

# 비 측정 상태변수를 갖는 위상 표준형계통에 대한 가변구조 제어기의 설계

## The Design of Variable Structure Controller for the System in Phase Canonical Form with Incomplete State Measurements

朴 貴 泰\* · 崔 重 暉\*\*  
(Gwi-Tae Park · Jung-Keyng Choi)

*Abstract* - There have been several control schemes for the single input systems with unmeasurable state variables using variable structure control(VSC) theory. In the previous VSC, the systems must be represented in phase canonical form and the complete measurements for each state variable must be assumed. In order to eliminate these restrictions several VSC methods were proposed. And especially for the systems in phase canonical form with unmeasurable state variables, the reduced order switching function algorithm was proposed. But this method has many drawbacks and can not be used in the case of general form (not phase canonical form) dynamic system. Therefore this paper propose new construction method of switching fuction for the systems in phase canonical form, which reduce the restriction of reduced order switching function algorithm. And this algorithm can be realized for any state representation and adopted in the systems where not all states are available for switching function synthesis or control.

**Key Words** : Sliding Mode(슬라이딩 모드), Variable Structure Control(가변구조 제어), Phase Canonical Form(위상 표준형), Reduced-order Switching Function(감소 차수 스위칭 함수)

\*正 會 員 : 高麗大 工大 電氣工學科 教授·工博(서울대  
erc member)

\*\*正 會 員 : 高麗大 工大 大學院 電氣工學科 博士課程  
接受日字 : 1991年 9月 17日  
1次修正 : 1992年 1月 23日  
2次修正 : 1992年 6月 10日

### 1. 서 론

가변구조제어 이론은 다른 제어론과는 달리 다 음과 같은 독특한 특성을 가지고 있어서 오늘날 이 이론에 대한 많은 연구가 진행되고 있다. 먼저

계통의 파라미터 변동이나 외란에 대한 통계적인 정보를 모른다 하더라도 그 한계치만을 알고 있으면 이 제어이론을 적용 할 수 있다는 것이다. 그리고 다른 적응제어 이론에서 처럼 미지의 파라미터를 추정해야 할 필요가 없을 뿐 만 아니라 물리적인 실현이 간단하기 때문에 실시간 제어에 유리하다는 장점을 가지고 있다. 또한, 이 제어 이론은 계통을 슬라이딩 모드라는 특이한 동작상태에 머무르도록 제어입력을 발생시켜 줌으로 계통 응답의 속응성과 파라미터 변동이나 외란에 대한 둔감성을 동시에 얻을 수 있다[1~3].

위와 같이 가변구조제어이론은 여러가지 장점이 있지만 본질적으로 모든 상태변수들에 대한 정보를 알아야 한다는 제약 조건을 가지고 있다. 그러나 대규모 계통과 같은 고차 계통에서는 이러한 제약 조건이 만족되기가 어려우며 실사 만족된다 하더라도 이를 위해 과다한 경비가 요구되는 경우에 가변구조 제어이론을 적용한다는 것은 매우 비현실적인 일이 될 것이다. 따라서 측정불가능한 상태변수들이 존재하는 계통에 있어서 설계자가 원하는 제어 목적을 효과적으로 달성하기 위한 제어 알고리즘의 개발이 절실히 요구되어지는 추세이다.

이러한 가변구조제어 이론에 관한 연구 추세에 따라 표준형 계통과 비표준형 계통에 대해 각각 적용될 수 있는 여러 새로운 알고리즘들이 연구 개발되었다. 그 중 특히 B.A. White는 reduced-order스위칭함수를 이용하여 표준형 계통에 있어서 측정 불가능한 상태들로 인한 여러가지 문제점들을 해결하려 했으나 이 방법은 다음과 같은 여러가지 단점을 가지고 있어서 그 적용에 어려움이 많았다. 첫째는 둘 이상의 상태변수들에 대한 정보를 모르는 경우에는 적용하기 어렵다는 것이고 둘째로는 측정가능한 상태들로만 구성된 이 reduced-order스위칭함수에 의해 발생하는 슬라이딩 모드가 가변구조이론 고유의 슬라이딩 모드가 아니라 준 슬라이딩 모드이기 때문에 그 가변구조 제어 고유의 특성인 미지의 파라미터 변화 및 외란에 대한 둔감성이 많이 떨어지게 된다는 점이다.

이에 본 연구에서는 측정불가능한 상태변수들을 갖는 표준형 계통에 적용되면서 비표준형 계통에 대해서도 확장 적용할 수 있으며, 가변구조이론의 고유한 특성들을 그대로 유지시켜줄 뿐 아니라, 계통이 가지고 있는 측정불가능한 상태수에 대한 제한을 줄일 수 있는 새로운 스위칭함수 구성법을 제안했다. 이 구성법에 의한 스위칭함수는 측정가능한 상태들로 이루어진 reduced-order 스위칭함

수 Sr과 그의 미분치들로 구성되어 지기 때문에 모든 상태들의 선형결합으로 이루어진 전상태 스윙칭함수와 동등한 정보를 얻어낼 수 있다. 그리고 제어 입력은 고정 입력성분으로 측정가능한 상태변수와 스위칭함수를 케환 시키고 가변입력으로 측정가능한 상태변수들 만을 스위칭하여 안정한 가변구조 제어계를 얻게 된다. 본 논문의 5장에서는 이 알고리즘을 여러 상황에서 3차 표준형계통에 적용한 시뮬레이션 결과를 reduced order스윙칭함수 알고리즘과 비교한 결과를 도시하였다. 그리고 비표준형계통에 대한 알고리즘의 확장 적용은 다음 기회에 소개하기로 하겠다.

## 2. 기본이론

가변구조 제어이론은 상태공간상에 어떤 특정한 슬라이딩 평면을 정하고 이에 대한 상태공간에서의 상태벡터의 위치에 따라 과도 기간중에 의도적으로 불연속적인 입력을 가해 계통의 구조를 바꾸어 줌으로써 상태벡터가 빠른 속도로 이 슬라이딩 평면을 따라가게 하는 슬라이딩 모드(silding mode)를 얻어 내는 것으로 견실성 및 속응성을 개선하는 현대 제어이론이다.

이 이론을 다음의 단일입력 표준형계통에 대해 적용해 보자.

$$\dot{X} = AX + bU \tag{1}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & & \cdot & & \\ \cdot & & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & & 1 \\ \dots & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$U = -(K^t + \Delta K^t)X \tag{2}$$

여기서  $X(\in R^n)$ 는 상태벡터이고,  $A(\in R^{n \times n})$  및  $b(\in R^{n \times 1})$ 는 계통행렬이며  $U(\in R)$ 는 제어입력으로 고정이득  $K^t(\in R^{1 \times n})$ 와 가변이득  $\Delta K^t(\in R^{1 \times n})$ 를 갖는다. 이때 스위칭 평면은 다음과 같이 정의된다. 그리고 아래식에 포함된  $D$ 는 미분 연산자( $d/dt$ )이다.

$$S = C^t X \\ = \sum_{i=0}^{n-1} C_{i+1} D^i X_1 = 0 \tag{3}$$

$$C^t = (C_1 \ C_2 \ \dots \ C_{n-1})$$

상태 벡터가 이 평면을 따라 원점으로 수렴하게 하는 제어 입력을 인가할 때 얻어지는 특성을 슬라이딩 모드라 하고 표준형 계통의 경우 (3)식으

로 표현할 수 있다. 즉 슬라이딩 모드는 궁극적으로  $n-1$ 개의 특성근을 갖는 한 차수 줄어든 페루프 방정식으로 표현된다. 그리고  $C'$ 는 슬라이딩 모드내에서 계통이 안정하도록 선택되어 진다. 계통의 상태가 슬라이딩 평면에 hitting하게 하여 슬라이딩 모드를 일으키게 하는 충분조건은 다음과 같다.

$$S\dot{S} < 0 \tag{4}$$

위 조건식을  $n$ 차원 벡터공간에서의 선형 연산자인  $C'$ 를 고려하여 입력성분이 포함된 식으로 유도해 보자. (3)식으로 정의된 스위칭평면에서 모든 상태가 측정가능할 때  $C'$ 는  $(n-1)$ 의 nullity와 일차의 range space를 갖게된다. 가변이득  $\Delta K'$ 를 0으로 볼때 계통의 동특성 방정식은 다음과 같다.

$$\dot{X} = AX - bK'X = (A - bK')X = A_cX \tag{5}$$

여기서 고정이득  $K'$ 값을 이 페루프 계통의  $A_c$ 가  $C'$ 의 null space를 구성하는  $n-1$ 개의 고유벡터를 포함하게 한다. 식(5)와 같이 표현되는 페루프 계통의 고유벡터를 상태공간의 기저벡터(basis)로 선정하면 임의의 상태벡터  $X$ 는 기저벡터들의 선형결합으로 식(6)과 같이 표현할 수 있다.

$$X = \sum_{i=1}^n a_i Z_i \tag{6}$$

여기서  $a_i$ 는 임의의 스칼라이며  $Z_i$ 는  $A_c$ 의  $i$ 번째 고유치에 대한 고유벡터이다. 또한  $C'$ 의 null space에 있는 어떠한 벡터도 우리가 고정이득  $K'$ 를  $A_c$ 의 고유치가 null space의 특성근을 포함하게 선택 했으므로 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$X = \sum_{i=1}^{n-1} a_i Z_i \tag{7}$$

식(7)을 식(3)에 대입하면 다음과 같다.

$$S = C'X = \sum_{i=1}^{n-1} a_i C_i Z_i = 0 \tag{8}$$

그러므로  $C'$ 의 null space이외의 상태공간에 위치하는 상태벡터들에 대해서  $S$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$S = a_n C' Z_n \tag{9}$$

그리고, 식(10)의 관계를 이용하여 위 (9)식을 미분하면 식(11)과 같이 표현할 수 있다.

$$\dot{Z}_n = A_c Z_n = \lambda_n Z_n \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \dot{S} &= \lambda_n a_n C' Z_n \\ &= \lambda_n S \end{aligned} \tag{11}$$

고정이득  $K'$ 와 함께  $\Delta K'$ 도 고려하면  $S$ 와  $\dot{S}$ 공간

에서  $\lambda_n$ 에 의해 그 특성이 결정되는 일차의 range space동특성 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{S} &= C'\dot{X} = C'A_c X - C'b\Delta K'X \\ &= \lambda_n C'X - \Delta K'X \\ &= \lambda_n S - \Delta K'X \\ C'b &= 1 \end{aligned} \tag{12}$$

위 식을 다시 상태변수들로 묶은 다음 양변에  $S$ 를 곱하면 슬라이딩 모드 조건식이 유도된다.

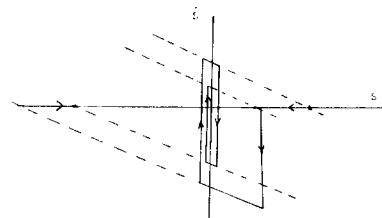
$$\dot{S}S = \sum_{i=1}^n (\lambda_n C_i - \Delta K_i) X_i S < 0 \tag{13}$$

이 조건을 만족하는 가변입력의 이득성분을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \lambda_n < 0 \text{이고 } SX_i > 0 \text{이면 } \Delta K_i > 0 \\ SX_i > 0 \text{이면 } \Delta K_i < 0 \\ \lambda_n > 0 \text{이고 } SX_i > 0 \text{이면 } \Delta K_i > \lambda_n C_i \\ SX_i < 0 \text{이면 } \Delta K_i < \lambda_n C_i \end{aligned} \tag{14}$$

위 조건들을 만족하는 가변입력의 이득성분을 포함하는 제어입력에 의해 우리는 상태 공간에서 그 궤적이 스위칭평면을 따라가는 슬라이딩 모드를 얻을 수 있고 이 모드의 발생을  $S$ 와  $\dot{S}$ 공간에서의 궤적을 통해 알 수 있다. 우리가  $S=0$ 인 부근에서  $S(x) \cdot \dot{S}(x) < 0$ 인 슬라이딩조건을 만족시켜 주는  $\text{sgn}(\Delta K_i X_i S) = 1$ 인 스위칭 이득을 주면,  $S$ 축 즉  $S=0$ 인 부근에서 계통의 구조를 바꾸어 주므로 궤적이  $S < 0$ 인 영역으로 넘어 갈때 기울기는 변함없이  $\lambda_n$ 이 되고 절편만 부호가 바뀌고 절대치는 줄어들어 아래 그림 2.1과 같은 완전한 전형적인 range space동특성 방정식의 궤적이 얻어진다. 따라서 full-order(전상태) 스위칭함수를 이용할 때 그 슬라이딩 모드의 발생을 알 수 있다.

위의 슬라이딩 모드에 계통의 상태들이 들어가게 되면 궁극적으로 계통의 동특성을 (3)식이 지배하게 되므로 계통의 차수가 하나 줄어 들고 여



**그림 2.1** 전형적인 range space dynamic ( $\lambda_n < 0$ )  
**Fig. 2.1** The trajectory of typical range space dynamic

러가지 가변구조제어 고유의 특성을 얻을 수 있다 [3]. 다음 장에서는 측정 불가능한 상태변수들을 갖는 계통에 대해서도 가변구조 제어 이론을 적용하여 이러한 장점들을 얻기위해 모든 상태들에 대한 가용성 문제를 고찰하겠다.

### 3. 측정불가능한 상태변수들을 갖는 계통에 대한 가변구조 제어기 설계

#### 3.1 reduced-order스위칭함수 알고리즘[1]

측정불가능한 상태변수가  $X_n$  하나일 경우 스위칭함수의 계수 행렬은 다음과 같다.

$$S_r = C'X, C' = (C_1, C_2, \dots, C_{n-2}, 1, 0) \quad (15)$$

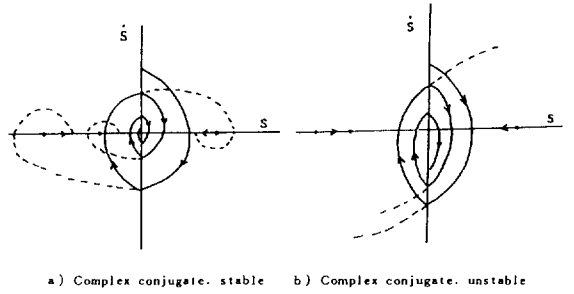
위와 같은 reduced-order스위칭함수의 경우 nullity는 변함없이  $n-1$ 이지만  $S=0$ 을 만족하는  $X$ 의 벡터는 항상  $X_n$ 축을 basis로 포함하므로 nullity가  $n-1$ 임을 감안할 때  $n-2$ 개의 슬라이딩 모드 특성근을  $C'$ 의 null space에 포함시킬 수 있다. 그러므로 여기서 빠진 두 페루프 특성근의 고유벡터들이 basis로 range space를 구성하게 된다. 결국 range space동특성 방정식은 2차가 되고 앞의 전상태 스위칭함수의 경우와 같이 식을 전개하면 아래의 식들이 얻어진다.

$$S_r = \sum_{i=n-1}^n \alpha_i C'Z_i \quad (16)$$

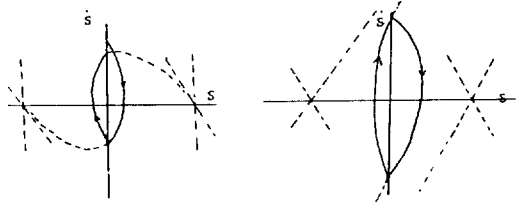
$$\begin{aligned} \dot{S}_r &= C'\dot{X} = C'A_cX - C'b\Delta K'X \quad (C'b=0) \\ &= C'A_cX = \sum_{i=n-1}^n \lambda_i \alpha_i C'Z_i \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \dot{S}_r &= C'A_c\dot{X} = \sum_{i=n-1}^n \lambda_i^2 \alpha_i C'Z_i - \Delta K'X \quad (18) \\ &= (\lambda_n + \lambda_{n-1})\dot{S}_r - (\lambda_n\lambda_{n-1})S_r \\ &\quad - \Delta K'X \end{aligned}$$

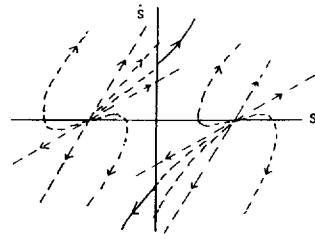
(17)식에서 알 수 있듯이  $S_r=0$ 인 부근에서  $S_r, \dot{S}_r < 0$ 이 되게 하는 가변이득 값을 결정할 수는 없지만 이차의 range space동특성 방정식인 (18)식이 안정하게 하는 준 슬라이딩 모드는 가능하다. 이 모드를 이상적인 슬라이딩 모드와 비교할 수 있도록 이차 range space동특성 방정식의  $\lambda_n, \lambda_{n-1}$ 에 따른 궤적을 그림 3.1에 도시하였다. 그림에서 나타난 것과 같이 e)의 Real. unstable한 궤적을 제외하고는 전부 0으로 수렴한다. 그러나 그림 2.1의 full-order스위칭함수의 경우와 비교해서 그 특성이 그리 좋지 않음을 알 수 있다. 즉 B.A. White에 의해 제안된 reduced-order스위칭함수 알고리즘은 측정 불가능한 상태변수가 둘 이상 일때



a) Complex conjugate. stable b) Complex conjugate. unstable



c) Real. stable d) Real. one stable-one unstable



e) Real. unstable

그림 3.1 Reduced-order 스위칭함수를 사용할 때의 궤적

Fig. 3.1 Range space trajectories for reduced-order null space

는 사용할 수 없고 엄격한 의미의 슬라이딩 모드가 아닌 준 슬라이딩 모드의 발생으로 인해 그 응답특성이 저하된다.

이같은 단점들을 개선하기 위해 본 논문에서는 전상태 스위칭함수를 사용하여 얻을 수 있는 제어결과와 거의 동일한 결과를 얻으면서 측정가능한 상태변수들과 그의 미분치를 이용하여 가변 구조 제어를 할 수 있는 새로운 스위칭함수 구성법을 제안한다.

#### 3.2 새로운 스위칭함수 구성 알고리즘

본 장에서는 표준형 계통에서 측정불가능한 상태변수들을 고려한 B.A. White의 reduced order 스위칭함수 알고리즘의 단점들을 제거하는 새로운

스위칭함수 구성 알고리즘을 제안하고자 한다. 이 구성법은 측정가능한 상태변수들의 값에서 full-order 스위칭함수의 정보를 얻어 내기 위한 것이고 제어입력에서는 측정가능한 상태변수와 스위칭함수를 고정입력으로 포함하면서 측정가능한 상태변수들만으로 가변입력을 구성한다.

**3.2.1 스위칭함수의 구성**

i)  $X_n$  하나의 상태만 측정 불가능한 경우

먼저 모든 상태가 측정가능하다는 가정하에 이 상적인 full-order 스위칭함수  $S_f$ 를 다음과 같이 가정한다.

$$S_f = \sum_{i=1}^n M_i X_i \quad (M_n=1) \tag{19}$$

$$= \prod_{i=1}^{n-1} (D - \lambda_i) [X_1]$$

여기서  $D$ 는 미분 연산자이며  $\lambda_i$ 는 슬라이딩 모드 특성근이다.

제어 입력은 측정불가능한 상태변수를 고려해서 다음과 같이 구성되어진다.

$$U = - \sum_{i=1}^{n-1} (K_i + \Delta K_i) X_i \tag{20}$$

그리고 range space 동특성 방정식이 full-order 스위칭함수의 경우와 같이 식(21)로 표현되기 위해서는 고정이득  $K'$ 에 의해 전체 페루프 계통의 특성근속에 슬라이딩 모드의 특성근  $\lambda_i (i=1, n-1)$ 가 포함되게 해주어야 한다.

$$\dot{S}_f = \lambda_n S_f - \sum_{i=1}^{n-1} \Delta K_i X_i \tag{21}$$

이를 위해서는 (21)식을 다시 상태들의 식으로 표현한 (22)식과 계통의 dynamic에서 얻어진 (23)식을 비교해 같게 되도록 (24)식과 같이  $K_i, \lambda_n$ 을 선택해 주면된다.

$$\dot{X}_n = \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_n M_i - M_{i-1} - \Delta K_i) X_i + (\lambda_n - M_{n-1}) X_n, (M_0=0) \tag{22}$$

$$\dot{X}_n = \sum_{i=1}^{n-1} (-a_i - K_i - \Delta K_i) X_i - a_n X_n \tag{23}$$

$$\lambda_n M_i - M_{i-1} = -(a_i + K_i) \quad (i=1, n-1) \tag{24}$$

$$\lambda_n - M_{n-1} = -a_n$$

여기서  $-a_i$ 는 표준형 계통행렬  $A$ 의 마지막 열의 요소이다. 이 결과 우리는 (21)식의 range space dynamic을 얻을 수 있다. 그러나 스위칭함수 구성에 있어서는  $X_n$  상태가 측정 불가능한데도 불구하고 이 모르는 상태를 스위칭함수에 포함시켜 구

성하였다. 이런 모순을 제거하기 위해 다음과 같은 새로운 스위칭함수 구성법을 제시한다.

새로운 스위칭함수를 구성하기 앞서 다음의 reduced-order 스위칭함수를 먼저 구성한다.

$$S_r = \prod_{i=1}^{n-1} C_i X_i = \prod_{i=1}^{n-2} (D - \lambda_i) [X_1] \tag{25}$$

여기서 reduced order 스위칭함수의 특성근이 모두 full order 스위칭함수의 특성근에 포함되도록 구성되었다는데 유의해야 한다. 그리고 식(25)의 reduced-order 스위칭함수와 그의 미분값들을 이용하여 다음과 같은 새로운 스위칭함수를 구성한다.

$$S_n = H_1 S_r + \dot{S}_r \tag{26}$$

$$= \prod_{i=1}^{n-2} (D + H_1)(D - \lambda_i) [X_1]$$

여기서  $-\lambda_{n-1}$ 과  $H_1$ 를 같게 해주면 (19)식과 (26)식이 동일하게 되므로 우리는 full order 스위칭함수  $S_f$ 대신 (26)식의 스위칭함수를 사용하여도 그 range space 동특성 방정식은 (21)식 그대로 사용할 수 있다.

이때  $M_i (i=1, n-1)$ 값들은 미리 슬라이딩 모드의 특성근인  $\lambda_i (i=1, n-1)$ 가 안정하게 되어야 한다는 제약과 갖고 있음을 주의해야 한다.

ii)  $X_n$ 과  $X_{n-1}$  상태들이 측정 불가능한 경우

이 때의 제어 입력은 다음과 같이 구성되어진다.

$$U = - \sum_{i=1}^{n-2} (K_i + \Delta K_i) X_i \tag{27}$$

그리고 이 경우에 대해서도 range space dynamic 이 full-order 스위칭함수의 경우와 같이 아래 식으로 표현되기 위해서는 고정이득  $K_i, \lambda_n$ 에 의해 전체 페루프 계통의 특성근속에 슬라이딩 모드의 특성근  $\lambda_i (i=1, n-1)$ 가 포함되게 해주어야 한다.

$$\dot{S}_f = \lambda_n S_f - \sum_{i=1}^{n-1} \Delta K_i X_i \tag{28}$$

이를 위해서 i)의 경우와 유사한 방법으로 다음의 관계식을 유도할 수 있다.

$$\lambda_n M_i - M_{i-1} = -(a_i + K_i) \quad (i=1, n-2) \tag{29a}$$

$$\lambda_n M_{n-1} - M_{n-2} = -a_{n-1} \tag{29b}$$

$$\lambda_n - M_{n-1} = -a_n \tag{29c}$$

식(29b)와 (29c)의 조건식의 해를 구하기 위해서는 전상태 스위칭함수의 계수중 한 값을 임의의 값으로 선정해야 한다. 이때  $M_i (i=1, n-1)$ 값들은 미리 슬라이딩 모드의 특성근인  $\lambda_i (i=1, n-1)$ 가 안정하게 되어야 한다는 제약과 갖고 있기 때문에

이 제약을 만족시키면서 위 (29)식의 관계식을 유지시켜주는 적절한  $M_i(i=1, n-1)$ 값들의 선택이 필요하다.

이런 제약에 주의하여 선택된 full order스위칭 함수와 같은 값을 얻어내기 위하여 다음과 같이 reduced order스위칭 함수와 그의 미분치들로 이루어진 새로운 스위칭 함수를 구성한다. 이 때도 역시  $X_n$ 과  $X_{n-1}$ 상태들이 빠진 상태 변수들의 선형 결합으로 이루어진 reduced order스위칭 함수의 특성근이 모두 full order스위칭 함수의 특성근에 포함되도록 구성한다.

$$S_r = \prod_{i=1}^{n-3} (D - \lambda_i) [X_1] \quad (30)$$

$$\begin{aligned} S_n &= H_1 S_r + H_2 \dot{S}_r + \ddot{S}_r \quad (31) \\ &= \prod_{i=1}^{n-3} (D^2 + H_2 D + H_1) (D - \lambda_i) [X_1] \end{aligned}$$

여기서  $H_1$ 과  $H_2$ 값은 이상적인 full-order스위칭 함수의 특성근  $\lambda_{n-2}, \lambda_{n-1}$ 이 (31)식의 특성근 속에 포함되도록 선택해주면 된다.

iii)  $m$ 개의 상태변수만 측정가능할 경우

이 경우에 대해서도 ii)와 같은 절차를 밟아 range space동특성 방정식이 full-order스위칭 함수의 경우와 같이 표현되기 위한 조건들과 full order스위칭 함수의 정보를 얻기위한 새로운 스위칭 함수 구성법은 다음과 같다.

$$U = - \sum_{i=1}^m (K_i + \Delta K_i) X_i \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \lambda_n M_i - M_{i-1} &= -(a_i + K_i) \quad (i=1, m) \\ \lambda_n M_{m+1} - M_m &= -(a_{m+1}) \\ &\vdots \\ \lambda_n - M_{n-1} &= -(a_n) \end{aligned} \quad (33)$$

$$S_r = \prod_{i=1}^{m-1} (D - \lambda_i) [X_1] \quad (34)$$

$$\begin{aligned} S_n &= H_1 S_r + H_2 S_r^{(1)} + H_3 S_r^{(2)} + \dots + \\ &\quad H_{n-m+1} S_r^{(n-m)} \quad (35) \\ &= (D - J_1) \cdots (D - J_{n-m}) [S_r] \\ &= \prod_{i=1}^{m-1} (D - J_i) \cdots (D - J_{n-m}) (D - \lambda_i) [X_1] \end{aligned}$$

여기서도  $H_i(i=1, n-m+1)$ 에 의해 결정되는 새로운 스위칭 함수의 일부 특성근  $J_i(i=1, n-m)$ 가 이상적인 full-order스위칭 함수의 특성근  $\lambda_i(i=m,$

$n-1)$ 와 같게 되도록  $H_i$ 값들을 선택해주면 된다. 여기서  $m$ 개의 고정이득 값을 갖고 (33)식을 만족시키기 위해서는 스위칭 함수 계수행렬  $M$ 의 요소 중 고정되어야 하는 값이 늘어나기 때문에 슬라이딩 모드의 안정성을 보장 못하는 경우도 발생할 수 있다. 그러므로 어떠한 수의 측정 불가능한 상태변수들을 갖는 계통에 대해서도 가변구조 제어 알고리즘을 적용하기 위해서는 고정이득 선택에 관한 계속적인 연구가 필요하다.

### 3.2.2 가변 제어 입력의 결정

먼저  $m$ 개의 상태변수들이 측정 불가능한 경우 다음과 같은 슬라이딩 조건을 만족시키는 가변 제어 입력을 선택하기 위한 White의 조건식들을 소개한다. [6]

$$\dot{S}_n S_n = \lambda_n S_n S_n - \sum_{i=1}^m \Delta K_i X_i S_n < 0 \quad (36)$$

- 1)  $\lambda_n M_i - M_{i-1} < 0 (i=m+1, n)$
- 2)  $\lambda_n > 0$ 이고  
 $S_n X_i > 0$ 이면  $\Delta K_i > \lambda_n M_i$   
 $S_n X_i < 0$ 이면  $\Delta K_i < \lambda_n M_i - M_{i-1} (i=1, m)$   
 $\lambda_n < 0$ 이고  
 $S_n X_i > 0$ 이면  $\Delta K_i > 0$   
 $S_n X_i < 0$ 이면  $\Delta K_i < \lambda_n M_i (i=1, m)$

위 조건식은 1)의 조건으로 인해 그 적용이 어렵고 큰 제한성을 갖고 있다. 따라서 이러한 제약 조건을 완화시키기 위해 본 논문에서는 다음과 같은 제어입력을 제안한다.

$$U = - \sum_{i=1}^m (K_i + \Delta K_i) X_i - P S_n (P : \text{const}) \quad (38)$$

여기서  $S_n$ 은 우리가 full order 스위칭 함수  $S_r$ 와 같도록 구성하였기 때문에 (33)식의 고정이득 조건식을 위 제어입력 구성을 고려해 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\lambda_n M_i - M_{i-1} = -(a_i + K_i) - P M_i (i=1, m)$$

$$\begin{aligned} \lambda_n M_{m+1} - M_m &= -(a_{m+1}) - P M_{m+1} \\ &\vdots \\ \lambda_n - M_{n-1} &= -(a_n) - P \end{aligned} \quad (39)$$

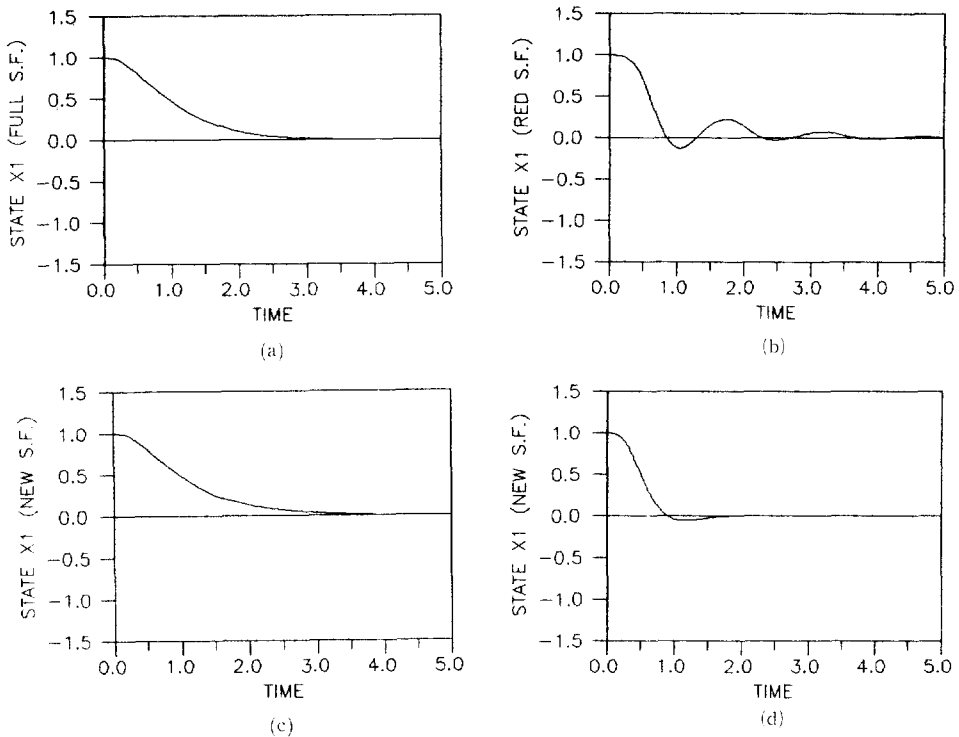
이 경우에 있어서  $\lambda_n$ 은 우리가 임의로 선정할 수 있으며 그 대신에  $P$ 값을 조절해서 위 관계식을 유지시켜줄 수 있다. 이런 잇점을 가진다면 (36)식의 슬라이딩 조건을 만족하게 해주는 가변이득 조건을 다음과 같이 결정할 수 있다.

1)  $\lambda_n < 0$

$$2) \Delta K_i := \begin{cases} \Delta K_i^+ > 0, & \text{만일 } S_n X_i > 0 \\ \Delta K_i^- < 0, & \text{만일 } S_n X_i < 0 \end{cases} \quad (i=1, m) \quad (40)$$

이 조건식이 White의 가변이득 조건식에 비해 이득성분이외의 값들에 대한 제약을 크게 감소시키고 간단함을 알 수 있다.

이상의 서술에서 우리가 고려해야될 사항은 측정불가능한 상태변수가 증가할 수록 새로운 스위칭함수 구성에 있어 미분 차수가 증가하고 고정이득  $K'$ 에 의해 전체 페루프 계통의 특성근속에 슬



**그림 5.1** 가변구조제어를 적용한 3차 표준형 계통에서의 상태  $X_1$ 의 궤적  
 (a) 전상태 스위칭함수 알고리즘(모든상태들이 측정가능)  
 (b) reduced order스위칭함수 알고리즘( $X_3$ 상태가 측정불가능)  
 (c) 새로운 스위칭함수 알고리즘( $X_3$ 상태가 측정불가능)  
 (d) 새로운 스위칭함수 알고리즘( $X_2, X_3$ 상태가 측정불가능)

**Fig. 5.1** The trajectories of state  $X_1$  using variable structure control theory for the control of third order phase canonical form dynamic system  
 (a) Full state switching function algorithm (All states are measurable)  
 (b) Reduced order switching function algorithm (State  $X_3$  is unmeasurable)  
 (c) New switching function algorithm (State  $X_3$  is unmeasurable)  
 (d) New switching function algorithm (States  $X_2, X_3$  are unmeasurable)

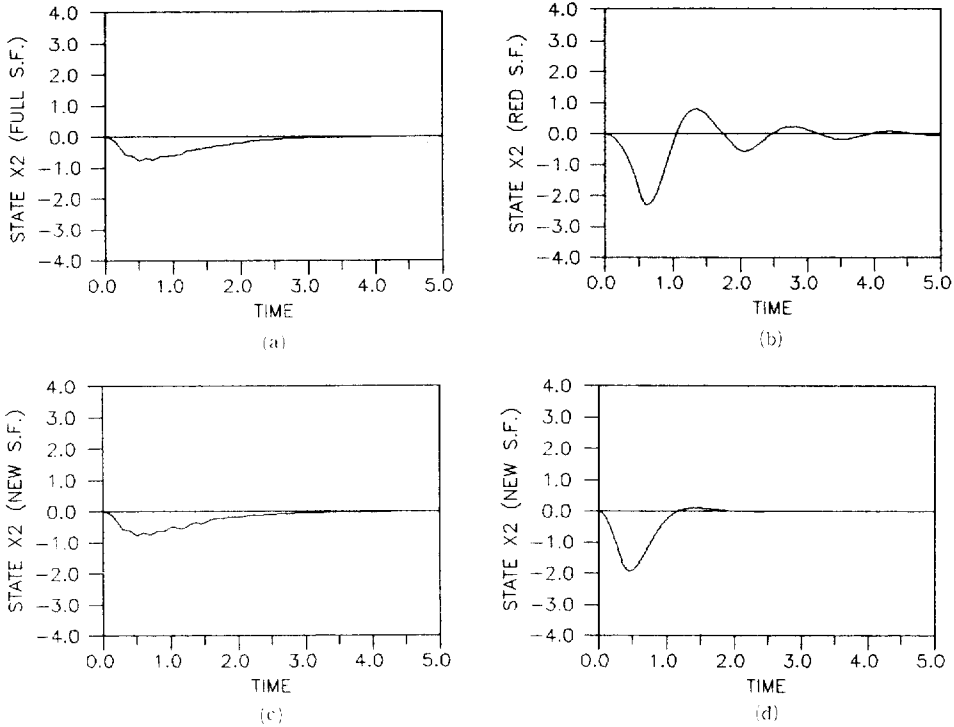


그림 5.2 가변구조제어를 적용한 3차 표준형 계통에서의 상태  $X_2$ 의 궤적

- (a) 전상태 스위칭함수 알고리즘(모든 상태들이 측정가능)
- (b) reduced order스위칭함수 알고리즘( $X_3$ 상태가 측정불가능)
- (c) 새로운 스위칭함수 알고리즘( $X_3$ 상태가 측정불가능)
- (d) 새로운 스위칭함수 알고리즘( $X_2, X_3$ 상태가 측정불가능)

Fig. 5.2 The trajectories of state  $X_2$  using variable structure control theory for the control of third order phase canonical form dynamic system

- (a) Full state switching function algorithm(All states are measurable)
- (b) Reduced order switching function algorithm(State  $X_3$  is unmeasurable)
- (c) New switching function algorithm(State  $X_3$  is unmeasurable)
- (d) New switching function algorithm(States  $X_2, X_3$  are unmeasurable)

라이딩 모드의 특성근  $\lambda_i(i=1, n-1)$ 가 포함되게 해주어야 하는 제약이 실 계통 적용에 어려움을 초래할 수 있다는 것이다. 그러나 본 논문에서 제안한 새로운 스위칭함수 알고리즘은 최소한 White가 제시한 알고리즘의 적용한계를 더 넓일 수 있고 같은 환경에서도 그 제어 결과가 우수함을 다음의 수치예를 통해 입증하고자 한다.

#### 4. 수치예

본 장에서는 제안된 새로운 스위칭함수 구성 알고리즘의 유용성을 보이기 위해 다음과 같은 3차

계통에 대해서 B.A. White의 reduced order스위칭함수 알고리즘과 본 논문의 새로운 스위칭함수 구성 알고리즘 그리고 full order스위칭함수 알고리즘의 시뮬레이션 결과를 비교 도시 하였다.

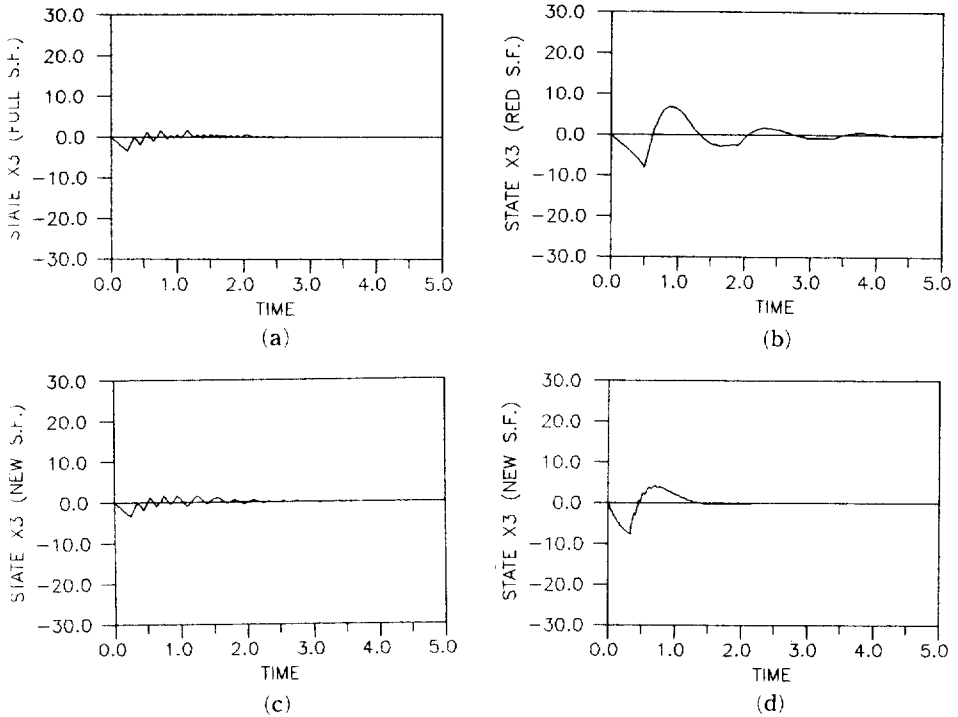
$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} UU$$

$$X(0)^T = [1 \ 0 \ 0]$$

여기서 상태변수  $X_3$ 가 측정불가능하다고 가정한다.

- i) reduced order스위칭함수 알고리즘





**그림 5.3** 가변구조제어를 적용한 3차 표준형 계통에서의 상태  $X_3$ 의 궤적  
 (a) 전상태 스위칭함수 알고리즘(모든상태들이 측정가능)  
 (b) reduced order스위칭함수 알고리즘 ( $X_3$ 상태가 측정불가능)  
 (c) 새로운 스위칭함수 알고리즘( $X_3$ 상태가 측정불가능)  
 (d) 새로운 스위칭함수 알고리즘( $X_2, X_3$ 상태가 측정불가능)

**Fig. 5.3** The trajectories of state  $X_3$  using variable structure control theory for the control of third order phase canonical form dynamic system  
 (a) Full state switching function algorithm(All states are measurable)  
 (b) Reduced order switching function algorithm(State  $X_3$  is unmeasurable)  
 (c) New switching function algorithm (State  $X_3$  is unmeasurable)  
 (d) New switching function algorithm (States  $X_2, X_3$  are unmeasurable)

구성된 reduced order스위칭함수는 다음과 같다.

$$S_r = 0.4226X_1 + X_2$$

고정 입력만을 인가해서 얻어지는 케루프 방정식에  $C'$ 의 null space를 구성하는 특성근이 포함되도록 고정이득을 구하면 다음과 같다.

$$K' = (0.385 \ 0 \ 0)$$

이 때의 케루프 특성근과 range space동특성 방정식은 다음과 같다.

$$\lambda_1 = -0.4226 \quad \lambda_2 = -0.4226 \quad \lambda_3 = -2.154$$

$$\dot{S}_r = (\lambda_3 + \lambda_2)\dot{S}_r - (\lambda_3, \lambda_2)S_r - \Delta K'X$$

가변 이득 성분은 다음조건식이 만족되도록 선택된다.

$$\Delta K' = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ 만일 } S_r X_1 > 0$$

$$\Delta K' = \begin{pmatrix} -100 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ 만일 } S_r X_1 < 0$$

ii) 새로운 스위칭함수 구성 알고리즘  
 먼저 이상적인 full-order스위칭함수를 다음과 같이 구성한다.

$$S_r = M_1x_1 + M_2x_2 + X_3$$

$$= 6X_1 + 5X_2 + X_3 = (D+2)(D+3)[X_1]$$

제안된 제어 입력은 다음과 같다.

$$U = -\sum_{i=1}^2 (K_i + \Delta K_i)X_i - PS_n$$

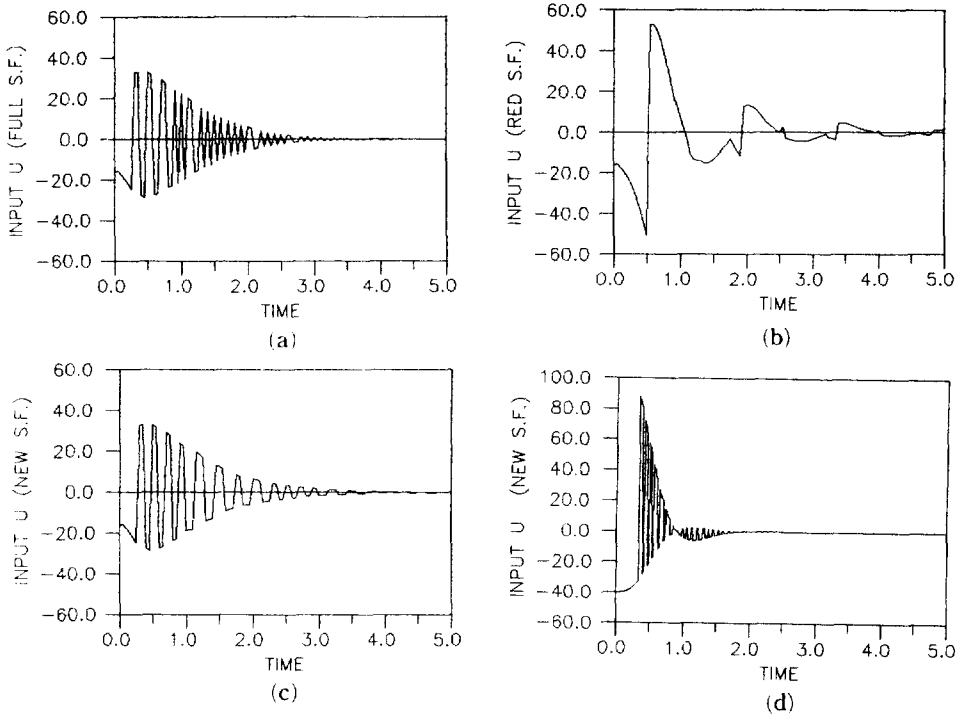


그림 5.4 가변구조제어를 적용한 3차 표준형 계통에서의 입력  $U$ 의 궤적

- (a) 전상태 스위칭함수 알고리즘(모든상태들이 측정가능)
- (b) reduced order스위칭함수 알고리즘( $X_3$ 상태가 측정불가능)
- (c) 새로운 스위칭함수 알고리즘( $X_3$ 상태가 측정불가능)
- (d) 새로운 스위칭함수 알고리즘( $X_2, X_3$ 상태가 측정불가능)

Fig. 5.4 The trajectories of input  $U$  using variable structure control theory for the control of third order phase canonical form dynamic system  
 (a) Full state switching function algorithm (All states are measurable)  
 (b) Reduced order switching function algorithm (State  $X_3$  is unmeasurable)  
 (c) New switching function algorithm (State  $X_3$  is unmeasurable)  
 (d) New switching function algorithm (States  $X_2, X_3$  are unmeasurable)

여기서  $S_r$ 과  $S_r$ 의 미분치를 이용하여 구성되는 새로운 스위칭함수는 다음과 같다.

$$S_r = 2X_1 + X_2$$

$$S_n = 3S_r + \dot{S}_r$$

또한 고정이득  $K_i$ 를 구하기 위해서는 range space 동특성 방정식과 이를 다시 상태식으로 표현한 식이 필요하다.

$$\dot{S}_n = \lambda_n S_n - \sum_{i=1}^2 \Delta K_i X_i$$

$$\dot{X}_3 = \sum_{i=1}^2 (\lambda_n M_i - M_{i-1} - \Delta K_i) X_i + (\lambda_n - M_2) X_3$$

위의 식과 계통 dynamic의  $\dot{X}_3$ 와 관련된 식이 같게 되도록 아래의 관계식을 만족하게 해주는  $K_i$ 와

$P$ 값을 선택하면 된다.

$$(\lambda_n + P) - M_2 = -3 \quad \text{즉 } \lambda_n = -5, P = 7$$

$$(\lambda_n + P)M_2 - M_1 = -(2 + K_2) \quad \text{즉 } K_2 = -6$$

$$(\lambda_n + P)M_1 = -(0 + K_1) \quad \text{즉 } K_1 = -12$$

그리고 가변이득  $\Delta K_i$ 는 슬라이딩 조건을 만족하도록 (40)식에 따라 다음과 같이 선택 한다.

$$S_n X_1 > 0 \quad \text{일때 } \Delta K_1 = 30 > 0$$

$$S_n X_2 > 0 \quad \text{일때 } \Delta K_2 = 30 > 0$$

$$S_n X_1 < 0 \quad \text{일때 } \Delta K_1 = -30 < 0$$

$$S_n X_2 < 0 \quad \text{일때 } \Delta K_2 = -30 < 0$$

만일 상태  $X_2, X_3$ 가 측정 불가능하다고 하면, 이

때의 새로운 스위칭함수와 제어 이득들은 다음과 같이 선정된다.

$$\begin{aligned} S_f &= 20X_1 + 6X_2 + X_3 \\ S_r &= X_1 \\ S_n &= 20S_r + 6\dot{S}_r + \ddot{S}_r \\ (\lambda_n + P)M_2 - M_3 &= -3 \quad \text{즉 } \lambda_n = -5, P = 8 \\ (\lambda_n + P)M_2 - M_1 &= -(2) \\ (\lambda_n + P)M_1 &= -(0 + K_1) \quad \text{즉 } K_1 = -60 \end{aligned}$$

또한 가변이득  $\Delta K_i$ 는 (34)식에 의해 다음과 같이 선택된다.

$$\begin{aligned} S_n X_1 > 0 \quad \text{일때 } \Delta K_1 &= 30 > 0 \\ S_n X_1 < 0 \quad \text{일때 } \Delta K_1 &= -30 < 0 \end{aligned}$$

이 세가지 경우에 대한 시뮬레이션 결과를 고전적인 전상태 스위칭함수를 사용한 결과와 비교한 그림이 그림 5.1~그림 5.4이다. 이 그림에서 알 수 있듯이 reduced order스위칭함수 알고리즘에 의한 결과가 그 알고리즘의 제한성인 준 슬라이딩 모드의 발생과 두개의 상태변수를 이용할 수 없을 때 사용할 수 없고 페루프 특성근을 임의로 선택할 수 없는 것으로 인하여 응답특성의 부실과 실제사용에 있어서의 부적절함을 보여준다.  $X_3$ 상태가 측정 불가능한 경우 제안된 알고리즘에 의한 결과는 이 알고리즘에 의한 슬라이딩 모드 특성근과 같은 특성근을 갖도록 설계한 전상태 스위칭함수 알고리즘과 거의 같은 결과를 보여준다. 하지만  $X_2, X_3$ 상태들이 측정불가능한 경우 사용된 제안된 알고리즘에 있어서는 그 스위칭함수 선택에 있어서 (29)식과 같은 제한이 있기 때문에 특성근을 임의로 선택할 수 없다는 단점이 있다.

## 6. 결 론

본 논문은 가변구조제어(variable structure control, VSC)이론의 적용에 있어 제약이 되는 모든 상태변수들에 대한 가용성 문제를 개선하는데 그 목적을 두었다. 이를 위해 측정불가능한 상태변수들이 존재하는 경우 제동에 적용할 수 있는 새로운 스위칭함수 구성법을 제안 하였으며, 또한 White에 의해 제안된 제어입력 보다 훨씬 완화된 제약 조건을 가지는 새로운 제어 입력을 구성하였다. 본 논문에서 제안된 알고리즘의 유효성을 입

증하기 위해 reduced-order스위칭함수 알고리즘과 비교한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 측정가능한 상태들로 만 이루어진 reduced-order스위칭함수와 그의 미분치로 구성되는 새로운 스위칭함수 구성법을 제안해 full-order스위칭함수를 이용한 경우와 동일한 제어 효과를 얻을 수 있다.
- (2) 표준형계통에서 reduced-order스위칭함수에 의해 발생하는 여러가지 제약과 나쁜 특성들이 본 논문에서 제안한 알고리즘에 의해 효과적으로 제거됨을 시뮬레이션 결과로 알 수 있다.
- (3) 이전의 가변구조제어이론에 있어서 모든 상태들을 알아야 하고 모를 시에는 관측기를 사용해야하는 제약이 있었으나 이제 이 새로운 스위칭함수 구성법에 의해 그 제약을 생감시킬 수 있었다.

그러나, 측정불가능한 상태변수들의 수가 비교적 많은 경우 가변구조 제어기를 실현하기 위해서는 제어 입력 결정에 있어서 앞으로 많은 연구가 진행되어야 하며 미분기 사용에 있어 인가될 수 있는 급격한 외란에 대한 대비책으로 필터링 이론에 대한 연구가 수행되어야 하겠다.

## 참 고 문 헌

- [1] B.A. White: "Reduced-order switching functions in variable structure control systems," IEE proc PT D, Vol. 130, No. 2, pp. 33~39, MARCH 1985
- [2] "Analysis of variable structure systems with sliding modes," NORMAN E. GOVGH, ZIAD. M. ISMAIL and ROBERT E. KING
- [3] UTKIN, V.I.: "Sliding modes and their application in variable structure systems," (MIR, MOSCOW, 1978)
- [4] ITIKIS, U.: "Control system of variable structure," (John Wiley, 1976)
- [5] Brain D.O. Anderson & Jhno B. Moore, Linear Optimal Control, Prentice-Hall
- [6] B.A. White: "Reachability in variable structure control systems," IEE proc, Vol. 131, Pt D, No. 3, MAY 1984
- [7] B.A. White: "Reduced-order variable structure control of an lateral motion of an aircraft," 1986 IEEE