

구조적 불확실성을 갖는 선형계의 강인한 극배치 제어

Robust Pole Assignment Control for Linear Systems with Structured Uncertainty

金 永 喆*
(Young-Chol Kim)

Abstract - This paper deals with the problem of robust pole-assignment control for linear systems with structured uncertainty. It considers two cases whose closed-loop characteristic equations are presented as a family of interval polynomial and polytopic polynomial family respectively. We propose a method of finding the pole-placement region in which the fixed gain controller guarantees the required damping ratio and stability margin despite parameter perturbation. Some results of Kharitonov like stability and two kinds of linear transformations are included. As an illustrative example, we show that the proposed method can apply effectively to the single magnet levitation system including some uncertainties (mass, inductance etc.).

Key Words : Robust Control, Pole Assignment Control, Structured Uncertainty
Magnet Levitation System, Kharitonov Stability

1. 서 론

제어계의 구조적/비 구조적 불확실성에 대한 안정도 해석 및 강인한 제어기 설계에 관한 연구는 주파수 영역 해석방법과 [1-3] 매개변수 공간에서의 접근방식으로 대별할 수 있다. 후자의 방식에는 특성다항식의 근과 매개변수 섭동과의 직접

적인 관계를 대수적으로 해결하려는 기법과 Lyapunov의 직접법을 이용하는 방법이 있으며, 특히 1986년 이래 Kharitonov 정리[4]를 이용한 강인성 연구는 대단한 관심과 결과를 보였다 [5~7].

본 논문은 플랜트 전달함수의 특정계수가 한정된 범위내에서 섭동(perturbation)을 갖는 선형 시불변 시스템의 강인한 상수이득 제어기(fixed gain control)구성에 관한 것이다. 이러한 문제에 대한

*正 會 員 : 忠北大 工大 電子工學科 助教授 · 工博
接受日字 : 1991年 8月 26日
1次修正 : 1991年 12月 19日

주목할 만한 결과로, 주어진 매개변수 불확실성을 다중모델구조로 나타내고 이 simultaneous stabilizer)를 설계하는 방법[8~10]이 있으나, 대부분의 방법이 일반적이며 체계적인 해를 주지는 못하고 있다. 이것은 가장 간단한 형태인 상수이득제어기 구조를 설계하는데서 오는 근본적인 어려움일 수 있으며, 만족할만한 결과에 도달치 못하면 적응제어, 비선형 시변제어기 등의 고급 제어기법을 도입해야 할 것이다. 본 논문에서는 Kharitonov like stability를 이용하여 매개변수 섭동에 대해 안정도 여유(stability margin)와 제어성능을 고려한 감쇠특성을 만족시키는 극배치방식을 제시하고자 한다.

이러한 제어대상의 특정다항식은 다음식으로 표현될 수 있다.

$$P(s, q) = \sum_{i=0}^n a_i(q)s^i \quad (1.1)$$

여기서, $q^T = [q_1, q_2, \dots, q_k]$ 는 불확정 매개변수로서 Box Q 내에서 변화한다.

$$Q = \{q | q_i^- \leq q_i \leq q_i^+, i=1, 2, \dots, k\} \quad (1.2)$$

여기서, 상첨자 -, +는 q_i 의 하한치, 상한치를 표시해준다.

(1.1), (1.2)로서 표현되는 다항식군(a family of polynomial)을 다시 쓰면

$$P = \{p(s, q) | q \in Q\} \quad (1.3)$$

그리고 P 의 모든 근이 복소평면에 미리 설정해 준 영역 D 내에 존재하면, 시스템은 D -안정(D -stable)이라고 부르기로 한다. $p(s, q)$ 의 각 계수 a_i 가 독립적으로 섭동을 갖는 경우에는 매개변수공간에서 $(n+1)$ 차원 초구형(hyperrectangle)으로 나타내며, 이때의 P 를 interval polynomial family라 한다. Kharitonov[4]는 이러한 interval polynomial 문제에 대해 D 가 복소평면의 좌측반평면(LHP)일 때, 2^{k+1} 개의 단점(extreme point 또는 vertex)중 단지 4개의 단점을 나타내는 소위 Kharitonov polynomials이 Hurwitz안정이라는 획기적인 결과를 발표하였다. Barmish[11]에 의해 제어문제의 적용 소개되면서 robust stability연구에 많은 진전을 보였다. Bartlett 등[12, 13]은 (1, 1)의 각계수가 q 에 대해 선형종속관계로 주어지는 다항식군에 대해 2^k 로 주어지는 단점간 exposed edges가 D -안정이면 P 가 D -안정(D 는 임의의 단순영역)이라는 소위 "Edge 정리"를 발표하여 Kharitonov 정리의 일반화에 크게 기여하였다. 이러한 일반화에 대한 연구는 주로 multilinear

perturbation 문제로의 확장, 안정도 검증 계산량의 감소, 안정영역 D 설정조건의 완화에 두고 있다.[6, 7, 14, 15] 그런데 대부분 연구가 주어진 제어기에 대해 P 가 D -안정인지를 판별하는 것으로서, 만일 플랜트 계수의 공칭치(nominal value)에 대해 설계된 제어기가 D -불안정이라면 이를 처리할 수 있는 기법의 연구가 요구된다. 본 논문 2장에서는 정의 및 예비결과를 정리하고, 3장에서는 섭동계수가 특성다항식내에서 1차독립으로 나타나는 경우와 1차종속으로 나타나는 경우로 나누어, 두가지 형태의 선형변환을 이용한 D -안정 극배치 제어기설계방식을 제시한다. 두번째 경우는 해석적으로는 충분치 못하나 정성적인 제안으로서 기술된다. 3.3절에서는 상기 설계방법을 흡인식 자기부상 시스템에 적용한 결과를 보인다.

2. 문제의 설정 및 예비결과

2.1 정의

정의 2.1 : (Interval polynomials) — 식(1.1), (1.2)에서

$$\begin{aligned} q &= [q_0, q_1^-, \dots, q_k]^T \in R^{n+1} \\ a_i(q) &= q_i, i=0, 1, 2, \dots, n \\ Q &= \{q | q_i^- \leq q_i \leq q_i^+, i=0, 1, \dots, n\} \end{aligned}$$

이면, 다음식(2.1)의 다항식을 Interval Polynomial이라 한다.

$$P(s, q) = \sum_{i=0}^n q_i s^i \quad (2.1)$$

정의 2.2 : (Vertex Polynomial) — (1.1), (1.2)에 대해서 P 는 많아야 2^k 개의 극점을 가지며, i 번째 극점은 다음식(2.2)로 표현한다.

$$q_i = [q_1^i, q_2^i, \dots, q_k^i]^T$$

여기서, $q_j^i = q_j^-$ 또는 q_j^+ , $j=1, 2, \dots, k$

$$P_i(s) = \sum_{j=0}^n a_j(q_i)s^j \quad (2.2)$$

정의 2.3 : (Polytopes of polynomials) — m 개의 vertex를 나타내는 다항식의 convex hull을 polynomial polytope이라 한다.

즉,

$$\begin{aligned} P = \{P(s) = \sum_{i=1}^m \lambda P_i(s) | \lambda_i \in [0, 1], \\ \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1\} \end{aligned} \quad (2.3)$$

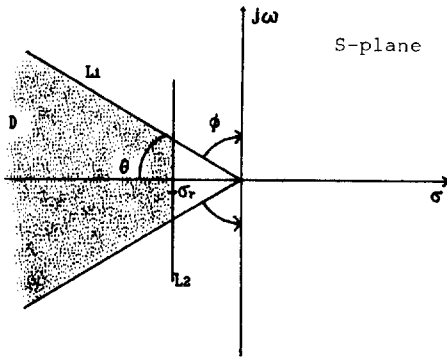


그림 2.1 감쇠율 ϕ 와 안정도 여유 σ_r 로 정의된 D -영역.

Fig. 2.1 D -region defined with damping ratio ϕ and stability margin σ_r .

여기서, $p_i(s)$ 는 polytope P 의 vertex이다.

Polytope P 의 edge는 두 vertices의 convex결합이고, P 의 exposed edge는 P 와 P 의 supporting hyperplane사이의 교집합으로 표현되는 edge이다. [16]

정의 2.4 : (Linear Transformation)

$$T_1(\cdot), T_2(\cdot) : C^* \rightarrow C^*, (C^* \equiv CU\{\infty\})$$

$$w = T_1(s) = e^{j\phi}s, (0 < \phi < 90) \tag{2.4}$$

$$s = e^{-j\phi}w \tag{2.5}$$

$$v = T_2(w) = w + \sigma_r \tag{2.6}$$

$T_1(\cdot), T_2(\cdot)$ 는 (그림 2.1)의 s -평면의 D -영역을 v -평면의 좌반평면 (Left half plane : LHP)으로 사상한다. 또한 $T_1(\cdot)$ 은 L_1 섹터 내부를 w 평면의 LHP으로 사상한다.

정의 2.5 : (Hurwitz Testing Matrix)

복소수 계수를 갖는 다항식에 대한 Hurwitz검증행렬 $H_w(p)$ 는 다음과 같다.

$$P_w(s) = \sum_{k=0}^n (a_k + jb_k)s^{n-k}$$

(단, $b_0 \neq 0, a_k, b_k \in \mathbb{R}$)

$$H_w(p) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_n & 0 & \dots & 0 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_0 & \dots & b_{n-1} & b_n & & \\ 0 & a_0 & \dots & a_{n-1} & a_n & & \\ & & & & & \dots & a_n \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

$b_0=0$ 인 경우에는 $P_w(s)$ 를 $jP_w(s)$ 로 치환하고 식 (2.7)을 구성한다. 이때 $H_w(p)$ 의 모든 짝수차

leading principal minors가 양의 수이면 다항식 $P_w(s)$ 는 Hurwitz이다[19].

정의 2.6 : Kharitonov polynomials

식(2.1)의 interval polynomial에서, 2^{n+1} 개의 단점을 나타내는 다항식군 P 의 실수부와 허수부는 다음 4개의 다항식의 그것내에 한정된다[4]. 이 4개의 단점을 Kharitonov다항식이라 한다.

$$\begin{aligned} K_1(s) &= q_0^- + q_1^-s + q_2^+s^2 + q_3^+s^3 + q_4^-s^4 + \dots \\ K_2(s) &= q_0^- + q_1^+s + q_2^-s^2 + q_3^-s^3 + q_4^+s^4 + \dots \\ K_3(s) &= q_0^+ + q_1^-s + q_2^-s^2 + q_3^+s^3 + q_4^+s^4 + \dots \\ K_4(s) &= q_0^- + q_1^+s + q_2^+s^2 + q_3^-s^3 + q_4^-s^4 + \dots \end{aligned} \tag{2.8}$$

2.2 문제의 설정

(그림 2.2)와 같은 단 입출력(SISO) 피드백 시스템에서, 플랜트는 매개변수 섭동을 가지며 제어기 $C(s)$ 는 극배치 방식인 경우를 고려한다.

플랜트 전달함수 $G(s)$ 는

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\beta_m s^m + \beta_{m-1} s^{m-1} + \dots + \beta_0}{\alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_0} \tag{2.9}$$

여기서

$$\beta_i \in [\beta_i^-, \beta_i^+], i=0, 1, \dots, m \tag{2.10}$$

$$\alpha_j \in [\alpha_j^-, \alpha_j^+], j=0, 1, \dots, n$$

이때 $G(s)$ 는 “proper”이고, $A(s), B(s)$ 는 (2.10)의 조건하에서도 “coprime”이라 가정한다.

제어기 전달함수 $C(s)$ 는

$$C(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{n_p s^p + n_{p-1} s^{p-1} + \dots + n_0}{d_l s^l + d_{l-1} s^{l-1} + \dots + d_0} \tag{2.11}$$

$(l \leq m-1, p \leq n-1)$

특성방정식 $\Delta(s)$ 는

$$\Delta(s) = A(s)D(s) + B(s)N(s) \tag{2.12}$$

안정도 여유와 제동특성을 고려하여 요구되는 극배치 영역이 그림 2.1의 D -영역이라 하였을때, 문제는 (2.9), (2.10)으로 표현되는 플랜트에 대해 D -안정이 보장되는 제어기 $C(s)$ 를 결정하는데 있다. 이것은 $\Delta(s)$ 의 모든근이 (2.10)의 섭동에도 불구하고 D -영역 안에 놓이게 됨을 의미한다. $\Delta(s)$ 를 다항식으로 표현하면,

$$\begin{aligned} \Delta(s, q) &= \delta_n(q)s^n + \delta_{n-1}(q)s^{n-1} + \dots + \delta_0(q) \\ (\bar{n} &= n + m - 1) \end{aligned} \tag{2.13}$$

여기서, 실계수 α_i, β_i 의 set을 Ω_C 라하면, (1.2)에 대응하는 불확실한 매개변수 벡터 q 는 다음과 같

다.

$$q^T = [q_1, q_2, \dots, q_k] \quad (2.14)$$

$$q_i \in \Omega_C, k \leq (n+m+2)$$

식(2.13)은 (2.14)의 q 에 따라 δ_i 가 q 에 1차 독립인 경우(Interval polynomial family; IPF)와 1차 종속인 경우(Politicopic polynomial family; PPF)로 나타나게 된다. 우리는 두 경우를 나누어서 극배치 영역을 결정하는 방법을 모색하고자 한다.

2.3 Kharitonov-like stability

계수섭동을 갖는 다항식 군의 안정도 판별에 관한 몇가지 예비결과를 정리한다.

정리 2.1 (Kharitonov정리) [4]

P^n 을 n 차원 IPF의 set, H^n 을 n 차원 Hurwitz polynomial family(HPF)의 set라 할때,

$$P^n \subset H^n \text{ iff } K_i(s) \subset H^n, i=1, 2, 3, 4 \quad (2.15)$$

여기서, $K_i(s)$ 는 (2.8)에서 정의된 Kharitonov다항식이다.

(정리 2.1)은 주어진 interval polynomial로부터 생성된 4개의 Kharitonov다항식의 안정도가 전체 IPF의 안정도에 대한 필요충분조건임을 의미한다. 그런데 Kharitonov정리의 적용은 IPF이어야하고, 검증되는 안정영역이 복수평면의 LHP으로 한정된다. 제어계의 특성다항식군은 일반적으로 PPF, multilinear polynomials로 나타나며 이 경우에는 (정리 2.1)이 적용될 수 없다. 1987년 Bartlett등은 PPF에 대한 일반화로 다음 정리를 발표하였다.

정리 2.2 : (Edge정리) [12]

Parameter space에서 주어진 polynomial polytope에 대해서, 모든 exposed edges의 root space가 D -영역에 존재하기만 하면 전체 polytope의 root space도 D -영역내에 존재한다. (Edge 정리)는 다시말해서, N 개의 다항식 단점에 대해 다음 convex결합들의 D -안정도가 전체 PPF P 의 D -안정도를 보장한다는 것이다.

$$P = \{P_{ij}(s, \lambda) = \lambda P_i(s) + (1-\lambda)P_j(s), \lambda \in [0, 1] \\ i, j=1, 2, \dots, N\} \quad (2.16)$$

uncertain parameters q_i 의 갯수가 k 개이면 2^k 개의 단점을 가지게 되므로, (2.16)으로 표현되는 총 edges수는 $N_e = 2^{2k-1} - 2^{k-1}$ 개이다 [14].

예로서 $k=2$ 이면 총 6개의 exposed edges가 조사되어야 한다. 다음의 복소계수를 갖는 IPF를 P_w^n 라 하자.

$$P_w(s) = \sum_{k=0}^n (a_k + jb_k) s^k (a_0 + jb_0 \neq 0) \quad (2.17)$$

여기서, $a_k \in [a_k^-, a_k^+]$, $b_k \in [b_k^-, b_k^+]$ 또한, $P_w(s)$ 에 대해 다음식을 정의한다.

$$F_{i,j}(s) = M_i(s) + jL_j(s), i, j=1, 2, 3, 4 \quad (2.18)$$

여기서, $M_i (i=1, 2, 3, 4)$ 는 (2.17)의 실수부에 대한 Kharitonov다항식이고, $L_j (j=1, 2, 3, 4)$ 는 허수부항에 대한 Kharitonov다항식이다. 즉,

$$M_1(s) = a_0^- + a_1^- s^1 + a_2^+ s^2 + a_3^+ s^3 + \dots \\ M_2(s) = a_0^+ + a_1^+ s^1 + a_2^- s^2 + a_3^- s^3 + \dots \\ M_3(s) = a_0^+ + a_1^- s^1 + a_2^- s^2 + a_3^+ s^3 + \dots \\ M_4(s) = a_0^- + a_1^+ s^1 + a_2^+ s^2 + a_3^- s^3 + \dots \\ L_1(s) = b_0^- + b_1^- s^1 + b_2^+ s^2 + b_3^+ s^3 + \dots \\ L_2(s) = b_0^+ + b_1^+ s^1 + b_2^- s^2 + b_3^- s^3 + \dots \\ L_3(s) = b_0^+ + b_1^- s^1 + b_2^- s^2 + b_3^+ s^3 + \dots \\ L_4(s) = b_0^- + b_1^+ s^1 + b_2^+ s^2 + b_3^- s^3 + \dots \quad (2.19)$$

정리 2.3 : [16]

$$P_w^n \in H^n \text{ iff } F^n \subset H^n \quad (2.20)$$

여기서,

$$F^n = \{F_{1,3}(s), F_{1,4}(s), F_{2,3}(s), F_{2,4}(s), \\ F_{3,1}(s), F_{3,2}(s), F_{4,1}(s), F_{4,2}(s)\}$$

3. 감쇠율을 고려한 강인한 극배치 제어기

그림 2.2의 제어계의 식(2.10)의 섭동에 대한 페루프 특성다항식 (2.13)은 섭동계수 q 에 따라 IPF나 PPF로 나타난다. 각 경우에 대해 극배치 제어영역의 설정방법을 제시한다.

3.1 독립적인 계수 섭동에 대한 극배치 영역 결정

식(2.13)의 특성다항식이 interval polynomial $\Delta_i(s)$ 이고, 그 다항식군을 $P_{\Delta_i}^n$ 라 정의한다.

$$\Delta_i(s) = \sum_{k=0}^n \delta_k s^k \quad (3.1)$$

$$\delta_k \in [\delta_k^-, \delta_k^+]$$

$P_{\Delta_i}^n$ 의 모든 근이 그림 2.1의 D -영역내에 존재하는지를 판별하기 위해, 먼저 섹터 L_1 내부에 존재하는지를 고려하기로 한다. 이것은 요구되는 감쇠율을 만족하는지를 판별하는 것이 된다.

식(2.4)의 선형변환 $T_1(s)$ 에 의해 섹터 L_1 영역은 W -평면의 LHP에 대응된다.

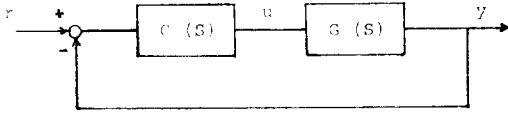


그림 2.2 피드백 시스템
Fig. 2.2 Feedback system

$$\begin{aligned}
 e^{j\bar{n}\phi} \Delta_I(s=e^{-j\phi}w) &= \sum_{k=0}^{\bar{n}} \delta e^{j(n-k)\phi} \phi w^k \\
 &= \sum_{k=0}^{\bar{n}} [\delta_k \cos(\bar{n}-k)\phi \\
 &\quad + j\delta_k \sin(\bar{n}-k)\phi] w^k \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

식(3.2)의 해와 $\Delta_I(w)$ 의 해는 동일하다. 식(2.17)을 다시 쓰면,

$$\Delta_I(w) = \sum_{k=0}^{\bar{n}} (a_k + jb_k) w^k$$

여기서,

$$\begin{aligned}
 a_k^+ &= \max\{\delta_k^+ \cos(\bar{n}-k)\phi, \delta_k^- \cos(\bar{n}-k)\phi\} \\
 a_k^- &= \min\{\delta_k^+ \cos(\bar{n}-k)\phi, \delta_k^- \cos(\bar{n}-k)\phi\} \\
 b_k^+ &= \max\{\delta_k^+ \sin(\bar{n}-k)\phi, \delta_k^- \sin(\bar{n}-k)\phi\} \\
 b_k^- &= \min\{\delta_k^+ \sin(\bar{n}-k)\phi, \delta_k^- \sin(\bar{n}-k)\phi\}
 \end{aligned} \quad (3.3)$$

정리 3.1: $P\Delta_I^n$ 의 모든 근이 섹터 L_1 내부에 존재하기 위한 필요충분조건은 $F^{\bar{n}} \subset H^{\bar{n}}$ 이다.

증명: 식(3.3)의 섭동계수를 갖는 복소다항식군 $P_w^{\bar{n}}$ 에 대해 (정리 2.3)을 적용하면 바로 성립한다. (부연 3.1): 그림 2.1에서 안정도 여유인 L_2 좌측에 존재하는지를 판별 하는 것은 앞의 경우에 비해 간단하지 않다.

선형변환 $T_2(\cdot)$ 에 의해 s -평면에서 v -평면의 LHP로 사상시키면

$$\begin{aligned}
 \Delta_I(s=v-\sigma_r) &= \sum_{k=0}^{\bar{n}} \delta_k (v-\sigma_r)^k \quad (3.4) \\
 &= \sum_{k=0}^{\bar{n}} \zeta_k(\delta) v^k \\
 \delta &= [\delta_0 \quad \delta_1 \cdots \delta_n]
 \end{aligned}$$

$\zeta_k(\delta)$ 는 δ 의 1차 종속함수로서 $\Delta_I(v)$ 는 결국 δ 에 대해 PPF로 나타난다. 우리는 해석적인 "one-shot" 검증방법을 구하지는 못하였으나 다음

방법을 제안한다.

Interval polynomial문제에서는 Kharitonov다항식의 근이 다른 모든 단점다항식의 근을 한정시키고[4], IPF가 Hurwitz이기 위한 필요충분조건이 $K_i(s) \subset H^F (i=1, 2, 3, 4)$ 이므로, $K_i(s)$ 중에는 근의 실수부가 가장 큰 값을 갖는 다항식이 존재해야 한다. 따라서 $\Delta_I(s)$ 의 Kharitonov다항식을

$K_{A_j}(i=1, 2, 3, 4)$ 라 하면,

$$K_{A_j}(s=v-\sigma_r) = \sum_{i=0}^{\bar{n}} k_i^j (v-\sigma_r)^i, \quad j=1, 2, 3, 4 \quad (3.5)$$

$K_{A_j}(v) \subset H^{\bar{n}} (j=1, 2, 3, 4)$ 인지를 조사한다.

정확한 판별은 (3.4)의 root space를 조사하여 얻을 수 있다.

이제 (정리 3.1)을 이용하여 극배치 제어기를 설계하는 과정을 기술하고자 한다.

스텝 1: 그림 2.1의 ϕ, σ_r 을 설정한다.

플랜트 계수의 공칭치를 각각 $\bar{a}_i, \bar{\beta}_i$ (대응되는 다항식근은 $\bar{A}(s), \bar{B}(s)$ 로 표기함)라 하고, D -영역 내에 설정해주는 페루프 특성다항식을 $T_0(s)$ 라 정의한다.

$$\begin{aligned}
 T_0(s) &= (s+\bar{s}_1)(s+\bar{s}_2)\cdots(s+\bar{s}_n) \\
 &= \sum_{i=0}^{\bar{n}} t_i s^i \quad (3.6)
 \end{aligned}$$

여기서 \bar{s}_i 는 D -영역내에 놓이는 특성근이며, 극배치 영역을 결정하기 위해 초기에는 적어도 공역 근 한쌍을 L_1 또는 L_2 선상에 놓이도록 설정해 준다.

스텝 2: 식(2.12)로부터 공칭모델에 대한 식은

$$\bar{A}(s)D(s) + \bar{B}(s)N(s) = T_0(s) \quad (3.7)$$

식(3.6)을 벡터-행렬 형태로 다시 쓰면

$$\bar{S}X = Y \quad (3.8)$$

여기서, \bar{S} 는 Sylvester matrix이고 X 는 제어기 계수 벡터이다.

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_{00} & \cdots & 0 & \bar{\beta}_{00} & \cdots & 0 \\ \bar{\alpha}_{10} & \bar{\alpha}_{00} & \cdots & 0 & \bar{\beta}_{10} & \bar{\beta}_{00} & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{\alpha}_{20} & \bar{\alpha}_{10} & \bar{\alpha}_{00} & \cdots & 0 & \bar{\beta}_{20} & \bar{\beta}_{10} & \bar{\beta}_{00} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{\alpha}_n & \cdots & \bar{\beta}_m & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \bar{\alpha}_n & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \bar{\beta}_n & \end{bmatrix}, \quad \bar{S} \in \mathbf{R}^{n \times n} \quad (3.9)$$

$$X^T = [d_0 d_1 \cdots d_1 \quad n_0 n_1 \cdots n_p] \quad (3.10)$$

$$Y^T = [t_0 t_1 \cdots t_n] \quad (3.11)$$

2.2절의 coprime가정에 의해 \bar{S} 는 정칙행렬이므로 (3.8)의 해는 유일하게 존재하며, 계수 섭동이 없으면 페루프 근은 $T_0(s)$ 의 근으로 지정된다.

스텝 3 : <스텝 2>에서 구한 제어기의 전달함수와 플랜트의 계수 섭동에 대해 식(2.13)의 특성다항식 $\Delta(s)$ 를 구하고, IPF로 나타나면 <정리 3.1>과 <부연 3.1>에 의해 D -안정을 판별한다.

스텝 4 : 계수섭동에 의해 만족되지 않으면 $T_0(s)$ 의 설정근의 위치를 좌측으로 평행이동시키기 위해 다음의 선형변환을 한다.

$$T(v) = T_0(s = v + \sigma) = \sum_{i=0}^{\bar{n}} \eta^i v^i \quad (3.12)$$

$$(\sigma > 0, \sigma \in \mathbf{R})$$

식(3.12)를 (3.8)에 적용하면

$$Y_V^T = [\eta_0 \eta_1 \cdots \eta_{\bar{n}}] \quad (3.13)$$

$$X_V = \bar{S}^{-1} Y_V \quad (3.14)$$

이때의 특성다항식은

$$\begin{aligned} \Delta(s) &= A(s)D_v(s) + B(s)N_v(s) \\ &= \delta_{\bar{n}}(q)s^{\bar{n}} + \delta_{\bar{n}-1}(s)s^{\bar{n}-1} + \cdots + \delta_0(q) \end{aligned} \quad (3.15)$$

여기서 $D_v(s), N_v(s)$ 는 식(3.14)에서 구한 X_V 에 의한 제어기 전달함수이다.

스텝 5 : 식(3.15)에 대해 <스텝 3>의 D -안정도를 판별하여, 만족되지 않으면 δ 를 증분시키면서 <스텝 4>를 반복한다. 만족시의 σ 를 σ_a 라 놓으면 공칭모델에 근거한 상수이득 제어기의 극배치 영역은 그림 3.1과 같이 D -영역의 경계를 $-\sigma_r$ 에서 $-\sigma_a$ 까지 평행이동시킨 D_r 범위내로 결정된다.

D -영역내에 근이 존재하는 \bar{n} 차 다항식근을 $H_D^{\bar{n}}$ 라 정의하면 다음 정리가 성립된다.

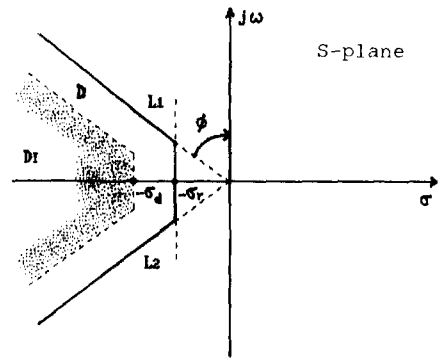


그림 3.1 IPF의 극배치 영역.
Fig. 3.1 Pole assignment region for IPF.

정리 3.2 : 계수 섭동을 갖는 선형계 (2.9)~(2.10)은 식(3.12)의 극배치 제어하에 $T_0(s)$ 가 D -영역내에 근을 갖도록 설정하면, $P_{D_r}^n \subset H_D^n$ 을 만족하는 유한크기의 translation상수 σ 가 존재한다.

증명 : 다항식 $P(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i$ 의 근은 다음 반경의 원내에 존재한다. [14]

$$r_i = 1 + \max\{|a_i/a_n|, i=0, 1, \dots, n-1\} \quad (3.16)$$

식(3.1)의 IPF의 모든 다항식은 4개의 Kharitonov다항식에 의해 한정되므로, $P_{D_r}^n$ 의 모든 다항식근은 식(3.16)으로부터 다음 반경내에 존재한다.

$$r_i = 1 + \frac{\max\{|\bar{\delta}_k^i|, i=1, 2, 3, 4; k=0, 1, 2, \dots, \bar{n}\}}{\min\{|\delta_{\bar{n}}^i|, i=1, 2, 3, 4\}} \quad (3.17)$$

여기서, $\bar{\delta}_k = \delta_k^+ + j\delta_k^-$ 또는 $\delta_k^- - j\delta_k^+$ 이다.

선형변환 $T_2(\cdot) : T_0(s) \rightarrow T(v)$ 은 근의 섭동중심을 D -영역의 경계로부터 σ 만큼 멀리 이동시키므로, 유한반경 r_i 의 root space가 D -영역 내부에 놓일 수 있는 유한크기의 σ 가 존재하게 된다.

부연 3.2 : 식(3.6)에서 초기의 페루프근을 D -영역내의 임의점에 설정하여 <스텝 3>의 D -안정도가 만족되면 <스텝 4>의 식(3.12)에서 $\sigma < 0$ 로 (즉, negative increment) 증분시키면서 그림 3.1과 같은 D_r -영역을 결정할 수 있다.

3.2 1차 종속 계수섭동에 대한 강인한 극배치 제어

식(2.13)의 특성다항식이 polytopic polynomial $\Delta_p(s)$ 이고 그 다항식근을 $P_{D_p}^n$ 라 정의한다.

$$\Delta_p(s) = \sum_{k=0}^n \delta_k(q)s^k \quad (3.18)$$

$$q = [q_1, q_2, q_3, \dots, q_k]^T$$

$$q_i \in \Omega_C, k \leq n+m+2$$

PPF문제에서는 Kharitonov정리가 적용되지 않는다.

여기서는 Edge정리 (정리 2.2)에 근거한 극배치 영역 결정방법을 고려하고자 한다. 식(3.18)에 대한 exposed edges 다항식을 $P_{dp}(s)$ 라 하면

$$P_{dp}(s) = \{P_{dij}(s) = \lambda P_i(s) + (1-\lambda)P_j(s), \lambda \in [0, 1], i, j=1, 2, \dots, 2^k\} \quad (3.19)$$

(Edge 정리)는 (3.19)의 root spac를 복소평면에서 구하는 방식으로, λ 의 이산치 $\lambda_k = 1/N$ (N 은 단점간 샘플수에 대해 $P_{dij}(s)$ 의 근을 계산하게 된다.

먼저 식(3.18)이 3.1절의 극배치 설계과정의 시스템 1에 의해 주어진 특성다항식이라 가정하고 다음을 정의한다.

D -영역의 L_1 색터에 대응하는 감쇠계수: $\zeta_0 = \cos \theta_0$

$$P_{dij}(s, \lambda_k) \text{의 근: } S_{ijk} = \sigma_{ijk} \mp j\omega_{ijk} = R_{ijk} e^{j\theta_{ijk}}$$

$$\text{PPF } P_d^n \text{의 root spac: } \Omega_R$$

식(3.6)의 초기설정근중 D -영역경계에 놓이는 근: $S_i^* = R_i^* e^{j\theta}$

$$\Delta$$

$$\theta_M = \max\{\theta_{ijk} : S_{ijk} \in \Omega_R\}$$

$$\zeta_m = \cos \theta_m$$

$$\Delta$$

$$\sigma_m = \min\{\sigma_{ijk} : S_{ijk} \in \Omega_R\}$$

이제 PPF문제의 극배치 영역의 결정을 위해 3.1절의 스텝 3, 4를 다음과 같이 수정한 방법을 제안한다.

스텝 3-1: 그림 2.1위에 $P_{dp}(s)$ 의 Ω_R 를 나타내면 D -안정판별은 그대로 들어난다.

스텝 4-1: S_i^* 에 대해 다음을 계산한다.

$$\theta_p = \cos^{-1}(\zeta_0 + \zeta_c) \quad (3.20)$$

$$\sigma_p = \begin{cases} \sigma_r, & \sigma_r < \sigma_m \\ \sigma_m, & \sigma_m < \sigma_r \end{cases} \quad (3.21)$$

여기서, $\zeta_c = \zeta_0 - \cos \theta_M$ (3.22)

스텝 4-2: S_i^* 를 D -영역 경계상 몇개의 대표점에 이동시켜 스텝 2, 3-1, 4-1을 반복하고, 최소 θ_p , σ_p 를 각각 $\bar{\theta}_p$, $\bar{\sigma}_p$ 라 놓으면 PPF에 대한 극배치영역 D_p 는 그림 3.2와 같이 $L_{p1} = \cos \bar{\theta}_p$, $L_{p2} = -\bar{\sigma}_p$ 로 표현된다.

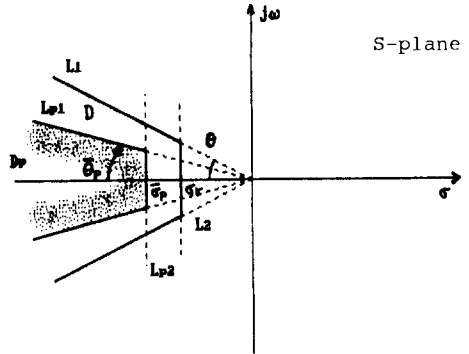


그림 3.2 PPF의 극배치 영역
Fig. 3.2 Pole assignment region for PPF

부연 3.3: 상기 극배치 영역결정 과정에서 스텝 4-1, 4-2대신 3.1절의 스텝4에 의해서도 구할 수 있다. 이러한 방법들은 하나의 충분조건에 근거한 것이므로 결정된 극배치 영역이 실제 보다는 줄어들 수 있다.

3.3 적용예 : 흡인식 자기부상 시스템의 부상제어

그림 3.3의 단자석 부상시스템 (Single magnet levitation system : SMLS)에서 누설 자속과 전자석의 자기저항을 무시하면 전기적, 기계적 운동의 평형관계로부터 다음의 nonlinear dynamic model 이 구해진다. [18]

$$\ddot{z}(t) = -\frac{\mu_0 N^2 A}{4m} \left[\frac{i(t)}{z(t)} \right]^2 + \frac{1}{m} f_a(t) + g \quad (3.23)$$

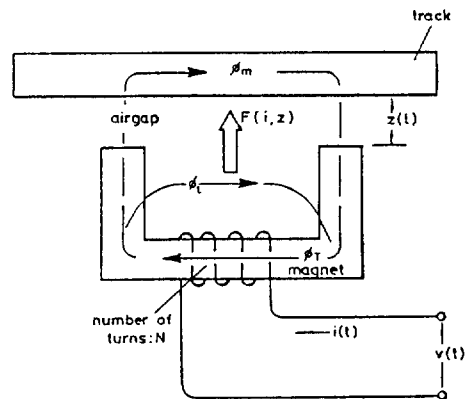


그림 3.3 단자석 부상 시스템.
Fig. 3.3 Single magnet levitation system.

$$i(t) = \frac{\dot{z}(t)i(t)}{z(t)} + \frac{2z(t)}{\mu_0 N^2 A} [v(t) - Ri(t)] \quad (3.24)$$

여기서, Z 는 공극, F 는 흡인력, m 은 전자석의 중량, A 는 면적, f_a 는 외란을 나타낸다. R 는 권선 저항에 전원장치의 증폭기 출력저항 포함한다.

평형점 (i_0, z_0) 에서 미소섭동에 대한 선형근사화 모델을 구하면 다음과 같다.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Df_d(t) \quad (3.25)$$

여기서,

$$x(t) = [\Delta z(t) \Delta \dot{z}(t) \Delta i(t)]^T$$

$$u(t) = \Delta v(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ k_z/m & 0 & -k_i/m \\ 0 & k_z/k_i & R/L_0 \end{bmatrix},$$

$$B = [0 \ 0 \ 1/L_0]^T,$$

$$D = [0 \ 1/m \ 0]^T$$

다음 상태피드백 제어기를 고려한다.

$$u(t) = -h_p \Delta z(t) - h_v \Delta \dot{z}(t) - h_a \Delta \ddot{z}(t) \quad (3.26)$$

$$H = [h_p \ h_v \ h_a]$$

폐루프 시스템의 특성다항식은

$$\Delta(s) = s^3 + \left(\frac{R}{L} - \frac{K_i h_a}{mL}\right) s^2 - \left(\frac{K_i h_v}{mL}\right) s - \left(\frac{K_i h_p + RK_z^1}{mL}\right) \quad (3.27)$$

원하는 특성다항식을 다음식으로 표현한다.

$$T_0(s) = (s + \alpha)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) = (s + s_1)(s + s_2)(s + s_2^*) \quad (3.28)$$

극배치 방식에 의해 공칭모델 $\Delta_0(s)$ 가 $T_0(s)$ 가 되도록 고정 피드백 이득 H 를 구하면 다음과 같다.

$$h_p = -\frac{1}{K_i} [\alpha\omega_n^2 m_0 L_0 + RK_z] \quad (3.29)$$

$$h_v = -\frac{m_0 L_0}{K_i} [\omega_n^2 + 2\zeta\omega_n \alpha]$$

$$h_a = -\frac{m_0 L_0}{K_i} \left[2\zeta\omega_n + \alpha - \frac{R}{L_0} \right]$$

무게 m 과 인덕턴스 L 에 대해 uncertainty를 고려하면,

$$m = m_0(1 + W_m) = m_0 + \Delta m \quad (3.30)$$

$$(W_m = \Delta m / m_0)$$

$$L = L_0(1 + W_L) = L_0 + \Delta L \quad (3.31)$$

$$(W_L = \Delta L / L_0)$$

m, L 의 uncertainty를 (3.27)의 특성다항식 계수의 섭동으로 나타내면 다음과 같다.

$$q_1 \triangleq \frac{\Delta K_i'}{m} = \frac{K_i}{m_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_m}} \quad (3.32)$$

$$q_2 \triangleq L = L_0 \cdot (1 + \omega_L) \quad (3.33)$$

$$\omega_m \in [\omega_m^-, \omega_m^+], \omega_L \in [\omega_L^-, \omega_L^+], \quad (3.34)$$

윗식으로부터

$$q_1^+ = q_1(\omega_m^-), q_1^- = q_1(\omega_m^+)$$

$$q_2^+ = q_2(\omega_L^+), q_2^- = q_2(\omega_L^-) \quad (3.35)$$

여기서 +, -첨자는 변수의 상, 하한치를 나타낸다. 이때 식(3.27)은

$$\Delta(s) = q_2 s^3 + (R - h_a q_1) s^2 - q_1 h_v s - \left(q_1 h_p + \frac{k_z}{m_0} \cdot R \right) \quad (3.36)$$

식(3.36)은 uncertain parameter $q = [q_1 \ q_2]^T$ 가 식

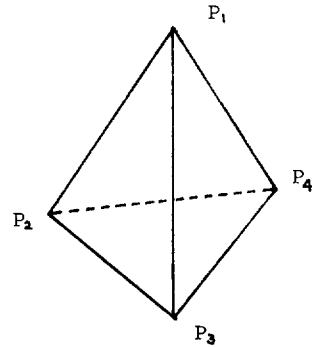


그림 3 Polytopic polynomial family
Fig. 3.4 Polytopic polynomial family

표 1 단자석 시스템의 파라미터
Table 1 System Parameters for the single magnet.

parameters	symbols	values
동작점 (i_0, Z_0)	i_0	2[A]
	Z_0	1.5[mm]
magnet의 질량	m_0	44/9.8[kg]
저항	R_0	7[Ω]
인덕턴스	L_0	33×10 ³ [H]
공극계수	k_z	58×10 ³ [N/m]
전류계수	k_i	44[N/A]

(3.35)의 섭동을 가질 때 $\Delta(s)$ 는 polynomial polytope으로 나타난다.

이제 Edge정리를 적용해 보면 식(3.32)~(3.36)으로 부터 2²개의 단점다항식이 표현된다. (그림 3.4)

$$\begin{aligned} P_1(s) &= \Delta(s, q_1^+, q_2^+) \\ P_2(s) &= \Delta(s, q_1^+, q_2^-) \\ P_3(s) &= \Delta(s, q_1^-, q_2^+) \\ P_4(s) &= \Delta(s, q_1^-, q_2^-) \end{aligned} \quad (3.37)$$

이제 수치예를 들어 3.2절의 극배치 설계방법을 적용한 시뮬레이션결과를 보이고자 한다.

표 1은 3kg SMLS모델 [18] 데이터이다. 그림 3.1의 D -영역을 $\theta_0=45^\circ$, $\sigma_r=100$ 으로 설정한다. open-loop poles은 94.53, $-153.33 \pm j74.02$ 에 나타나고 플랜트 계수의 공칭치에 대해 페루프 특성근이 70.7%의 감쇠율과 외란에 대해 영점소거가 이루어지도록 설계하면 (3.29)로 부터 상태 피드백 이득 H 는 다음과 같다.

$$H = [hp \ hv \ ha] = [-4.518 \times 10^4 \quad -401.0317 \quad -1.0776]$$

이경우 공칭 페루프 극은 -212.12 , $-160 \pm j160$ 이다. 부상중량 m 의 uncertainty를 m_0 에 대해 $-20\% \sim 30\%$ 로, 인덕턴스는 공극의 변화가 동작점에서 $\pm 20\%$ 로 보고 $\omega_L = -17 \sim 25\%$ 로 가정하였다.

식(3.25)으로 부터

$$\begin{aligned} q_1^+ &= q_1(w_m^-) = 10.957 \\ q_1^- &= q_1(w_m^+) = 8.595 \end{aligned} \quad (3.38)$$

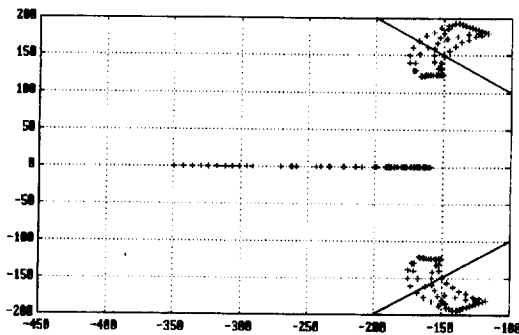


그림 3.5 mass change : $-20\% \sim +30\%$, inductance change : $-17 \sim 25\%$ 일때 페루프 시스템의 root space

Fig. 3.5 Root space of the closed loop system in the case of mass change : $-20 \sim 30\%$, inductance change : $-17 \sim 25\%$.

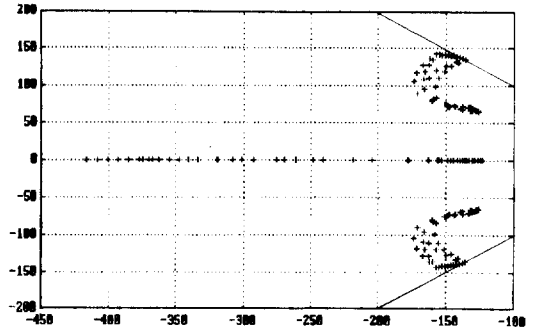


그림 3.6 강인한 극배치 제어기에 의한 페루프 시스템의 root space.

Fig. 3.6 Root space of the closed loop system with a robust pole assignment controller.

$$\begin{aligned} q_2^+ &= q_2(w_L^+) = 49.845 \times 10^{-3} \\ q_2^- &= q_2(w_L^-) = 27.39 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

그림 3.5은 식(3.19), (3.37)에 의한 페루프 시스템의 root space를 보여주는 것으로 uncertainty에 대해 D -안정도가 만족되지 못함을 보여주고 있다.

3.2절의 스텝 3-1, 4-1, 4-2을 3회반복 수행하면 $\bar{\theta}_p = 27.06^\circ$ 이다. 따라서 식(3.28)에서 $\zeta = 0.8905$ 에 대해 $\zeta\omega_n = -160$ 으로 같게 놓고 재 설계된 피드백 이득은 다음과 같다.

$$H = [-3.2286 \times 10^4 \quad -3.3700 \times 10^2 \quad -1.0776]$$

h_p 크기가 현저히 줄어들었으며, 이때의 root space는 그림 3.6과 같다. 주어진 섭동(3.38)에 대해서 페루프 근이 D -영역내에 놓임을 보여준다. 공액근이 D -영역내로 압축되면서 실수축상의 근의 분포가 넓게 확대됨은 주목할 만 하다.

4. 결 론

선형제어계의 구조적 불확실성에 대한 강인한 극배치 제어에 관한 문제를 다루었다. 매개변수 공간에서의 대수적 접근방식인 Kharitonov like stability를 이용하여 플랜트 계수의 주어진 섭동에도 불구하고 요구되는 안정도 여유와 감쇠특성을 만족시키는 상수이득(fixed gain)제어기의 극배치 영역결정에 관한 한 방법을 제시하였다.

페루프 특성다항식이 uncertain parameters에 대해 1차 독립인 경우(IPF)와 1차 종속인 경우

(PPF)로 나누어 접근하였으며, 이러한 영역결정은 복소평면상에서 2개변수에 의해 결정되어야 하나 본 논문에서는 간단한 방법으로서 2종의 선형 변환을 이용하여 실수축상 단일변수로 처리하였다. 매개변수 섭동에 따른 제어성능의 정량적 해석은 포함되지 않았다. 이러한 매개변수적 접근방법은 플랜트 특성에 대해 경험적으로 알고 있거나 상정해줄 수 있는 물리적인 계수들의 불확실성을 고려해 줄 수 있기 때문에 실제 제어기 설계시 매우 유용하다. 한 예로서, 무게와 인덕턴스에 대해 유한범위내에서 불확실성을 갖는 흡인식 자기부상 시스템의 강인한 상태 피드백 제어기의 설계문제에 적용하였다. 이와 유사한 응용분야로서, 로봇, cranes, 선박, 미사일, space vehicles, 항공기 등에도 용이하게 적용될 수 있을 것이다.

후기로서 본 논문의 연구범위와 매우 유사한 Soh의 결과[20]를 본 논문의 심사중에 알게되었으나, 본 논문은 Soh보다 앞서 발표한 김영철 등의 예비논문[21]을 수정보완한 결과이다. 본 논문에서는 동일한 문제설정에 대해 특성다항식근의 Kharitonov like stability에 근거한 반면, Soh [20]는 특성다항식의 매개변수공간에서 최적화 기법을 적용한 것으로 접근 방식에서 근본적으로 다르다고 보며, 두 방법의 상세한 비교검토는 추후과제로 한다.

이 논문은 1990년도 문교부지원 한국학술진흥재단의 자유공모과제 학술연구조성비에 의하여 연구되었음.

참 고 문 헌

[1] Doyle, J., "Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis," IEEE Tr. Automatic Control, Vol. AC-26, no. 1, pp. 4~6, 1981.

[2] Doyle, J., "Anaiysis of Feedback Systems with Structured Uncertainties," IEEE Proc. Vol. 129, Pt. D. No. 6, pp. 242~250, 1982.

[3] M. Bidasagar, Control System Synthesis: A Factorization Approach, M.I.T. Press, 1985.

[4] V.L. Kharitonov, "Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of system of linear differential equations." Differentsial' nye Uravneniya, Vol. 14, No. 11, pp. 2086~2088, 1978.

[5] D.D. Siljak, "Parameter space methods for Robust Control Design: A Guided Tour," IEEE Trans. Automat. control, Vol. AC-34, No. 7, pp. 674~688, 1989.

[6] B.R. Barmish, "New Tools for Robustness Analysis," proceeding of IEEE Conf. Decision, Control, Austin, pp. 1~6, 1988.

[7] 김영철, "Robust stability에 대한 매개변수적 접근방식의 연구동향: Kharitonov정리와의 확장," 전자공학회지, Vol. 17, No. 3, 1990.

[8] J. Ackermann, "Design of Robust Controllers by Multi-Model Methods," in Modeling, Identification and Robust Contrl, (Ed) C.I. Baynes and A. Lindquist, North-Holland, 1986.

[9] B.K. Ghoshand C.I. Byrnes, "Simultaneous Stabilization and Simultaneous Pole-placement by nonswitching dynamic compensation," IEEE Trans. Auto. Contr. Vol. AC-28, pp. 735~741, 1983.

[10] K. Wei, et al. 1, "Robust stabilizability for linear systems with both parameter variation and unstructuerd uncertainty," IEEE Trans. Automat. Control, Vol. AC-34, No. 2, pp. 149~156, 1989.

[11] B.R. Barmish, "Invariance of the strict Hurwitz property for polinomials with perturbed coefficients," IEEE, AC-29, pp. 935~936, No. 10, 1984.

[12] A.C. Bartlett, et al. 2, "Root locations of an entire polytope of polynomials: it suffices to check the edges," Proc. Amer. Contr. Conf., pp. 1611~1616, Minnespolis, 1987.

[13] A.C. Bartlett, et al. 1, "A necessary and sufficient condition for Schur invarience an degeneralized stability of polytopes of polynomials," IEEE, AC-33, No. 6, pp. 575~578, 1988.

[14] B.R. Barmish, "A generalization of Kharitonov's four-polynomials concept for robust stability problems with linearly dependent coefficient perturbations," IEEE, AC-34, No. 2, pp. 157~165, 1989.

[15] H. Chapellat, S.P. Bhattacharryya, "A generalization of Kharitonov's theorem: Robust stability of interval plants," IEEE, AC-34,

- No. 3, p. 306~311, 1989.
- [16] Bose, N.K., et al. 1, "A simple general proof of Kharitonov's generalized stability criterion," IEEE Trans. Circuits and Systems, Vol. 34, No. 8, pp. 1233~1237, 1987.
 - [17] Rockafellar, R.T., convex analysis, Princeton Univ. Press, 1972.
 - [18] 김영철, "자기부상 시스템의 강인한 제어에 관한 연구," 연구보고서, 한국전기연구소, 1991. 7.
 - [19] F.R. Gantmacher, The theory of matrices, Vol. II, Chelsea, 1960.
 - [20] Y.C. Soh, "Robust pole-placement for uncertain interval systems," IEEE Proc. Vol. 136, Pt. D, No. 6, pp. 301~306, Nov., 1989.
 - [21] 김영철, 박용식, 양홍석, "구조적 불확실성을 갖는 프로세스의 Robust control," '89한국 자동제어 학술회의 논문집, Vol. 1, pp. 457~460, 10. 1989.

저 자 소 개

김영철 (金永喆)

1954년 12월 29일생. 1981년 고려대 공대 전기공학과 졸업. 1983년 서울대 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1987년 동 대학원 전기공학과 졸업(공박). 현재 충북대 공대 전자공학과 조교수.