

측정 불가능한 상태변수를 갖는 일반적인 단일 입력 계통에 대한 가변구조 제어기의 설계

A Design of Variable Structure Controller for the General Single Input Systems with Unmeasurable State Variables

朴 貴 泰* · 崔 重 暻**
(Gwi-Tae Park · Jung-Keyng Choi)

Abstract - There have been several control schemes for the single input systems with unmeasurable state variables using variable structure control(VSC) theory. However, each of them is a study on the systems which can be represented in the phase canonical form or non-phase canonical form dynamic equation separately. As these control algorithms have difficulties in practical application by its theoretical limitations, in this paper we propose a new VSC theory which overcomes those limitations of proposed schemes.

This new control scheme can be realized for the general linear systems which have unmeasurable state variables. And the switching function of this VSS algorithm consists of measurable state variable function(reduced-order switching function) and its derivatives. Also in the construction of control input only measurable state variables are used.

Key Words : Reduced Order Switching Function(감소차수 스위칭 함수), Variable Structure Control(가변구조 제어), Non-phase Canonical Form(비표준형)

*正 會 員 : 高麗大 工大 電氣工學科 教授·E博
 서울대 ERC AIC 研究委員
**正 會 員 : 高麗大 大學院 電氣工學科 博士課程
接受日字 : 1992年 2月 10日
1次修正 : 1992年 6月 9日
2次修正 : 1992年 6月 30日

1. 서 론

초기의 가변구조 제어이론 연구에서의 그 적용 범위는 표준형으로 표현되는 계통과 모든 상태들이 측정가능하다는 가정하에 있는 계통의 제어에

국화되었다. [1] 이러한 가정들은 가변구조 제어이론을 일반적으로 적용시키는데 있어서 큰 제약으로 작용하였지만 이후 일반적인 가변구조제어의 접근방법으로서 표준형이 아닌 일반적인 계통 표현식에 대해서도 적용되는 제어이론들이 제기되었다. [2]

그러나 가변구조 제어의 적용에 있어 모든상태변수들에 대한 가용성 문제는 꾸준히 제기되어온 문제점이었고 계통의 제어에 있어 일부 상태변수들을 모를 경우나 모든 상태변수들을 안다고 하더라도 이를 위해 과다한 경비가 요구되는 경우가 있어 해결해야할 중요한 문제점이었다. 이러한 제한성을 제거하기 위해 여러 알고리즘들이 제안되었지만 이들 알고리즘 자체도 매우 엄격한 내부제한성을 갖고 있기 때문에 실제 적용에 있어서 어려움이 많았는데 특히 B.A. White가 제안한 reduced-order 스위칭함수 알고리즘[3]은 계통 표현식이 표준형이 아닌 경우와 둘 이상의 상태변수들을 모를시에는 적용할 수 없었으며 그 제어효과가 모든 상태변수들을 아는 경우의 가변구조 제어결과에 비해 떨어졌다. 그후 제안된 Ismail의 알고리즘[4]은 표준형이 아닌 계통에 적용되는 알고리즘이었지만 상태변수의 가용성 문제를 제어입력구성시에만 고려하여 제안되었기 때문에 스위칭함수 구성에 있어서는 문제점이 남아 있었다.

이에 본 논문에서는 표준형 및 비표준형 모두에서 사용할 수 있고 가변구조 제어이론 고유의 특성을 그대로 유지시켜 주며, 계통이 갖고 있는 측정불가능한 상태수에 대한 제한을 줄일 수 있는 새로운 스위칭함수 구성법을 제안한다. 이 구성법에 의한 스위칭함수는 측정가능한 상태들로 이루어진 reduced-order 스위칭함수 S ,과 그의 비분치로 구성되어진다.

2장에서는 비표준형 계통에 대한 가변구조 제어이론에 대해 설명하고 그 장점들을 열거했으며, 더불어 Ismail에 의해 제안된 상태 가용성에 관한 알고리즘의 문제점들을 살펴보았다. 3장에서는 이러한 문제점을 해결하기 위한 새로운 가변구조 제어 알고리즘에 대해 서술하였고 4장에서는 3차의 수치 계통에 대해 본 논문에서 제안한 알고리즘을 적용한 시뮬레이션 결과를 분석하였다.

2. 비표준형계통에 대한 가변구조이론의 적용

2.1 기본이론

가변구조 제어이론은 어떤 특정한 슬라이딩 초평면을 정하고 이에 대한 상태공간에서의 상태벡터 위치에 따라 과도과정중에 의도적으로 불연속적인 입력을 가해 계통의 구조를 바꾸어 주어 상태벡터가 빠른 속도로 이 슬라이딩 초평면을 따라 원점으로 향하게 해줌으로써 여러가지 좋은 특성을 얻는 것으로 전통적 제어이론과 다르다.

이 이론이 적용되는 계통을 보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + bU \\ b' &= [0, 0, 0, \dots, 0, 1] \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 $X(\in R^n)$ 는 상태벡터이고, $A(\in R^{n \times n})$ 및 $b(\in R^{n \times 1})$ 는 계통행렬이며 $U(\in R)$ 는 제어입력으로 가변구조 제어에서는 다음과 같이 정의된다.

$$U = -(K' + \Delta K')X \quad (2)$$

가변 이득성분인 $\Delta K'(\in R^{1 \times n})$ 는 가변구조 제어 계통의 설계시 미리 정해진 조건에 따라 변화되는 가변이득이며 $K'(\in R^{1 \times n})$ 는 우리가 (3)식으로 정의한 스위칭 초평면상에 상태체적들이 머물고 있을 때의 입력 이득성분이다.

$$\begin{aligned} S(x) &= C'X = 0, \quad C' = [C_1, C_2, \dots, C_{n-1}, 1] \quad (3) \\ \dot{S} &< 0 \quad (4) \end{aligned}$$

(4)식은 가변구조 제어계에서 슬라이딩 모드를 발생시키는 슬라이딩 조건식이다.

(1), (2), (3)식과 (4)식에 의해 슬라이딩 조건을 다시 표현하면 다음과 같다.

$$\dot{S}S = C'[AX - b(K + \Delta K)'X]S < 0 \quad (5)$$

그리고 이 조건을 만족시키기 위한 이득성분들은 다음의 (6)식에 의해 표현되어진다.

$$\begin{aligned} K' &= (C'b)^{-1}C'A \\ \Delta K'_i &= \begin{cases} \alpha_i > 0 & \begin{cases} SX_i > 0 \text{이고 } C'b > 0 \text{일때} \\ SX_i < 0 \text{이고 } C'b < 0 \text{일때} \end{cases} \\ \beta_i < 0 & \begin{cases} SX_i < 0 \text{이고 } C'b > 0 \text{일때} \\ SX_i > 0 \text{이고 } C'b < 0 \text{일때} \end{cases} \end{cases} \quad (6) \\ (\alpha_i, \beta_i) &: \text{상수} \end{aligned}$$

그러므로 우리는 상태공간에서 $S(x)=0$ 이라는 초평면을 설정하고 상태벡터가 이 초평면을 향하게 하는 조건인 $S(x) \cdot \dot{S}(x) < 0$ 을 $S < 0, S > 0$ 인 부분 모두에서 만족시켜 주게하기 위해 상태벡터가 이 초평면을 가로지를 때마다 계통의 구조를 바꾸어 주었다. $S(x)$ 는 상태 공간상의 초평면으로 상태공간의 원점을 지나며 그 C' 값들은 다음과 같이 계통의 상태들이 이상적인 슬라이딩 모드에 있을 때의 케루프 특성 방정식이 안정하도록 선택한다.

$$\dot{X}=[A-b(C'b)^{-1}C'A]X \quad (7)$$

위의 슬라이딩 모드에 상태벡터가 존재하게 되면 궁극적으로 계통의 운동을 (7)식이 지배하게 되므로 계통의 차수가 하나 줄어 들고 여러가지 중요한 특성 즉 응답에 대한 적응성과 계통의 미지의 파라미터 변동 및 외란에 대한 둔감성 그리고 물리적 실현의 간편성을 얻을 수 있다. [4] 그렇지만 이 가변구조제어에 있어 모든 상태변수들을 알아야 하는 상태변수들에 대한 가용성 문제가 존재하게 된다. 그러므로 본 논문에서는 이 문제에 대해서 중점적으로 다루기로 하겠다.

2.2 상태 가용성을 고려한 가변구조 제어

이전의 연구들은 대부분 계통의 모든 상태변수들에 대한 정보를 알고 있을 때 가변 구조 제어이론을 적용하는 방법에 관한 것이었다. 하지만 이 장에서는 조금 더 일반적인 접근방법으로써 Ismail이 제안한 방법을 이용하여 다음과 같은 불확실성을 갖는 비표준형 계통에 대해 측정가능한 상태변수들의 수에 따라 모든 상태 또는 어떤 상태들만 스위칭 해주고 안전한 슬라이딩 모드를 실현시키는 것을 보이고자 한다.

실제적인 수학적 모델에 대한 이론 전개를 위해 다음과 같은 단일입력 계통에 대해 고찰해 보자.

$$\dot{X}=[A+\Delta A(t)]X+[b+\Delta b(t)]U+fv \quad (8)$$

$$U=-(K'+\Delta K')X-\Delta K_f \quad (9)$$

$$b'=[00\cdots 01] \quad (10)$$

여기서 $X(\in R^n)$ 는 상태벡터이고, $A(\in R^{n \times n})$ 및 $b(\in R^{n \times 1})$ 는 계통의 공칭 (nominal) 행렬이며 파라미터 변동은 $\Delta A(t)$ 와 $\Delta b(t)$ 로 표현되고 $v(\in R)$ 는 외란을 나타낸다. $U(\in R)$ 는 제어입력으로 고정이득 $K'(\in R^{1 \times n})$ 와 가변이득 $\Delta K'(\in R^{1 \times n})$ 및 ΔK_f 를 갖는다. (2.7) 식으로 표현되는 계통에 대해, 슬라이딩 모드 제어이론을 적용하기 위해서는 다음과 같은 가정이 필요하다.

가정1 정합조건 (matching condition)

다음의 관계식을 만족하는 행렬함수 $T(t) \in R^{1 \times n}$, $D(t) \in R^{1 \times n}$ 와 행렬 H 가 존재한다.

$$\begin{aligned} (i) \quad & \Delta A(t) = bT(t) \\ & \Delta b(t) = bD(t) \\ & f = bH \end{aligned}$$

그리고 다음과 같이 정의되는 행렬 $E(t, X, U, v)$ 에 대해 (ii)의 조건을 만족하는 양의 연속함수 $\rho(t, X)$ 가 존재한다.

$$\begin{aligned} E(t, X, U, v) &= T(t)X + D(t)U + Hv \\ (ii) \quad \|E(t, X, U, v)\| &\leq \rho(t, X) \end{aligned}$$

가정1은 계통의 불확실성이 입력이 인가되는 채널에 존재하고 그 경계치를 안다는 조건과 같다. 즉 가변구조 제어는 이러한 정합조건을 만족하는 파라미터 변동 및 외란에 대해서 둔감한 특성을 보장할 수 있다.

먼저 비표준형 계통에 가변구조 제어이론을 적용하는 방법중 모든 상태들이 측정가능할 때 전 상태 변수들을 스위칭하는 방법을 기술한다.

2.2.1 전상태 스위칭의 경우

먼저 다음과 같은 스칼라인 스위칭함수 S 와 Lyapunov 함수 V 를 정의한다.

$$S = C'X \quad (11)$$

$$V = (1/2)S(x)S(x) \quad (12)$$

$$\dot{V} = \dot{S}(x)S(x) < 0 \quad (13)$$

(13)식을 만족시켜 준다는 것은 가변구조 제어이론에서 슬라이딩모드 존재조건과 hitting조건을 만족시켜주는 것이 되며 이때 C' 의 선정은 기본이론에서 살펴본 바와 같이 이상적인 슬라이딩 모드 dynamic의 안정도를 고려해서 선정할 것이다. [4] 그리고 (13)식은 또 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{S}(x) &= C'\dot{X} = C'[A - b(K' + \Delta K')]X \\ &\quad + C'b[E(t, X, U, v) - \Delta K_f] \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= C'[A - b(K' + \Delta K')]S(x)X \\ &\quad + C'b[E(t, X, U, v) - \Delta K_f]S(x) \end{aligned} \quad (15)$$

이 \dot{V} 값이 negative definite가 되기 위한 입력이득의 조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} P &= [1/(C'b)]C'A \quad (\in R^{n \times 1}) \\ K_i &= P_i \end{aligned} \quad (16)$$

$$\Delta K_i = \begin{cases} \Delta K_i^+ > 0 \text{ 만약 } SX_i > 0 \\ \Delta K_i^- < 0 \text{ 만약 } SX_i < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Delta K_f &= \begin{cases} \Delta K_f^+ > \max|\rho(t, X)| \text{ 만약 } S > 0 \\ \Delta K_f^- < -\max|\rho(t, X)| \text{ 만약 } S < 0 \end{cases} \\ &\quad (\text{단, } C'b > 0) \end{aligned} \quad (17)$$

그리고 슬라이딩모드의 안정도를 살펴보기 위해서 우리는 이상적인 슬라이딩 모드에 있을때의 제어 입력인 등가 입력과 스위칭평면식인 (19), (18)식을 원 동태 방정식에 대입하여 얻어진 (20)식과

같은 비포준형 계통에서의 슬라이딩 모드를 나타내는 페루프 방정식을 고찰한다.

$$X_n = - \sum_{i=1}^{n-1} C_i X_i \tag{18}$$

$$U_{eq} = -K'X = - \sum_{i=1}^{n-1} K_i X_i + K_n \sum_{i=1}^{n-1} C_i X_i \tag{19}$$

$$\dot{X}_i = \sum_{j=1}^{n-1} (a_{ij} - a_{in} C_j) X_j + b_i \sum_{j=1}^{n-1} (P_n C_j - P_j) X_j$$

(a_{ij} : A 행렬의 각 요소)($i=1, n-1$) (20)

이 (20)식 계통의 eigenvalue가 음의 실수부를 가지면 이 슬라이딩모드는 안정하게 된다.

2.2.2 reduced switching인 경우

실계통에서는 모든 상태를 전부를 측정할 수 없을 때가 발생할 수 있고 또 모든 상태 변수들이 측정가능하다라도 그 측정에 있어 큰 부담이 생긴다면 우리는 다음과 같이 제어입력의 이득중 몇몇 이득을 제거하고도 안정한 가변구조 제어계를 얻는 방법을 고찰해 볼 필요성이 있다. 여기서는 m 개의 상태변수들만 스위칭 된다고 가정하자. 이때의 입력 이득성분과 \dot{V} 는 다음과 같다.

$$(K + \Delta K)' = [\Delta K_1 + K_1, \dots, \Delta K_m + K_m, 0, \dots, 0] \tag{21}$$

$$\dot{S}(x) = \sum_{i=1}^n C_i \dot{X}_i \tag{22}$$

$$= \sum_{i=1}^n C_i \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j - \sum_{i=1}^n C_i b_i \sum_{j=1}^m (\Delta K_j + K_j) X_j + C' b [E(t, X, U, v) - \Delta K_j]$$

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^m [\sum_{j=1}^n C_i a_{ij} - C_j \sum_{i=1}^n C_i a_{in}] X_j - (\Delta K_j + K_j) \tag{23}$$

$$\cdot \sum_{i=1}^n C_i b_i S(x) X_j + \sum_{j=m+1}^n (\sum_{i=1}^n C_i a_{ij} - C_j \sum_{i=1}^n C_i a_{in}) S(x) X_j + \sum_{i=1}^n C_i a_{in} S(x) S(x) + C' b [E(t, X, U, v) - \Delta K_j] S(x)$$

그러므로 \dot{V} 가 위의 경우에도 negative definite가 되기 위해서는 다음 (24)식의 조건들이 필요하게 된다.

- (i) $\sum_{i=1}^n C_i a_{in} < 0$
- (ii) $R_j = 0 (j=m+1, n-1)$
 $(R_j = \sum_{i=1}^n C_i a_{ij} - C_j \sum_{i=1}^n C_i a_{in})$
 $K_j = R_j / (C' b) (j=1, m)$

- (iii) $S(x)X_i > 0$ 이면 $\Delta K_j' > 0$
 $S(x)X_i < 0$ 이면 $\Delta K_j' < 0$
 $S(x) > 0$ 이면 $\Delta K_j' > \max |\rho(t, X)|$
 $S(x) < 0$ 이면 $\Delta K_j' < -\max |\rho(t, X)|$
 $(j=1, m; \text{단, } C' b > 0)$ (24)

이상에서 서술한 것은 전상태(full-order) 스위칭 함수를 가지고서 모든상태들 또는 몇몇 상태들만을 제어입력에 포함시키고 가변구조 제어이론을 전개해 나간 것이다. 하지만 실제로 우리가 측정 불가능한 상태들을 가질 때는 제어입력에서 뿐만 아니라 스위칭함수 구성에서도 역시 이 모르는 상태변수들을 제거해 주어야 한다.

3. 새로운 스위칭함수의 구성

먼저 3장에서 서술한 Ismail의 알고리즘을 살펴 보면, 측정불가능한 상태변수들로 인하여 제어입력 구성에 있어 그 상태변수들을 사용하지 않았지만 스위칭함수 구성에 있어서는 그 미지의 상태변수들을 사용했기 때문에 완전한 알고리즘이라 할 수 없다. 그 보완적 방법으로 이 미지의 상태변수들을 빼고 스위칭함수를 구성하게 되면 지금까지 전개한 가변구조이론들을 사용할 수 없게 된다. 이에 새로운 스위칭함수 구성법을 본장에서 제안하여 전상태 스위칭함수의 정보를 측정가능한 값만으로 얻어내고 제어 입력구성에 있어서도 이 가능한 상태들만을 이용 하겠다.

그럼 이제 우리가 얻어야 할 목표는 측정가능한 상태들로 부터 모르는 상태변수들이 포함된 전상태 스위칭함수의 정보를 얻어내야 하는 것이다. 이를 위해서는 관측기를 이용하는 방법이 있지만 그 관측기의 차수가 측정불가능한 상태변수의 수 만큼 되야하고 복잡한 계산이 필요하게 된다. 또 파라미터 변동 및 외란이 존재할 때 그 기대효과가 줄어드는 이유로 우리는 저차의 미분기를 이용하는 방법을 제시하겠다. 이 제안된 방법은 다음과 같은 m 개의 측정가능한 상태들의 선형결합으로 이루어진 reduced order 스위칭함수와 그의 미분치로 구성되는 새로운 스위칭함수가 3장의 이론들을 이용하여 얻어진 전상태 스위칭함수와 같은 값이 되도록 설계하는 것이다.

$$S_r(X) = \sum_{i=1}^m G_i X_i,$$

$$G' = [G_1, G_2, \dots, G_m, 0, \dots, 0] \tag{25}$$

이때 새로운 스위칭함수 형태와 전상태 스위칭함수는 다음과 같이 가정된다.

$$S_n = H_1 S_r(x) + H_2 S_r^{(1)}(x) + \dots + H_p S_r^{(p-1)}(x) + \sum_{i=1}^m H_{i+p} X_i \quad (26)$$

$$F(x) = \sum_{j=1}^m M_j X_j \quad (27)$$

이 (26)식의 새로운 스위칭함수가 전상태 스위칭함수 F 와 같은 값을 갖도록 하기 위해 다음의 결정사항이 필요하게 된다.

첫번째로는 측정불가능한 상태변수들의 정보가 모두 이 S_r 의 구성속에 포함되게 하기 위해서 S_r 의 몇차 미분항까지 이용할 것인가를 결정해야 하는 것이다. (29)식과 같이 reduced order 스위칭함수가 측정가능한 상태들 즉 (28)식의 출력상태들의 선형결합으로 이루어져 있기 때문에 우리가 이 reduced order 스위칭함수의 몇차 미분치 까지를 스위칭함수 구성에 포함시켜야 전상태 스위칭함수의 정보를 얻을 수 있는가를 결정하기 위해서는 다음 (30)식과 같이 각 row 벡터가 출력과 그의 미분치들을 상태변수들의 선형결합으로 표현하는 가관측 (observability) 행렬을 살펴볼 필요가 있다. 이 가관측 행렬이 가관측 하다면 출력과 그의 미분치들로 부터 상태변수들의 정보를 얻어낼 수 있다는 것이고 이는 다시 (30)식의 행렬이 full rank가 되어 역행렬이 존재한다는 것과 같은 말이다. 여기서 full rank가 되게하는 가관측 지수 P 가 결정되면 모든 상태변수들을 알기 위해서는 출력의 몇차 미분치까지 구해야 하는가를 알 수 있다 [5].

$$Y = hX(\epsilon R^{m \times 1}) \quad (28)$$

$$h = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1_m & 0 \end{bmatrix} (\epsilon R^{m \times n})$$

$$S_r(x) = G'hX, \quad (29)$$

$$G' = [G_1, G_2, \dots, G_m] \quad (29)$$

$$Q = [h \ hA \ \dots \ hA^{p-1}]' \quad (30)$$

그러므로 $P-1$ 이 전상태 스위칭함수 $F(x)$ 의 정보를 알기위하여 새로운 스위칭함수 구성에 포함시켜야 하는 S_r 의 미분차수가 된다.

그리고 두번째로는 이 새로이 구성된 스위칭함수가 전상태 스위칭함수와 같은 값을 갖도록 하기 위해서 그 구성 계수 H_i, G_j 의 값을 적절히 결정 해주어야 한다. 이런 선택을 위한 방법으로 다음과 같이 S_r 의 일차 미분치속에 모르는 상태변수들이 모두 포함된 경우에 있어서의 구성계수 선택

절차를 소개한다.

$$S_n(x) = H_1 S_r(x) + H_2 \dot{S}_r(x) + H_{i-2} X_i (i=1, m) \quad (31)$$

$$S_n(x) = H_1 \sum_{i=1}^m G_i X_i + H_2 \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^m G_j a_{ji} \right) X_i + \sum_{i=1}^m H_{i+2} X_i = \sum_{i=1}^m \left[H_i G_i + H_2 \sum_{j=1}^m G_j a_{ji} + H_{i-2} \right] X_i + \sum_{i=m+1}^n \left(H_2 \sum_{j=1}^m G_j a_{ji} \right) X_i \quad (32)$$

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= H_1 G_1 + H_2 \sum_{j=1}^m G_j a_{j1} - H_3 \\ M_2 &= H_1 G_2 + H_2 \sum_{j=1}^m G_j a_{j2} + H_4 \\ &\vdots \\ M_m &= H_1 G_m + H_2 \sum_{j=1}^m G_j a_{jm} + H_{m+2} \\ M_{m+1} &= H_2 \sum_{j=1}^m G_j a_{j,m+1} \\ &\vdots \\ M_n &= H_2 \sum_{j=1}^m G_j a_{jn} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

위 (33)식을 만족시키는 $H_i (i=1, m+2), G_j (j=1, m)$ 값을 선택하면 새로운 스위칭함수 S_n 와 전상태 스위칭함수 F 값이 일치하게 된다. 그러나 파라미터 변동 및 외란이 존재하는 계통에 대해서 제안된 스위칭 함수 구성 방법을 이용하여 가변구조 제어를 실행할 때 스위칭 함수 구성에 포함된 미분치의 차수가 이차 이상이 되면 스위칭 함수에 외란 및 파라미터 변동이 포함될 수 있으므로 이런 상황에 대해서는 안정한 제어계를 얻을 수 없는 경우가 발생할 수 있다. 그러므로 파라미터 변동 및 외란이 존재하는 계통에 대해서 제안된 방법은 제한성을 갖는다.

3차 수치계통과 4차 load frequency controller 계통에 대한 제안된 알고리즘에 의한 시뮬레이션 결과를 다음장에서 보이겠다.

4. 시뮬레이션 결과

이 장에서는 3차 수치 계통에 대해 제안된 가변구조 제어 방법 및 그외의 방법에 의한 시뮬레이션 결과를 소개한다. 특히 시뮬레이션은 파라미터 변동 및 외란이 존재하는 경우와 존재하지 않는 경우에 대해 나누어서 수행하였다.

4.1 3차 비표준형 수치 계통에 대한 시뮬레이션 결과

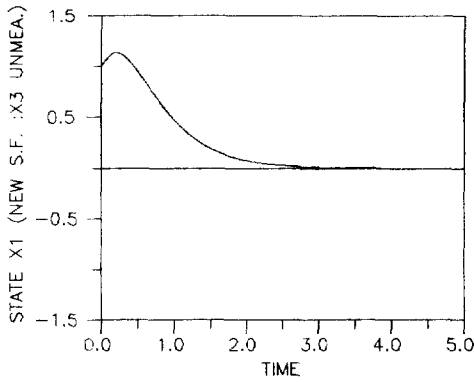
다음과 같은 3차 수치 계통에 대해 VSSC를 위한 스위칭함수를 결정하고 슬라이딩 모드를 만들어 주기 위한 이득조건을 구해보자.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1+2\cos 10t & 0 & -4+4\sin 10t \end{bmatrix}$$

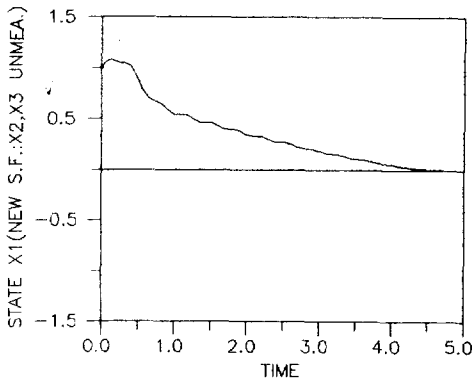
$$b = f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v = \cos 8t$$

$$X_i(0) = [1 \ 0 \ 0]$$



(a)



(b)

그림 5.1 3차 비표준형 계통에서의 제안된 방법에 의한 상태 X_1 의 궤적

- (a) X_3 상태 측정 불가능
- (b) X_2, X_3 상태 측정 불가능

Fig. 5.1 The trajectory of X_1 by the proposed method in the case of third order non-canonical form dynamic system

- (a) X_3 state unmeasurable
- (b) X_2, X_3 state unmeasurable

$$U = - \sum_{i=1}^m (K_i + \Delta K_i) X_i - \Delta K_r$$

먼저 파라미터 변동과 외란이 존재하지 않는 공칭 계통에 대해서 고찰한다. 입력구성에서 나타나는 m 값은 측정가능한 상태변수의 수를 나타낸다. x_3 상태가 측정 불가능하다면 $m = n - 1 = 2$ 이므로 (24)식에서 다음의 식이 만족되어야 한다.

$$\sum_{i=1}^3 M_i a_{i3} = 0$$

윗식에서 $M_2 = 4/3$ 그리고 M_1 은 임의로 선택할 수 있다. (20)식과 같이 reduced 계통을 구한 다음 그 계통의 안정도를 고려하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 3M_1 & \lambda + 2 + M_2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + (1 + M_2)\lambda - M_2 + 3M_1 - 2$$

이 계통이 안정하기 위해서는 $M_2 = 4/3$ 일때 $M_1 > 2$ 이어야 한다. $M_1 = 4$ 로 하면 우리가 얻고자 하는 안정한 스위칭 함수는 다음과 같다.

$$F(x) = 4X_1 + 4/3X_2 + X_3$$

출력상태가 X_1, X_2 이므로 위의 계통의 가관측 지수가 2가 되고 측정가능한 상태변수의 선형결합으로 이루어진 S_r 의 일차 미분항 까지만 고려하면 된다. 즉 A 행렬의 첫째와 둘째 행벡터의 요소를 살펴보면 모르는 X_3 에 관련된 요소가 A 의 두번째 행벡터에 포함되어있으므로 F 값을 새로운 스위칭 함수 구성법으로 갖게 얻기 위해서는 다음과 같은 함수들이 필요하다.

$$S_r(x) = G_1 X_1 + G_2 X_2$$

$$\dot{S}_r(x) = G_1 \dot{X}_1 + (G_1 - 2G_2) \dot{X}_2 + 3G_2 \dot{X}_3$$

$$S_n = H_1 S_r(x) + H_2 \dot{S}_r(x)$$

$$= (H_1 G_1 + H_2 G_1) X_1 + (H_1 G_2 + H_2 G_1 - 2H_2 G_2) X_2 + 3H_2 G_2 X_3$$

윗식에서 $H_2 = 1/3, G_2 = 1, H_1 + (G_1 - 2)/3 = 4/3, H_1 G_1 + G_1/3 = 4$ 로 놓고 $H_1 = 1, G_1 = 3$ 으로 선택해 먼저 구한 안정한 $F(x)$ 값과 S_n 값을 똑같이 맞추어 줄 수 있다.

그리고 슬라이딩 조건을 만족하는 가변이득과 고정이득을 3장의 (24)조건식을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$S_n X_1 > 0 \text{ 일때 } K_1 = 5, \Delta K_1 = 20 > 0$$

$$S_n X_1 < 0 \text{ 일때 } K_1 = 5, \Delta K_1 = -20 < 0$$

$$S_n X_2 > 0 \text{ 일때 } K_2 = 4/3, \Delta K_2 = 15 > 0$$

$$S_n X_2 < 0 \text{ 일때 } K_2 = 4/3, \Delta K_2 = -25 < 0$$

이 결과를 그림 5.1 ($i=1, 5$)에 도시하였다.

파라미터 변동 및 외란을 고려할 때의 새로운 스위칭 함수 구성은 이전과 같고 슬라이딩 모드 조건을 만족시키기 위한 제어 입력 구성은 ΔK_f 가 포함되게 하며 $\Delta K_1, \Delta K_2$ 값을 좀더 큰 값으로 선택하여 고이득 제어를 행한다. 이 때의 각 이득의 선택은 다음과 같다.

$$S_n X_1 > 0 \text{ 일때 } K_1 = 5, \Delta K_1 = 20 > 0$$

$$S_n X_1 < 0 \text{ 일때 } K_1 = 5, \Delta K_1 = -20 < 0$$

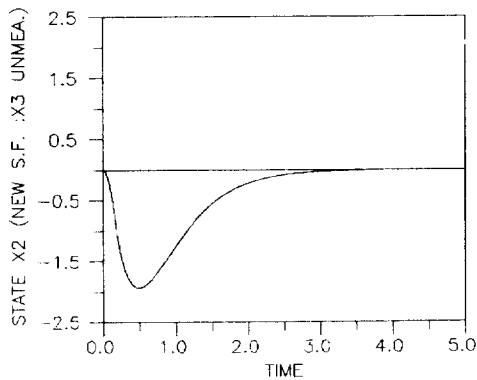
$$S_n X_2 > 0 \text{ 일때 } K_2 = 4/3, \Delta K_2 = 15 > 0$$

$$S_n X_2 < 0 \text{ 일때 } K_2 = 4/3, \Delta K_2 = -25 < 0$$

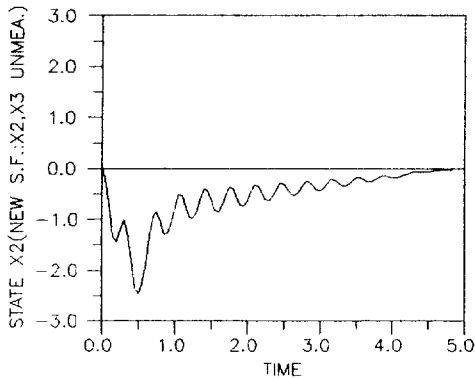
$$S_n > 0 \text{ 일때, } \Delta K_f = 20 > 0$$

$$S_n < 0 \text{ 일때, } \Delta K_f = -2 < 0$$

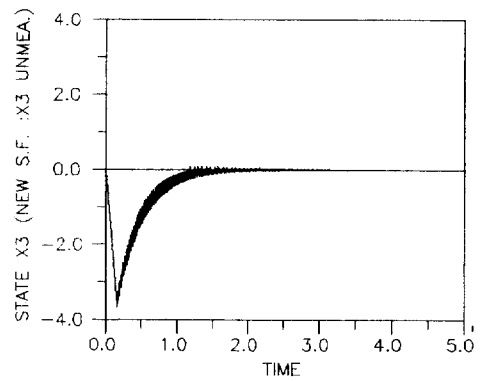
이 경우의 시뮬레이션 결과는 그림 5.1 ($i=6, 9$)에 도시하였다. 그리고 제안된 스위칭 함수를 이용하지 않고 모든 상태 변수들을 이용하여 전상태 스위칭 함수를 구성하고 추정 가능한 상태 변수들만을 스위칭 하는 Ismail의 알고리즘에 의한 결과를 그림 5.1 ($i=6, 9$)에 함께 소개하였다. 이 경우 위의 제안된 방법에서 얻어지는 슬라이딩 모드 특성근이 그대로 얻어지게 하였으며 가변 이득 또



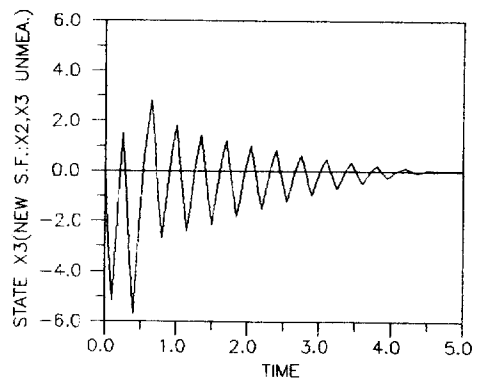
(a)



(b)



(a)



(b)

그림 5.2 3차 비표준형 계통에서의 제안된 방법에 의한 상태 X_2 의 궤적
(a) X_3 상태 측정 불가능
(b) X_2, X_3 상태 측정 불가능

Fig. 5.2 The trajectory of X_2 by the proposed method in the case of third order non-canonical form dynamic system
(a) X_3 state unmeasurable
(b) X_2, X_3 state unmeasurable

그림 5.3 3차 비표준형 계통에서의 제안된 방법에 의한 상태 X_3 의 궤적
(a) X_3 상태 측정 불가능
(b) X_2, X_3 상태 측정 불가능

Fig. 5.3 The trajectory of X_3 by the proposed method in the case of third order non-canonical form dynamic system
(a) X_3 state unmeasurable
(b) X_2, X_3 state unmeasurable

한 같은 값으로 선택하였다.

만약 X_2, X_3 상태들이 측정 불가능 하다면 이런 출력에 의한 가관측 기수가 3이 된다. 그러므로 새로운 구성법으로 스위칭함수를 구성하기 위해서는 먼저 특정 가능한 상태의 미분치를 나타내는 A 행렬 첫째 행의 요소중에 X_3 에 관련된 요소가 빠져 있으므로 $S_r(x)$ 에 대한 이차 미분치가 필요하고, 이 이차 미분치에 의해 X_3 에 대한 정보가 제공되므로 새로운 스위칭 함수 구성은 다음과 같이 된다.

$$S_r(x) = G_1 X_1$$

$$\dot{S}_r(x) = G_1 X_1 + G_1 X_2$$

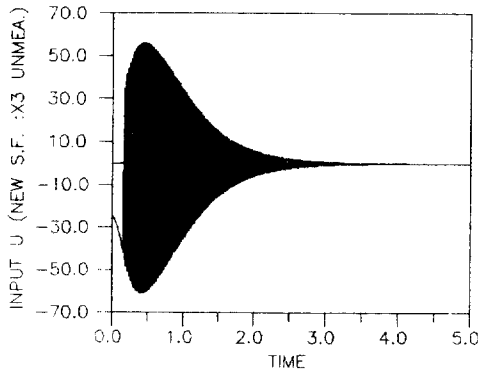
$$\ddot{S}_r(x) = G_1 X_1 + (G_1 - 2G_1) X_2 + 3G_1 X_3$$

$$S_n(x) = H_1 S_r(x) + H_2 \dot{S}_r(x) + H_3 \ddot{S}_r(x)$$

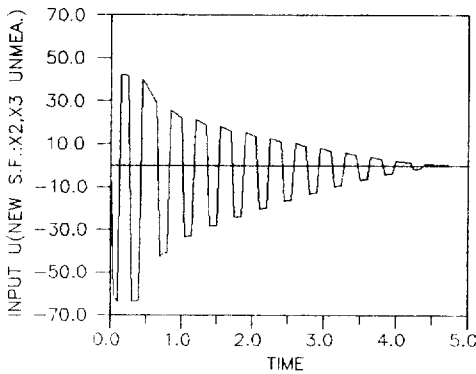
이 경우 먼저 결정 하게 될 안정한 $F(x)$ 는 X_2, X_3 가 측정 불가능 할때 3.2절의 결과를 이용하여 다음과 같이 결정된다.

$$F(x) = 2.666666667 X_1 + 4/3 X_2 + X_3$$

$S_n(x)$ 식에서 $G_1=1, H_1=2/3, H_2=1/3, H_3=5/3$ 으로 선택하면 우리가 먼저 구한 안정한 $F(x)$ 값



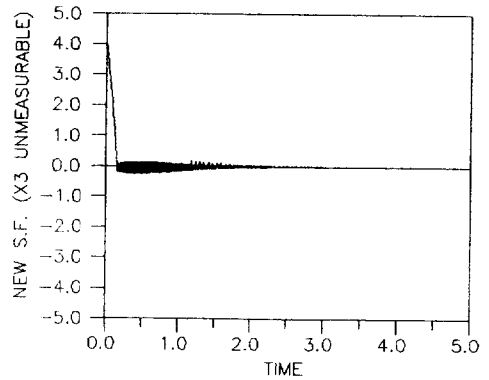
(a)



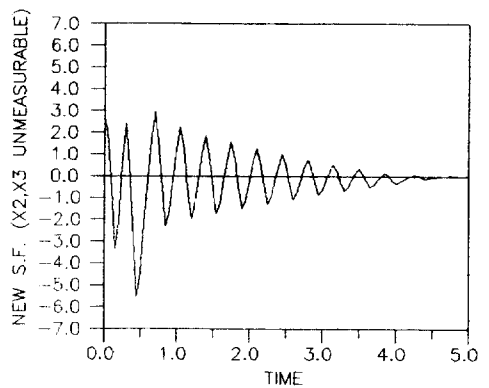
(b)

그림 5.4 3차 비표준형 계통에서의 제안된 방법에 의한 입력 U 의 궤적
(a) X_3 상태 측정 불가능
(b) X_2, X_3 상태 측정 불가능

Fig. 5.4 The trajectory of input U by the proposed method in the case of third order noncanonical form dynamic system
(a) X_3 state unmeasurable
(b) X_2, X_3 state unmeasurable



a) (a)



(b)

그림 5.5 3차 비표준형 계통에서의 제안된 방법에 의한 스위칭 함수 H 의 궤적
(a) X_3 상태 측정 불가능
(b) X_2, X_3 상태 측정 불가능

Fig. 5.5 The trajectory of switching function H by the proposed method in the case of third order noncanonical form dynamic system
(a) X_3 state unmeasurable
(b) X_2, X_3 state unmeasurable

과 위 $S_n(x)$ 값을 똑같이 맞추어 줄 수 있다.

그리고 슬라이딩 조건을 만족하는 가변이득과 고정이득을 3장의 (24)조건식을 이용하여 구하면 다음과 같다.

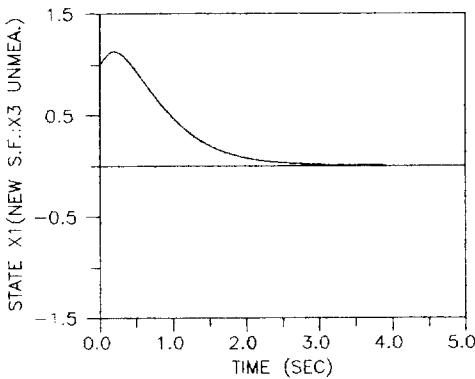
$$S_n X_1 > 0 \text{ 일때 } K_1 = 293/27, \Delta K_1 = 50 > 0$$

$$S_n X_1 < 0 \text{ 일때 } K_1 = 293/27, \Delta K_1 = -50 < 0$$

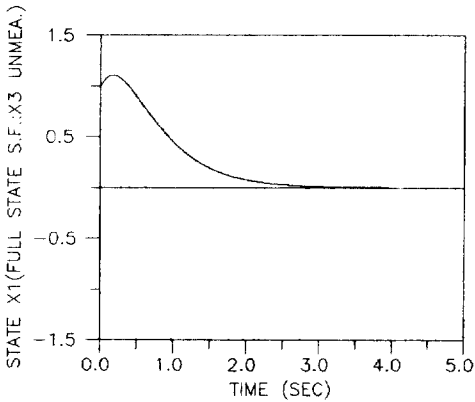
이와 같은 입력 선택은 파라미터 변동 및 외란을 고려치 않는 공칭 계통에 대한 제어를 위한 것이다. 이 결과는 그림 5.1 ($i=1, 5$)에 도시하였다.

이 시뮬레이션 결과는 앞의 X_3 상태만 측정불가

능한 경우의 결과에 비해 그 수렴특성이 떨어짐을 보여주고 있다. 이 원인은 인가되는 입력이 측정 가능한 상태 X_1 만으로 구성되어 있어 상태벡터가 스윙칭평면을 가로지룰 때 마다 즉각적으로 다시 스윙칭평면으로 향하도록 하는 큰 입력을 발생시키지 못하는 이유와 상태 X_1 만을 케환 시켜서 슬라이딩 모드 특성근을 임의로 좋은 특성을 갖게 선택할 수 없는 이유도 있다. 즉 측정 불가능한 상태수가 증가할 수록 측정 가능한 상태만으로 가변구조 제어를 하는 것은 수렴특성 저하를 수반한다.



(a)



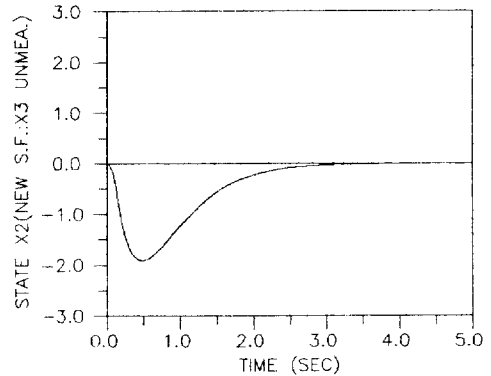
(b)

그림 5.6 3차 비표준형 계통에서의 상태 X_1 의 궤적(X_3 상태 측정 불가능, 매개 변수 변동 및 외란 존재)

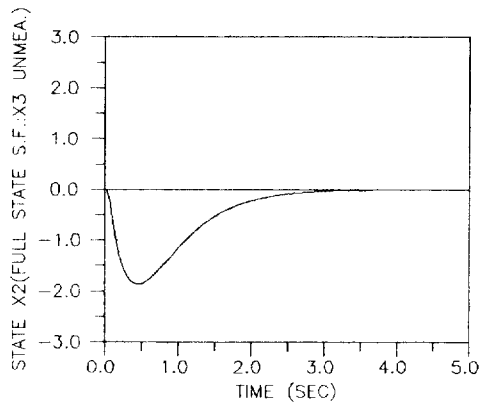
(a) 새로운 스위칭 함수 알고리즘

(b) Ismail의 알고리즘

Fig. 5.6 The trajectory of X_1 in the case of third order noncanonical form dynamic system (X_3 is unmeasurable state variable)
(a) New switching function algorithm
(b) Ismail's algorithm



(a)



(b)

그림 5.7 3차 비표준형 계통에서의 상태 X_2 의 궤적(X_3 상태 측정 불가능, 매개 변수 변동 및 외란 존재)

(a) 새로운 스위칭 함수 알고리즘

(b) Ismail의 알고리즘

Fig. 5.7 The trajectory of X_2 in the case of third order noncanonical form dynamic system (X_3 is unmeasurable state variable)
(a) New switching function algorithm
(b) Ismail's algorithm

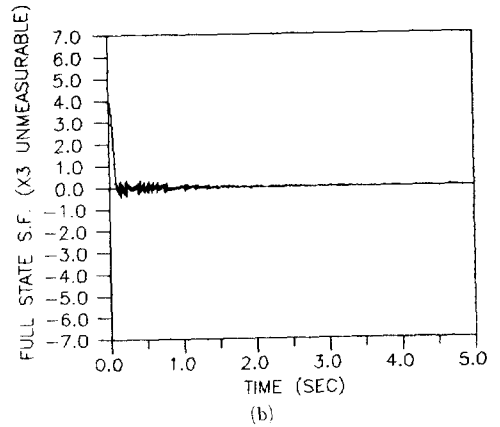
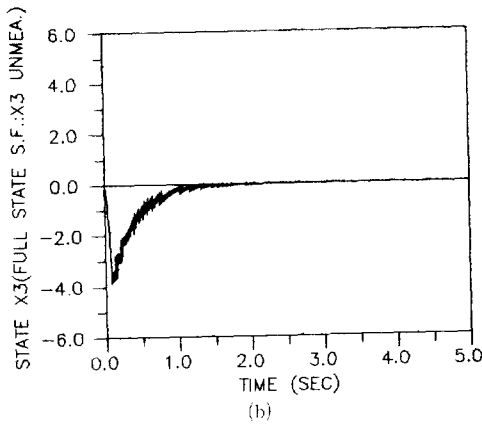
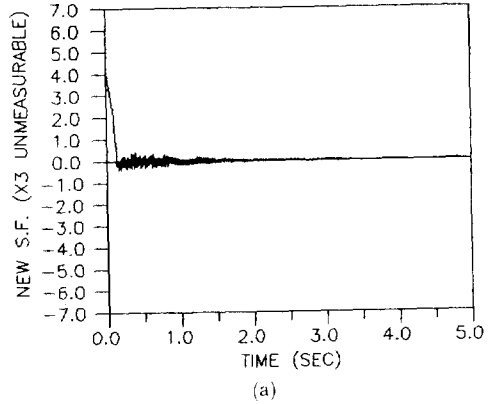
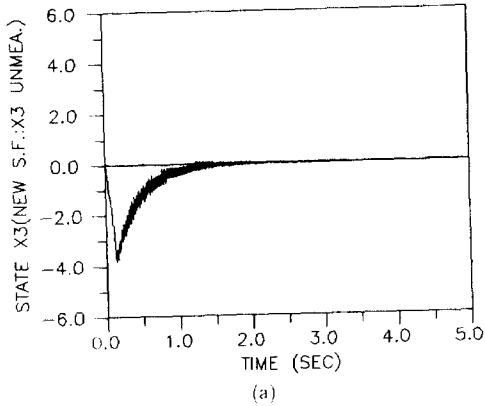


그림 5.8 3차 비표준형 계통에서의 상태 X_3 의 궤적(X_3 상태 측정 불가능, 매개 변수 변동 및 외란 존재)
 (a) 새로운 스위칭 함수 알고리즘
 (b) Ismail의 알고리즘

Fig. 5.8 The trajectory of X_3 in the case of third order noncanonical form dynamic system (X_3 is unmeasurable state variable)
 (a) New switching function algorithm
 (b) Ismail's algorithm

그림 5.9 3차 비표준형 계통에서의 스위칭 함수의 궤적(X_3 상태 측정 불가능, 매개 변수 변동 및 외란 존재)
 (a) 새로운 스위칭 함수 알고리즘
 (b) Ismail의 알고리즘

Fig. 5.9 The trajectory of switching function in the case of third order noncanonical form dynamic system (X_3 is unmeasurable state variable)
 (a) New switching function algorithm
 (b) Ismail's algorithm

5. 결론

본 논문은 가변구조제어(variable structure control, VSC)이론에 있어 그 적용범위 확대에 관한 논문이다. 즉 일반적인 선형계통에서 측정불가능한 상태들이 있을때 사용할 수 있는 새로운 스위칭함수 구성법과 제어입력에서의 이득선정법을 제시하였다. 그리고 일반적인 비표준형 3, 4차 계통에 대한 시뮬레이션 결과를 통하여 다음과 같은 결론을 얻게 되었다.

- (1) 측정불가능한 상태들은 스위칭함수를 구성할때 이용할 수 없으므로 우리가 알 수 있는 측정가능한 상태들로만 이루어진 reduced-order 스위칭함수와 그의 미분치로 구성되는 새로운 스위칭함수구성법을 제안해 full-order 스위칭함수와 같은 결과를 얻어 낼 수 있었다.
- (2) 이 구성법으로 구성된 스위칭함수를 이용하여 일반적인 비표준형계통에 대해 몇 몇 상

태들을 입력과 스위칭함수 결정시에 제외하고도 가변구조제어를 수정 할 수 있었다.

- (3) 이전의 가변구조 제어이론에 있어서 모든 상태들을 알아야 하고 모를 시에는 관측기를 사용해야 하는 제약이 있었으나 이제 이 새로운 스위칭함수 구성법에 의해 그 제약을 경감시킬 수 있다.
- (4) 그렇지만 측정불가능한 상태변수들의 수가 과반수 이상이 되면 스위칭함수 구성에 있어 미분 차수가 증가하게 되며 입력 구성에 있어 측정가능한 상태변수들만을 이용하여 안정한 슬라이딩 모드를 얻을 수 없는 경우가 발생할 수 있다. 미분차수의 증가는 실계통 제어시 발생할 수 있는 미분 추정치의 급격한 외란에 대한 민감성을 증가시키므로 filtering 이론에 관한 연구가 수반되어야 할 것이다. 그리고 이 제어 알고리즘 자체도 제어입력 구성에 있어 측정가능한 상태변수들만을 가지고 가변구조 제어를 수행하는데 있어 제한성을 가지므로 출력 제한 제어에 관한 연구가 계속적으로 병행되어야 할 것이다.

참 고 문 헌

- [1] ITIKIS, U.: "Control system of variable structure," (John Wiley, 1976)
- [2] UTKIN, V.I.: "Sliding modes and their application in variable structure system," (MIR, MOSCOW, 1978)
- [3] B.A. White: "Reduced-order switching functions in variable structure control system," IEE proc PT D, Vol. 130, No. 2, pp. 33~39, MAR. 1985
- [4] NORMAN E. GOVGH, ZIAD. M. ISMAIL and ROBERT E. KING: "Analysis of variable structure systems with sliding modes," INT. J. SYSTEMS SCI., 1984, Vol. 15, No. 4, 401~409
- [5] Brain D.O. Anderson & Jhon B. Moore, Linear Optimal Control, Prentice-Hall
- [6] B.A. White: "Reachability in variable structure control systems," IEE proc, Vol. 131, Pt D, No. 3, MAY 1984
- [7] B.A. White: "Reduced-order variable structure control of an lateral motion of an aircraft," 1986 IEEE

저 자 소 개



박귀태(朴貴泰)

1947년 10월 25일생. 1975년 고려대 공대 전기공학과 졸업. 1981년 동 대학원 졸업(공학). 1975년 한국에너지 연구소 연구원. 1978년 광운대 공대 전기공학과 조교수. 1984~85년 미국 일리노이대학 객원연구원. 현재 고려대 공대 전기공학과 교수. 당학회 평의원.



최중경(崔重暻)

1964년 2월 12일생. 1986년 고려대 공대 전기공학과 졸업. 1988년 동 대학원 전기공학과 졸업(석사). 현재 고려대 대학원 전기공학과 박사과정.