

정자계의 경계요소 해석을 위한 병렬계산

Parallel Computations for Boundary Element Analysis of Magnetostatic Fields

金 根 煥* · 崔 旻** · 鄭 炫 教*** · 李 基 植§ · 韓 松 曄§§
 (Keun-Hwan Kim · Kyung Choi · Hyun-Kyo Jung · Ki-Sik Lee · Song-Yop Hahn)

Abstract - A boundary element analysis using parallel algorithm on transputers is described for three-dimensional magnetostatic field computations. The parallel algorithms are applied to assembling the system matrix and solving the matrix equation. Through the numerical results, it is shown that the computation time is ideally inverse proportional to the number of transputers, and the computational efficiency increases as the size of the system matrix becomes large. The easiness and simplicity in configuring the system hardware and making programs and computation times are compared in three kinds of topologies.

Key Words : BEM(경계요소법), Transputer(트랜스퓨터), Parallel algorithm(병렬 알고리즘), Topology(시스템 구성방식)

1. 서 론

전기기기의 전자계 해석에 경계요소법을 사용하면 계행렬의 차수를 줄일 수 있고 개영역 경계조

건을 용이하게 처리할 수 있다는 점등 여러가지 잇점을 얻을 수 있다. [1, 2] 특히 3차원 문제인 경우에는 유한요소법과 같은 기존의 타 방법들이 가지고 있는 요소분할의 난이성을 피할 수 있다. 그러나 해석모델이 복잡하고 대형화되는 경우 필연적으로 미지수의 갯수가 커지게 되는데 경계요소법의 경우에는 풀어야할 계행렬이 일반적으로 비대칭이며 거의 모든 요소가 영이 아니므로 기존의 유한차분법이나 유한요소법의 행렬식 계산과정에서 흔히 사용하는 sparse행렬 처리 기법을 사용하

*正 會 員 : 大宇電子(株) 映像研究所 研究 4팀
 **正 會 員 : 江原大 工大 電子工學科 助教授·工博
 ***正 會 員 : 江原大 工大 電氣工學科 副教授·工博
 §正 會 員 : 檀國大 工大 電氣工學科 教授·工博
 §§正 會 員 : 서울대 工大 電氣工學科 教授·工博
 接受日字 : 1991年 6月 29日
 1次修正 : 1992年 2月 6日

지 못하며, 이에 따라 계산시간이 기하학적으로 증가하고 컴퓨터의 실 기억용량의 한계에 부딪치게 되는 경우가 발생하기 쉽다.

최근 개발되고 있는 병렬알고리즘에 의한 병렬 컴퓨터는 반복 연산의 동시수행 능력을 갖고 있으며 분산형 기억장치 구조에 의해 실 기억용량의 증대 효과도 제공할 수 있으므로 수치해석의 효율성을 매우 높일 수 있다. [3] 또한 비교적 낮은 가격으로 대형 혹은 슈퍼컴퓨터에 버금가는 능력을 가지게 할 수 있으므로 경제적인 가치도 우수하다고 보겠다. 따라서 경제요소법 적용시 병렬처리 기법을 사용하면 타 방법에 비해 비교적 연산시간이 많이 걸리는 제행렬 조립과정 및 행렬식 계산 과정에서 현저한 시간절약 효과를 얻을 수 있다. [4]

본 연구에서는 여러 대의 트랜스퓨터로 구성된 병렬컴퓨터를 이용하여 병렬알고리즘에 의한 병렬 처리 3차원 정자계 경제요소기법을 구현하였고 사례연구를 통하여 그 효율성을 검증하였다. 트랜스퓨터 갯수 증가에 따른 계산시간의 감소량 비교 및 미지수 갯수 증감에 따른 계산 효율성을 비교하였다. 그리고 병렬컴퓨터의 구성방식에 따른 병렬처리 경제요소해석의 계산효율도 비교하였다.

2. 지배 방정식

그림1과 같은 3차원 개영역 문제 해석을 위한

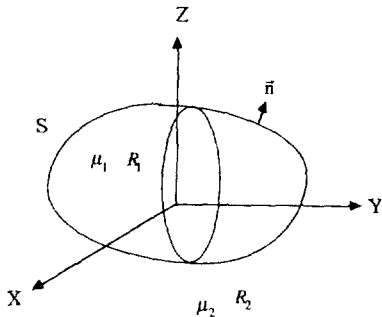


그림 1 3차원 개영역 문제의 일반적 모델
Fig. 1 General model of 3-dimensional open boundary problem.

도달 자기 스칼라 포텐셜 ϕ 에 의한 경계 적분 방정식은 맥스웰 방정식, 보조 방정식 및 자체의 연속조건을 이용하면 다음과 같이 유도된다. [1, 2] 즉,

$$-a_1\phi_1(\vec{r}) + \int_S \left[G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial\phi_1(\vec{r}')}{\partial'n} - \phi_1(\vec{r}') \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial'n} \right] dS' = 0 \quad (1)$$

$$-a_2\phi_1(\vec{r}) - \int_S \left[\mu G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial\phi_1(\vec{r}')}{\partial'n} - \phi_1(\vec{r}') \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial'n} \right] dS' = -\phi_a(\vec{r}) \quad (2)$$

여기서,

$$a_1 = \begin{cases} 1 & \vec{r} \in R_1 \\ c & \vec{r} \in S \\ 0 & \vec{r} \in R_2, \end{cases} \quad a_2 = \begin{cases} 0 & \vec{r} \in R_1 \\ 1-c & \vec{r} \in S \\ 1 & \vec{r} \in R_2 \end{cases}$$

$\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial'n}$: 점 \vec{r} 에서의 $\phi(r)$ 의 법선 미분치

$c = \Omega/4\pi$, Ω : Solid Angle at \vec{r}

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial'n} = -\frac{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{n}}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

이고 \vec{r}, \vec{r}' 은 각각 관측점과 자계원이 존재하는 점을 나타낸다. 이 적분 방정식들을 풀기위해서 해석영역의 경계를 작은 요소들로 이산화한 후 각 요소에 대해 적분을 하면 식(1)과 (2)로부터 $[A]\{X\} = \{B\}$ 형태의 선형 연립 방정식을 얻게 된다. 여기서 $[A]$ 는 제행렬로서 각 요소에 대한 적분을 함으로써 얻어지고 그 적분인자는 그린함수 및 그의 법선 미분치이고 $\{X\}$ 는 각 요소의 포텐셜 및 그의 법선 미분치로 구성되는 벡터이며, $\{B\}$ 는 구동벡터로서 ϕ_a 로부터 얻어진다. 제행렬 $[A]$ 및 구동벡터 $\{B\}$ 의 구성요소를 식(3, 4)에 나타내었다.

$$A_{ij} = \begin{cases} - \int_{s_i} \frac{\partial G(\tilde{r}_i, \tilde{r}_j)}{\partial n} dS, & \text{if } i \neq j, j=1, 2, \\ \dots, N, i=1, 2, \dots, N \\ - a_1, & \text{if } i=j, j=1, 2, \\ \dots, N, i=1, 2, \dots, N \\ \int_{s_i} \frac{\partial G(\tilde{r}_i, \tilde{r}_j)}{\partial n} dS, & \text{if } i \neq j, j=1, 2, \\ \dots, N, i=N+1, N+2, \dots, 2N \\ - a_2, & \text{if } i=j, j=1, 2, \\ \dots, N, i=N+1, N+2, \dots, 2N \\ \int_{s_i} G(\tilde{r}_i, \tilde{r}_j) dS, & j=N+1, N+2, \\ \dots, 2N, i=1, 2, \dots, N \\ - \mu \int_{s_i} G(\tilde{r}_i, \tilde{r}_j) dS, & j=N+1, N+2, \\ \dots, 2N, i=N+1, N+2, \dots, 2N \end{cases} \quad (3)$$

$$B_i = \begin{cases} 0, & i=1, 2, \dots, N \\ -\phi_a(\tilde{r}_i), & i=N+1, N+2, \dots, 2N \end{cases} \quad (4)$$

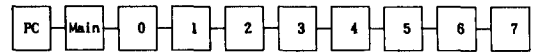
단, 여기서 N 은 요소수를 가리킨다.
 최종적으로 $[A]\{X\}=\{B\}$ 를 풀어서 $\{X\}$ 를 구하면 해석영역내의 모든 점에서의 스칼라 포텐셜은 식(1)과 (2)로부터 얻어지고 자체의 세기는 식(1)과 (2)를 사용하여 $\vec{H}=-\nabla\phi$ 를 계산함으로써 구해진다.

3. 병렬시스템 구성

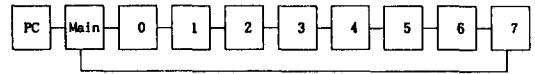
본 연구에서 사용한 병렬처리 시스템은 기억용량 8MB의 T800 트랜스퓨터 한 대를 IBM PC와 트랜스퓨터 네트워크 사이를 연결하는 주 프로세서로 사용하였으며, 트랜스퓨터 네트워크는 1MB의 기억용량을 가진 T800 트랜스퓨터 25개를 이용하여 구성하고, IBM PC는 단말기로 사용하였다. 한대의 트랜스퓨터는 전송속도 20Mbps의 데이터 전송용 시리얼 링크를 이용하여 다른 트랜스퓨터와 연결된다. 트랜스퓨터 네트워크를 구성하는 방법은 선형구조(linear topology), 링구조(ring topology), 그물형구조(mesh topology), 나무형구조(tree topology) 등이 있다. [7] 본 논문에서는 그림2에서와 같은 대표적인 세가지 구성방법에 대하여 시도해 보았다. 이러한 구성방법에 따른 병렬처리 경계요소 해석 알고리즘은 다음과 같다.

3.1 선형구조

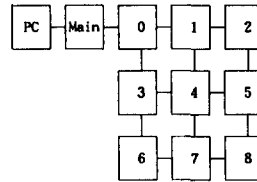
그림2(a)에 그 구성이 나타나 있다. 각 트랜스퓨터는 우선 기하학적 데이터와 매질 상수를 주 프



(a) 선형구조



(b) 링구조



(c) 그물형구조

그림 2 세가지 네트워크 구성방식

Fig. 2 Three network topologies.

로세서로부터 받는다. 주 프로세서와 연결되어 있는 0번 트랜스퓨터가 주프로세서로부터 데이터를 받으면 그것을 다시 오른쪽에 있는 트랜스퓨터로 전송하게 되며 이것을 계속하여 최종단 트랜스퓨터까지 데이터가 전송된다.

데이터 전송이 끝나면 계행렬 조립이 시작되는데 각 트랜스퓨터는 계행렬의 크기가 N 이고 트랜스퓨터 갯수가 M 이라 할때 $N \times (N/M)$ 의 부분행렬을 저장하고 있게 된다. 각 트랜스퓨터는 자기가 가지고 있는 부분행렬의 각 원소가 계행렬에서 어느 위치에 있는가를 판별하고 그 위치정보를 이용하여 적분한다. 각 트랜스퓨터는 구동벡터를 저장하기 위한 $N \times 1$ 의 배열을 가지고 있으며 그 조립시간이 전체 계산시간에 비해 극히 미미하므로 통신량을 줄이기 위해 선형구조와 링구조의 경우에는 각 트랜스퓨터가 구동벡터를 조립하여 저장한다. 트랜스퓨터는 비동기식 병렬컴퓨터이므로 어느 한 트랜스퓨터가 부분행렬 조립을 하는 계산과정을 모두 끝냈다면 바로 행렬식 계산과정으로 넘어갈 수 있으나, 행렬식 계산과정에서는 다른 트랜스퓨터로부터 데이터를 주고 받아야 하기 때문에 그 데이터가 준비될때까지 기다려야 하므로 만약 어느 한 트랜스퓨터가 다른 것보다 많은 량의 계산을 담당하게 되면 효율이 떨어지게 된다. 그러므로 각 트랜스퓨터의 계산량이 고른 분포를 갖도록 세심한 주의를 해야한다.

행렬식 계산량 Gauss-Jordan알고리즘을 사용하

여 병렬화하였다. 0번 트랜스퓨터는 첫열을 다른 트랜스퓨터에 보낸다. 데이터 전송이 끝나면 각 트랜스퓨터들은 $A_{ij} = A_{ij} - A_{i1} \times A_{1j} / A_{11}$ 를 동시에 계산한다. 이때 구동벡터에 대해서도 $f_i = f_i - A_{i1} \times f_1 / A_{11}$ 를 계산한다. 이렇게 하면 A_{11} 아래의 모든 원소, 즉 A_{i1} 이 영으로 된다. 다음에는 A_{22} 를 포함하는 열을 다른 트랜스퓨터로 보내고 같은 방법으로 다음 요소들을 계산한다. A_{ii} 가 0번 트랜스퓨터를 지나서 1이나 2번의 트랜스퓨터에 있는 원소가 되면 그것이 포함된 열을 다른 트랜스퓨터로 보낼때 좌우로 동시에 보낸다. 이렇게 계속해서 A_{ii} 가 A_{nn} 까지 가게 되면 계행렬 A 는 대각선 부분만 제외하고는 모두 영인 대각행렬이 된다.

최종적으로 f_i 를 A_{ii} 로 나누어서 해를 얻게 되는 이때는 각 트랜스퓨터가 f_i 의 정해진 부분을 담당하여 동시에 계산한다. 구해진 결과는 주 프로세서로 보내서 후처리를 한다.

3.2 링구조

링구조는 그림2(b)에서와 같이 선형구조에서 처음과 끝만 이어놓은 구조이다. 초기데이터 전송과 계행렬 및 구동벡터 조립은 선형구조와 완전히 같다. 행렬식 계산의 경우 선형구조에서 0번 트랜스퓨터의 데이터나 끝에 있는 7번 데이터가 오직 한방향으로만 전파되고 가운데에 있는 트랜스퓨터의 데이터는 양방향으로 전파되는 것에 반해, 링구조에서는 모든 트랜스퓨터가 양 방향으로 데이터를 전파한다. 그래서 대칭성이 뛰어나다. 계산도중에 주 프로세서는 0번 트랜스퓨터와 7번 트랜스퓨터 사이에서 오가는 데이터를 전송하는 역할을 한다.

3.3 그물형 구조

그림2(c)에서와 같이 이 경우에는 데이터 전송을 좌우, 상하로 하기 때문에 좀더 복잡하다. 가로 혹은 세로방향으로의 트랜스퓨터 갯수가 K 라고 하면 각 트랜스퓨터는 $(N/K) \times (N/K)$ 의 부분행렬을 저장하게 되며, 구동벡터도 K 개로 나누어져 있다. 즉 f_1, f_2, f_3 는 0번 트랜스퓨터에, f_4, f_5, f_6 는 3번 트랜스퓨터에, f_7, f_8, f_9 는 6번 트랜스퓨터에 저장된다. 행렬식 계산시 선형구조나 링구조에 비해 달라지는 것은 좌우로 데이터를 전파시키는 것 외에 상하로 데이터를 주고받는다라는 것이다.

4. 사례연구

균등자계내에 반경 R 인 자성체가 있는 문제의

자계해석을 세 가지 구성방식에 대해서 수행해 보았다. 그림3에 적용모델이 나타나 있다. 0차 삼각형 요소를 사용하였으며 그림3의 선분 AB 를 따라서 자속밀도를 계산하고 해석적인 해와 비교하였다. 그림4에 요소수가 120개, 216개, 480개 경우의 수치해를 해석적인 해와 비교한 그래프를 나타내었는데 요소수가 클수록 해가 잘맞는다는 것을 알 수 있다. 언어는 OCCAM을 사용했다. [5, 6] 표1에서 보면 선형구조에서만 의 계행렬 조립시간을 나타내고 있는데 다른 두 구조에 대해서도 계행렬 조립시간은 같다. 트랜스퓨터 갯수가 4개인 경우에 대해 8개, 16개 및 24개인 경우를 보면 미지수의 갯수가 다른 세 가지의 계행렬 크기에 대해 각각 2배, 4배 및 6배 정도의 속도 증가가 있음을 알 수 있다. 그러므로 트랜스퓨터수를 증가시킬 경우에도 이에 비례해서 계행렬 조립시간을 단축시킬 수 있다는 것을 예측할 수 있다. 즉 각 트랜스퓨터가 똑 같은 계산을 한다면 N 개의 트랜

표 1 선형 구조에서의 행렬 조립 시간

Table 1 Assembling times on a linear topology

행렬 조립 시간(초)				
행렬크기	트랜스퓨터 갯수			
	4	8	16	24
240×240	8.83	4.4	2.2	1.46
432×432	28.9	14.4	7.2	4.79
960×960	143.8	71.9	35.8	23.9

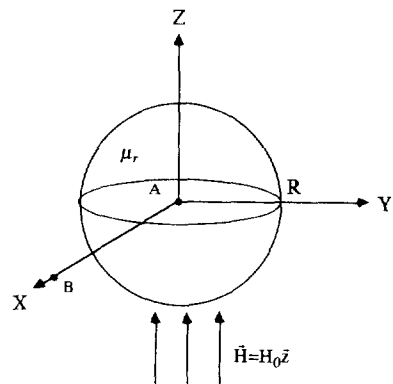


그림 3 적용모델

Fig. 3 A magnetic sphere in a uniform external magnetic field.

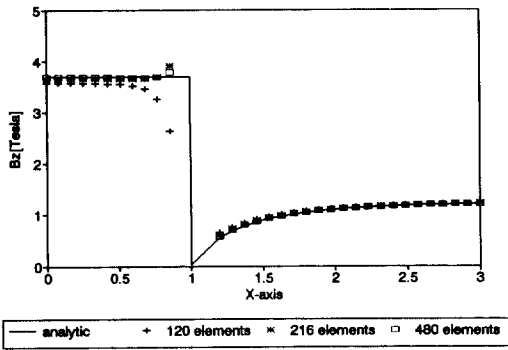


그림 4 선분AB를 따라서 계산한 수치해와 이론해의 비교
 Fig. 4 Comparison of the calculated solution with analytic solution along AB line.

표 2 선형 구조에서의 행렬식 계산 시간
 Table 2 Solving times on a linear topology

행렬식 계산 시간(초)				
행렬크기	트랜스퓨터 갯수			
	4	8	16	24
240×240	18.27	9.22	4.77	3.37
432×432	106.16	52.94	26.86	18.53
960×960	1176.5	581.9	292.7	197.8

스퓨터를 썼을 때는 N배의 속도증가를 기대할 수 있다.

표2를 보면 트랜스퓨터가 4개일 때를 기준으로 하여 8개, 16개 및 24개일때와 비교해보면 계행렬 크기가 240×240일 경우 각각 1.98배, 3.83배 및 5.4배의 계산속도 증가가 있었다. 그리고 계행렬의 크기가 432×432인 경우 각각 2.0배, 3.95배 및 5.72배이고 계행렬의 크기가 960×960인 경우 각각 2.02배, 4.02배 및 5.95배의 속도 증가가 있었다. 이 결과로부터 계행렬의 크기가 커질수록 효율이 증대된다는 것을 알 수 있다. 단, 선형구조는 트랜스퓨터 갯수가 증가할 때 통신망 직경(network diameter)이 길어지므로 오히려 효율이 조금 떨어지는 경향이 있었다. [7]

표3의 링구조에서도 역시 계행렬의 크기가 증가하면 효율이 좋아진다는 결론을 내릴 수 있고 계행렬의 크기가 크고 트랜스퓨터의 갯수가 많으면 효율이 좋다는 것을 알 수 있다. 표4에서와 같이 그물형구조 역시 계행렬의 크기가 증가하면 효율

표 3 링구조에서의 행렬식 계산 시간

Table 3 Solving times on a ring topology

행렬식 계산 시간(초)				
행렬크기	트랜스퓨터 갯수			
	4	8	16	24
240×240	19.25	9.73	4.77	3.38
432×432	107.4	53.6	26.87	19.63
960×960	1189.6	587.9	292.7	194.3

표 4 그물형 구조에서의 행렬식 계산 시간

Table 4 Solving times on a mesh topology

행렬식 계산 시간(초)				
행렬크기	트랜스퓨터 갯수			
	4(2×2)	9(3×3)	16(4×4)	25(5×5)
240×240	18.43	8.3	4.91	3.19
432×432	108.6	48.7	27.12	
960×960	1252.4	558.5	292.9	188.2

이 증대됨을 알 수 있다. 그러나 계행렬의 크기가 작은 240×240정도인 경우 트랜스퓨터 갯수가 많아지면 2.22배 3.75배, 5.78배와 같이 오히려 효율이 떨어지는 것을 볼 수 있다.

표2, 표3 및 표4의 결과에서 행렬식 계산과정에서 어떠한 구성방식을 사용하여도 트랜스퓨터를 N개 쓰면 N배 가까운 속도증가를 이룰 수 있다는 것을 알 수 있었고, 주어진 계행렬과 주어진 트랜스퓨터 갯수 한도내에서 보면 트랜스퓨터 갯수가 적은 경우, 즉 4개, 8개인 경우에는 선형구조가 가장 유리하였으나, 대형행렬이고 많은 트랜스퓨터를 사용시에는 링구조가 유리하였다. 그리고 알고리즘의 용이성과 시스템구성의 간편성을 함께 고려해 볼때 링구조가 대체로 유리하다고 할 수 있다.

5. 결 론

3차원 정자계 해석 경계요소법을 병렬알고리즘을 이용하여 트랜스퓨터상에서 구현하였다. 경계요소법의 적용과정중 계산시간이 많이 소요되는 계행렬 조립 및 행렬식 계산과정에 병렬알고리즘을 적용하였으며 이를 각각 트랜스퓨터의 갯수, 미지수의 갯수, 구성방식(topology)을 변화시킨 경우에 대하여 그 효능성을 검토하였다.

각 구성방식 및 각 계산과정에서 사용한 트랜스퓨터의 갯수가 증가함에 따라 계산 시간이 트랜스퓨터의 갯수에 거의 이상적으로 역비례하여 줄어들며, 미지수의 갯수가 작은 경우보다 큰 경우에 계산효율이 더욱 증가함을 확인할 수 있었다. 구성방식에 따른 효과에 있어서는 각 방식이 대체로 비슷한 결과를 나타내었는데, 알고리즘의 용이성과 구성의 간편성을 고려하고 미지수가 비교적 큰 경우와 트랜스퓨터의 갯수가 비교적 많은 경우의 계산 결과를 참조할때 링구조가 유리함을 알 수 있었다.

앞으로 실제 응용문제로서의 3차원 문제 해석시 미지수의 갯수가 대체로 수 천개를 넘는 것을 고려할 때, 본 논문에서 제시한 병렬컴퓨터를 이용한 병렬처리 경계요소법은 계산시간을 현저히 단축하고 기존 컴퓨터의 기억용량 한계를 극복할 수 있기 때문에 매우 유용될 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

[1] 전기억, 고창섭, 정현교, 한송엽, "경계요소법을 이용한 3차원 정자장 해석," '91 대한전기학회 하계학술대회 논문집, pp. 97~101, 1991

[2] S. Peaiyoung, "Computational aspects of the boundary element method applied to two-and three-dimensional magnetic field problems." Ph. D. Dissertation, Dept. of Electric Power Engineering, Rensselaer Polytechnic Institute, 1987
[3] K. Hwang and F.A. Briggs, "Computer architecture and parallel processing," McGraw Hill, 1985
[4] C.F. Bryant, M.H. Roberts, and C.W. Trowbridge, "Implementing a boundary integral method on a transputer system," IEEE Trans. on Magnetics, Vol. 26, No. 2, pp. 819~822, March 1990
[5] P. Dick and D. May, "A tutorial introduction to Occam programming," BSP Professional Books, London, 1987
[6] INMOS, "Occam 2 Reference Manual," Prentice Hall, 1988
[7] D.P. Bertsekas and J.N. Tsitsiklis, "Parallel and distributed computation," Prentice-Hall, pp. 27~87, 1989

저 자 소 개



김근환(金根煥)

1967년 7월 8일생. 1990년 서울대 공대 전기공학과 졸업. 1992년 동 대학원 전기공학과 졸업(석사). 현재 대우전자 근무.



정현교(鄭炫敎)

1955년 8월 17일생. 1979년 서울대 공대 전기공학과 졸업. 1984년 동 대학원 전기공학과 졸업(공학). 1987~89년 뉴욕 Polytechnic Univ. 객원교수. 현재 강원대 공대 전기공학과 부교수. 당 학회 편집위원.



최 경(崔 暎)

1958년 4월 30일생. 1981년 서울대 공대 전기공학과 졸업. 1983년 동 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1988년 동 대학원 전기공학과 졸업(공학). 현재 강원대 공대 전자공학과 조교수.



이기식(李基植)

1952년 3월 20일생. 1973년 서울대 공대 전기공학과 졸업. 1977년 서울대 대학원 전기공학과 졸업. 현재 단국대 공대 전기공학과 부교수. 공박



한송엽(韓松曄)

1939년 3월 14일생. 1963년 서울대 공대 전기공학과 졸업. 1967년 동 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1976년~79년 불란서 로렌공과대학원 졸업(공학). 현재 서울대 공대 전기공학과 교수. 당 학회 평의원.