항값은 큰 값으로 조정하였으나 A_i 값을 축소시키지 않았을 경우 가능해영역을 벗 어난 $(7.5, 4.5)$ 가까이에서 수렴하였다([그림 6-1 b] 참조).

셋째, 저항값을 큰값으로 조정하고 A_i 값도 축소시켰을 경우 최적점에 가까운 $(6.01, 2.02)$ 에서 수렴하였다([그림 6-1 c] 참조).

〈표 6-1〉 Tank와 Hopfield회로의 simulation 결과

| Resistor | A_1 | A_2 | primal (1) | primal (2) |
|----------|-------|-------|------------|------------|
| 50 | -0.01 | -0.02 | 0.48 | 0.97 |
| 1000 | -1 | -2 | 7.5 | 4.48 |
| 1000 | -0.01 | -0.02 | 6.01 | 2.02 |



[그림 6-1] a) 저항값을 작게 잡았을 경우 b) A_i 값을 축소시키지 않았을 경우
c) 저항값을 조정하고 A_i 값을 축소시켰을 경우

6.2 수정된 모델의 simulation결과

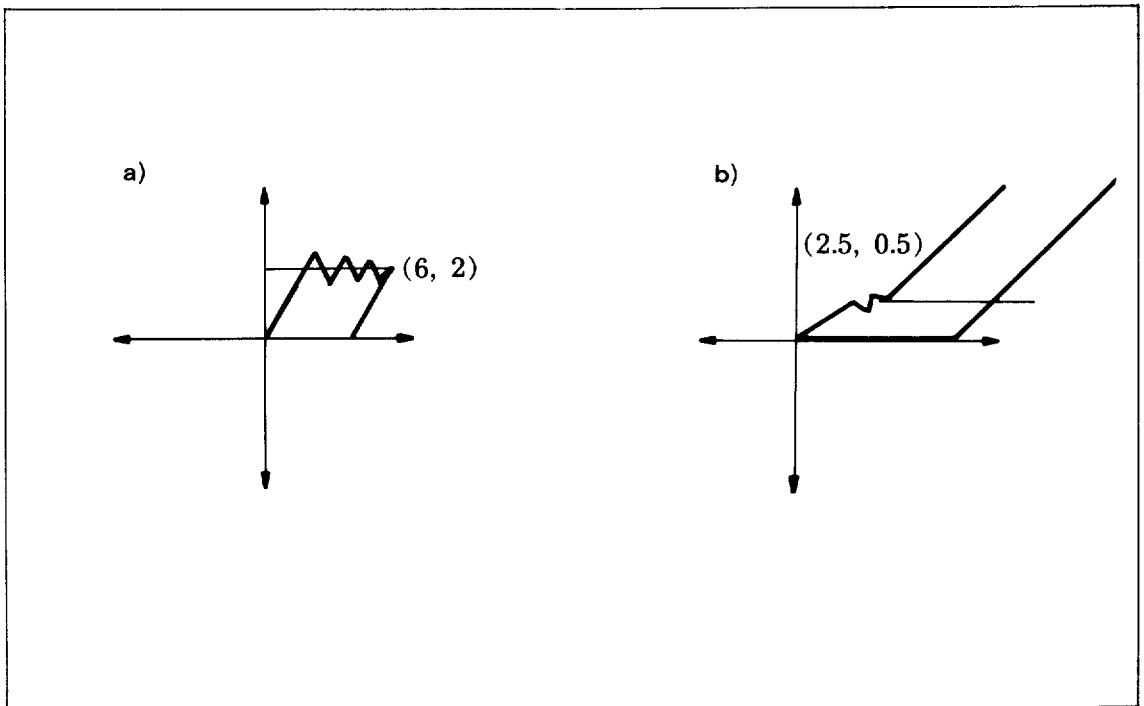
수정된 모델의 simulation을 위하여 사용되어진 예제는 Tank와 Hopfield회로의 simulation에서 사용되어진 예제를 다소 변형하여 원문제의 변수들에 대한 비음조건이 첨가되었고 [그림 2-1]의 예제에서 불필요한 제약식인(redundant constraint) 첫번째와 세번째 제약식을

제거한 형태이다.

〈표 6-2〉에서 선형계획 문제의 계수값에 상관없이 원문제와 쌍대문제의 해가 최적해 가까이에서 수렴함을 볼 수 있으며 [그림 6-2]는 원문제의 초기치 해를 원점으로 쌍대문제의 초기치 해를 (10, 10)으로 설정하였을 경우 이로부터 최적점으로 수렴해가는 과정을 나타내고 있다.

〈표 6-2〉 수정된 모델의 simulation 결과

| A_1 | A_2 | P(1) | P(2) | D(1) | D(2) |
|-------|-------|------|------|-------|-------|
| -0.01 | -0.02 | 6.0 | 2.0 | 0.026 | 0.005 |
| -0.1 | -0.2 | 5.9 | 1.8 | 0.25 | 0.05 |
| -1.0 | -2.0 | 6.1 | 2.8 | 2.5 | 0.5 |



[그림 6-2] a) $(A_1, A_2) = (-1, -2)$ 인 경우 원문제 해의 수렴과정

b) $(A_1, A_2) = (-1, -2)$ 인 경우 쌍대문제 해의 수렴과정

7. 결론 및 추후 연구 방향

7.1 결 론

Tank와 Hopfield 회로가 안고 있는 문제점은 주어진 선형계획문제에 적합한 회로매개변수 값들을 설정해 주는 것인데 본 연구에서는 Tank와 Hopfield 회로의 문제점을 해결하는 방안으로 저항과 전류값의 조정방법을 제시하였으며 그들의 회로가 안고 있는 문제점들을 근본적으로 개선하기 위하여 Complementary Slackness Theorem 관점에서 새로운 신경모형을 개발하게 되었다.

7.2 추후 연구 방향

앞으로의 연구방향에 있어서 다음의 세가지 점을 이야기 하기로 한다.

첫째, 수정된 신경모델의 효율성(Efficiency)을 높이기 위하여 함수 g 에 들어가는 T 와 감소율을 어떻게 설정할 것인가 하는 문제가 제기된다. 즉 T 가 크며 감소율이 작은 상태에서 회로가 동작한다면 시간은 오래걸리나 최적점에 보다 가까이 근접할 수 있다는 장점이 있으므로 문제의 성격에 따라 T 의 초기치 값 및 감소방법을 적절히 선정하는 문제가 있으며

둘째, 수정된 모델의 원리를 회로 simulator (ex SPICE [7], ...)를 이용하여 하드웨어의 simulation을 함으로서 회로구현 이전단계에서 수정된 모델의 성능을 평가하는 과제가 남아있다.

끝으로 수정된 모델의 작동원리에서 계산시간의 대부분을 차지하는 것은 $B-DV$ 와 $-A + \pi D$ 의 Matrix 벡터 곱셈이므로 이 부분을 병렬처

리함으로써 계산시간을 단축시킬 경우의 효율성을 점검하여 신경회로의 구현 이전단계에서 일반적인 병렬 컴퓨터상에서의 구현가능성을 타진해 보는 과제가 있을 수 있겠다.

참고문헌

- [1] Banzhaf, Walter, *Computer-aided circuit analysis using SPICE*, Prentice-Hall International Editions, 1989.
- [2] Kennedy, Michael P. and Leon O. Chua, "Unifying the Tank and Hopfield Linear Programming Circuit and the Canonical Nonlinear Programming Circuit of Chua and Lin," *IEEE Transaction on Circuit and Systems*, Vol. Cas-34 No. 2, February 1987, pp. 210-214.
- [3] Lippman, Richard P., "An Introduction to Computing with Neural Nets," *IEEE ASSP Magazine*, 1987, pp. 4-22.
- [4] Masson, Egill and Yih-Jeou Wang, "Introduction to Computation and Learning in Artificial Neural Networks," *European Journal of Operational Research*, 47 (1990), pp. 1-28.
- [5] Mutty, Katta G., *Linear Programming*, Wiley, 1983, pp.433-443.
- [6] Rodriguez-Vazquez, A., Rafael Dominguez-Castro, Adoracion Rueda, Jose L. Huertas and Edgar Sanchez-Sinencio, "Nonlinear Switched-Capacitor Neural Networks for Optimization Problems," *IEEE Transaction on Circuit and Systems*, Vol. 37, No. 3,

March 1990, pp. 384–398.

- [7] Tank, David W. and John J. Hopfield, "Simple Neural Optimization Networks : An A/D Converter, Signal Decision Circuit, and a Linear Programming Circuit," *IEEE Transaction on Circuit and Systems*, Vol. Cas-33, No. 5, May 1986, pp.533–541.