醫工學會誌 : 第 13 卷, 第 4 號, 1992
J. of KOSOMBE : Vol. 13, No. 4

研 究 論 文
92 - 13 - 4 - 05

전염병의 모델에 있어서 파라메타 값에 관한 수치해석적 연구

최부귀* · 김성대** · 이상관** · 정형환***

= Abstract =

A Numerical Study for Various Values of the Parameters in the Model of Infection

Boo-Kwi Choi*, Sung Dae Kim*, Sang-Kwan Lee**, Hyeng-Hwan Chong***

This paper considers a model for the spread of an infection of the type proposed by K. L. Cooke. The model involves a threshold for becoming infective that lead to functional rather than ordinary differential equations. Three type of result presented.

In sections 3, and 4 the dependence of the solution on parameters in the model is studied numerically.

1. 서 론

특정한 전염에 감염가능자 S_0을 고찰하는 것이다. 시간 t=0에서 감염자는 인구속에 가산되어 있다. K.L.Cooke[2]가 제시한 규칙에 의해서 인구속으로 전염되어 가는 전염병을 연구하는 것이다. 병의 감염은 개인이 발병되기 전에 반드시 일어나는 발단(threshold)에 도달해야 되므로, 모델은 Bailey[1]가 생각한 것과는 근본적으로 다르다. 발단 모델의 중요성은 K.E.F.Watt[4]가 지적하고 있다.

발단은 시간 지연(lag)을 가져오는 영향을 주고, 또 이것은 상미분방정식(ordinary differential equation)보다도 함수적 방정식(functional)이다.

본 논문에서는 2장에서 기본 모델을 설명한다. 그리고 3장과 4장에서 모델에서 파라메타에 대한 해석을 수치적으로 연구하였다.

<접수 : 1992년 12월 31일>
* : 동아대학교 공대 전자공학과 교수
** : 동아대학교 대학원 전자공학과 박사과정
*** : 동아대학교 공대 전기공학과 교수
* : Dept. of Electronics Eng., Dong-A Univertisy
** : Dept. of Electronics Eng., Dong-A Univertisy
*** : Dept. of Electrical Eng., Dong-A University

2. 전염병의 기본모델

시간 t=0에서 초기감염자 I_0은 동차사항(homogeneous way)으로 초기 감염가능자 S_0에 가산되고 있다고 생각된다. t≥0에서는 전체인구는 4개 범주(감염자: I(t), 감염가능자: S(t), 잠복기에 있는 자: E(t), 면역자: R(t))로 분류된다. 한개인이 감염되면 마지막 면역되는 상태로 이동되는 것이 명백하다. 전체인구는 식(1)과 같이 일정하게 된다.

$$N = I_0 + S_0 = I(t) + R(t) + S(t) + E(t), \quad t \geq 0 \tag{1}$$

인구를 통하여 전염병의 유포는 아래와 같은 규칙에 의해서 지배된다.

① t에서 발병된 개인의 $t+\sigma$에서 회복된다.

이것은 모든 개인은 발병후 얼마시간 후 회복되는 것을 의미한다.

② 한 개인은 회복되면 병에 면역된다.

특히 R(t)은 증가하는 함수이고, 그리고 S(t)은 감소하는 함수이다. 감염된 사람들이 발병하기전기에, 병에 대한 부약을 한다. 감염된 개인이 받은 부약은 경과시간 h에서 식(2)과 같이 된다.

$$\int_{t}^{t+h} \rho(\chi)\, I(\chi) d\chi \tag{2}$$

여기서 ρ>0은 잘 알려진 확율함수이다. 투약은 h와 발병 인구 크기에 비례한다. 그래서, 우리는 아래와 같은 가정을 한다.

③ 만약 식(3)이 되며, 시간 τ에서 전염병에 감염된 개인은 t에서 발병된다.

$$\int_{\tau}^{t} \rho(\chi)\, I(\chi) d\chi = m \tag{3}$$

여기서 m>0이며 항상 일정하다. (이것이 다른 결정론적 모델로 부터 구별되는 조건이다.

④ 감염가능자의 감소비율을 감염자수와 감염가능자 수에 비례한다.

$$\frac{dS}{d\chi} = -r(T)\, I(t)\, S(t) \tag{4}$$

여기서 r>0며, 알려진 비례함수이다.

위의 기술에서, I_0은 감염가능자 인구속에서 취급하고 있다. 이점에서 두가지 경우로 분류할 수 있다. 첫째 I_0은 전염병의 매개체로 취급한다. 이들은 모델에서 생각하는 시간동안 다른사람에게 전염을 계속시킨다. Cooke'에 의해 제시된 모델은 이것이다.

다음 만약 I_0가 규칙 ①을 따른다면 외관상 흥미있는 일이 있다. t=0을 향한 I_0의 과거는 이해가 되며, 이 감염자는 t=σ에서 모두 회복된다. I_0의 과거는 $I_0(-\sigma)=0$와 $I_0(0)=I_0$가 되는 $-\sigma \le t \le 0$에서 증가 함수 $I_0(t)$에 의해 설명된다. 이와 같은 I_0은 함수(function)로써 취급될 것이다.

수학적 문제에 관하여서는 어떤 연속함수(continuous function)을 초기조건으로 사용한다.

편의 때문에, $0 \le t < \infty$으로 이 함수를 확대 시키면 식(5)가 된다.

$$\begin{aligned} I_0(t) &= I_0(0) - I_0(t-\sigma), \quad 0 \le t \le \sigma, \\ &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad , \sigma < t < \infty \end{aligned} \tag{5}$$

이와같은 이유로써 $\int_0^t \rho(\chi)\, I(\chi) d\chi < m$ 동안은 $I(t)=I_0(t)$이고, 이와같은 t 동안은 원 감염가능자 누구나 감염되도록 규칙 ③에 규정된 투약을 하지 않는다.

$$\text{만약} \int_0^t \rho(\chi)\, I_0(\chi) d\chi < m, \tag{6}$$

이며, 전염은 인구속에서 퍼지지 않는다. 그러므로 $t_0 < \sigma$가 존재한다고 가정해서 식(7)이 된다.

$$\int_0^t \rho(\chi)\, I_0(\chi) d\chi = m, \tag{7}$$

전염의 모델은 두 간격(interval)으로 설명되고 있다.

$0 \le t \le t_0$로써 원 감염자 누구든지 아직 감염되지 않는 간격과 $t_0 \le t < \infty$이다.

$0 \le t \le t_0$ 간격에서 문제는 식(8)~(11)과 같이 곧 풀수 있다.

$$I(t) = I_0(t) \tag{8}$$

$$R(t) = I_0(t-\sigma) \tag{9}$$

$$S(t) = S_0 \exp\left(-\int_0^t r(\chi)\, I(\chi) d\chi\right) \tag{10}$$

$$E(t) = N - R(t) - I(t) - S(t) \tag{11}$$

$t \ge t_0$에서, $\tau(t)$은 식(12)에 의해 규정된다.

$$\int_{\tau(t)}^{t} \rho(\chi)\, I(\chi)\, d\chi = m \tag{12}$$

$\tau(t)$은 이같은 형식에 의해 유일하게 규정된 것이라는 것을 나중에 알게 될 것이다.

$[t_0, t_0+\sigma]$에서 면역자는 $I_0(0)$에서 최초 사람을 제외하고는 발생하지 않는다. 그래서 감염인구는 $I_0(t)$에 $\tau(t_0)=0$와 $\tau(t)$사이에 처음 나타낸 사람을 더한 것이다. $t_0 \le t \le t_0+\sigma$사이에서 그것은 식(13)이다.

$$\begin{aligned} I(t) &= I_0(t) + S(\tau(t_0)) + S(\tau(t)) \\ &= I_0(t) + S_0 - S(\tau(t)) \end{aligned} \tag{13}$$

여기서 $S(\tau(t_0)) = S(0) = S_0$이다.

$t \ge t_0+\sigma$에서, $I_0(t)=0$ 그리고 새로운 면역자를 고려해야 한다. t에서 발병되었다면, $\tau(t)$전에 감염되었으면 틀림없다. 그러므로, 만약 개인이 $\tau(t-\sigma)$전에 감염되었다면, 그는 $t-\sigma$에서 발병되고, t에서 면역된다. 그래서 $t \ge t_0+\sigma$에서 식 (14)가 된다.

$$I(t) = S(\tau(t-\sigma)) - S(\tau(t)) \tag{14}$$

우리가 생각할 수 있는 모델은 식(15)~(17)로써 쓸 수 있다.

$$\int_{\tau(t)}^{t} \rho(\chi)\, I(\chi) d\chi = m \tag{15}$$

$$S'(t) = -r(t)\, I(t)\, S(t),\ S(0) = S_0,\ \left(' = \frac{d}{dt}\right) \tag{16}$$

$$\begin{aligned} I(t) &= I_0(t), && -\sigma \le t \le t_0 \\ &= I_0(t) + S_0 - S(\tau(t)), && t_0 \le t \le t_0+\sigma \\ &= S(\tau(t-\sigma)) - S(\tau(t)), && t_0+\sigma \le t < \infty \end{aligned} \tag{17}$$

함수 $I(t)$은 이 모델에서 제거할 수 있다. 예로써, $t \geq t_0 + \sigma$에서,
식 (18), (19)로 된다.

$$\int_{\tau(t)}^{t} \left[\frac{\rho(\chi) S'(\chi)}{r(\chi) S(\chi)} \right] d(\chi) = -m \quad (18)$$

$$S'(t) = -r(t) S(t)[S(\tau)(t-\sigma)) - S(\tau(t))] \quad (19)$$

식(19)은 한 간격동안 τ을 알수 없는 함수적 미분방정식이다.

3장에서, $\frac{\rho}{r}$을 일정하게 두고 식(18), (19)을 수치해석적 연구에 사용한다.

보균자 경우에서, 면역되지 않은 초기감염자 I_0로 가정한다. 그러면 모델은 식 (15), (16) 그리고 식(20)으로 된다.

$$\begin{aligned} I(t) &= I_0, & 0 \leq t \leq t_0 \\ &= N - S(\tau(t)), & t_0 \leq t \leq t_0 + \sigma \\ &= I_0 + S(\tau(t-\sigma) - S(\tau(t)), & t_0 + \sigma \leq t \end{aligned} \quad (20)$$

이것은 식(15)~(17)보다 다루기가 편하다.
$I(t)$와 $S(t)$가 결정되면, $R(t)$와 $E(t)$는 식(21), (22)로 결정된다.

$$R(t) = \begin{cases} I_0(t-\sigma), & 0 \leq t \leq \sigma \\ I_0 & \sigma \leq t \leq t_0 + \sigma \\ I_0 + S(0) - S(\tau(t-\sigma)), & t \geq t_0 + \sigma \end{cases} \quad (21)$$

$$E(t) = N - I(t) - R(t) - S(t) \quad (22)$$

3. 기본 모델의 특수경우 수치해석

$0 \leq t \leq \infty$에서 $\rho(t)/r(t) = k$로 일정한 경우 생각해 보자.

편의 때문에 $\mu = m/k$로 규정한다. 또, 방정식(18)로 부터 식(23)을 얻는다.

$$\int_{\tau}^{t} \frac{S'(\chi)}{S(\chi)} d\chi = -\mu$$

$$S(t)e^{\mu} = S(\tau(t)) \quad (23)$$

식(19)에서 $\tau(t)$ 대신 식(23)을 사용한다.
결과는 $(t, t_0+\sigma)$에서 $S(t)$에 관한 상미분방정식(ordinary differential equation)이고, $[t_0+\sigma, \infty]$에서 계차방정식(differential-difference equation)이다. 그래서 식(24)이 된다.

$$S'(t) = \begin{cases} -r(t)I_0(t)S(t), & 0 \leq t \leq t_0 \\ -r(t)S(t)[I_0(t) + S_0 - e^{\mu}S(t)], & t_0 \leq t \leq t_0 + \sigma \\ -r(t)e^{\mu}S(t)[S(t-\sigma)) - S(t)], & t_0 + \sigma < t < \infty \end{cases} \quad (24)$$

$S(t)$의 값은 $0 \leq t \leq t_0$와 $t_0 \leq t \leq t_0 + \sigma$에서 즉시 결정할 수 있다.

나중단계에서 $S(t)$에 관한 초기함수에 의존되며, 계차방정식은 계단법 사용에 의해 풀 수 있다. 결과는 그림 1~6까지 나타내고 있다. 초기 인구는 각 경우에 10 단위법으로 하였다.

그림 1과 2은 $I_0(t) = 0.4$과 r은 변하며, 방면 σ, ρ, m은 고정된 경우 감염자와 감염가능인구를 보인것이다. 그림 3과 4는 $t_0 = 2$로 두고 σ, ρ, m은 고정하고 r은 변화시킬 때의 응답곡선이다. 이때 $I_0(t) = 0.15$이였다. Fig. 1과 3은 거의 유사하다. r을 점차 감소시키며 감염자의 최대값은 점차 감소되고, 최대값을 나타내는 최대값은 지연되고 있다. 그림 2과 4에서 $S(t)$값은 $t \to \infty$로써 무한대로 향하는 경향이 있다. 그래서 $S(\infty)$문제가 있게 된다.

그림 5은 $I_0(t) = 0.4$로 하고 m, r, ρ은 고정시키고 그리고 σ은 변화시킬때 $I(t)$을 보인 것이다. σ을 줄이며 이동할 수 있는 시간을 줄이고 있다.

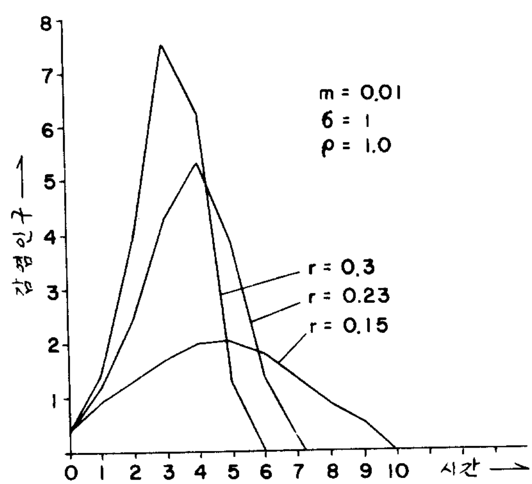

그림 1 σ, ρ, m은 고정된 반면 r은 변화시키고 그리고 $I_0(t) = 0.4$로 할때 감염자 연구

Fig. The infective populations with an initial infective population given by $I_0(t) = 0.4$, and with r being varied while σ, ρ, m are fiexed.

4. 근사해

여기서는 식(15), (16), (17)을 다시 고찰하고, 차원이 없는 파라메타를 발견하는 것이다. 파라메타

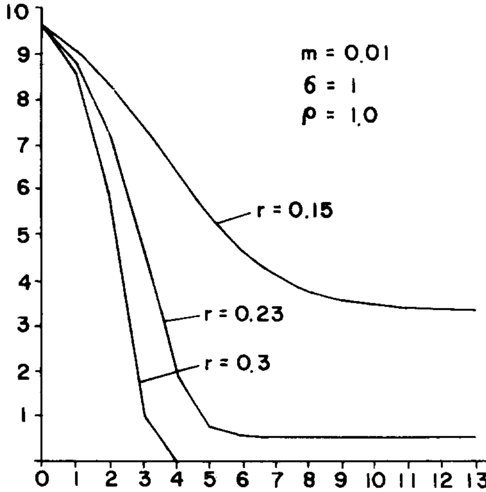

그림 2 σ, ρ, m은 고정된 반면 r은 변화시키고 그리고 $I_o(t)=0.4$로 할때 감염가능자 인구

Fig. 2 The susceptible populations with $I_o(t)=0.4$, and with r being varied while σ, ρ, m are fiexed.

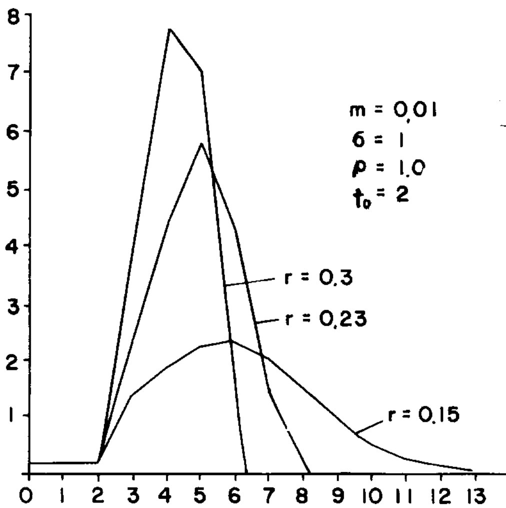

그림 3 σ, ρ, m, t_o은 고정된 반면 r은 변화시키고 그리고 $I_o(t)=0.15$로 할때 감염자 인구

Fig. 3 The infective populations with $I_o(t)=0.15$, and with r being varied while σ, ρ, m, t_o are fiexed.

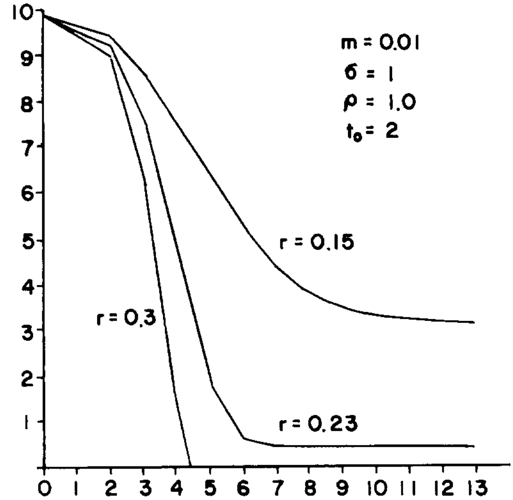

그림 4 σ, ρ, m, t_o은 고정된 반면 r은 변화시키고 그리고 $I_o(t)=0.15$로 할때 감염가능자 인구

Fig. 4 The susceptible populations with $I_o(t)=0.15$, and with r being varied while σ, ρ, m, t_o are fiexed.

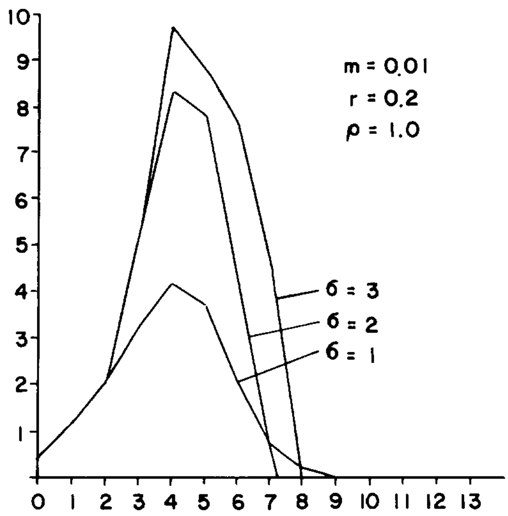

그림 5 m, r, ρ는 고정된 반면 σ는 변화시키고 $I_o(t)=0.4$에 대한 I(t) 응답곡선

Fig. 5 I(t) for an initial population $I_o(t)=0.4$, m, r, ρ fiexed, and σ varying

값에 관한 연구이다. r, ρ은 유계함수(bounded function)로 가정하자. 그러면 식(25)와 같이 규정짓는다.

$$r_o=\sup_{0\le t<\infty}(r(t)),\qquad \rho_o=\sup_{0\le t<\infty}\rho(t) \qquad (25)$$

지금, 식(26)와 같이 고정시킨다.

$$J(t)=r_o I(t),\ \Sigma(t)=r_o S(t),\ J(t)=r_o I_o(t),\ \Sigma_o=r_o S_o \qquad (26)$$

그러면 시스템 (15), (16), (17)은 식 (27), (28), (29)로 변한다.

$$\int_{\tau}^{t} \rho(\chi)\, J(\chi)\, d\chi = \mu \tag{27}$$

$$\Sigma'(t) = -r(t)J(t)\Sigma(t), \qquad \Sigma(0) = \Sigma_0 \tag{28}$$

$$\begin{aligned} J(t) &= J_0(t), & -\sigma \le t \le t_0 \\ &= J_0(t) + \Sigma_0 - \Sigma(\tau(t)), & t_0 \le t \le t_0 + \sigma \\ &= \Sigma(\tau(t-\sigma)) - \Sigma(\tau(t)), & t_0 + \sigma \le t < \infty \end{aligned} \tag{29}$$

여기서 $\rho(t) = \rho(t)/\rho_0$, $r(t) = r(t)/r_0$이고, $0 < \rho,\ r \le 1$ 을 만족한다.

이 시스템을 차원이 없는 파라메타 $\mu = m(r_0/\rho_0)$ 을 포함하고 있다.

r_0의 차원은 시간에 반비례(reciprocal)이고, m/ρ_0은 시간에 비례관계이다. μ을 이 두 시간척도(time scale)비로써 생각할 수 있다. μ의 값을 적게 해서 식(15), (16), (17)을 생각할 수 있을 것이다. 정식으로 $\mu = 0$로 두면, 식(30)을 얻는다.

$$\begin{aligned} &\tau^*(t) = t, \\ &\Sigma^{*\prime}(t) = -r(t)\, J^*(t)\Sigma^*(t), & \Sigma^*(0) = \Sigma_0 \\ &J^*(t) = J_0(t), & -\sigma \le t \le 0, \\ &\quad = J_0(t) + \Sigma_0 - \Sigma^*(t), & 0 \le t \le \sigma \\ &\quad = \Sigma^*(t-\sigma) - \Sigma^*(t) & \sigma \le t < \infty \end{aligned} \tag{30}$$

이 문제는 즉시 풀 수 있다. $0 \le t \le \sigma$에서 리카치 방정식(Ricatti equation)과 $\sigma \le t < \infty$에서 계차방정식(differential-difference equation)은 Σ^*에 대한 선과인데, 이것은 계단법에 의해서 풀 수 있다. 그림 6은 그림 1과 같은 계수로 근사값을 구해본 것이다.

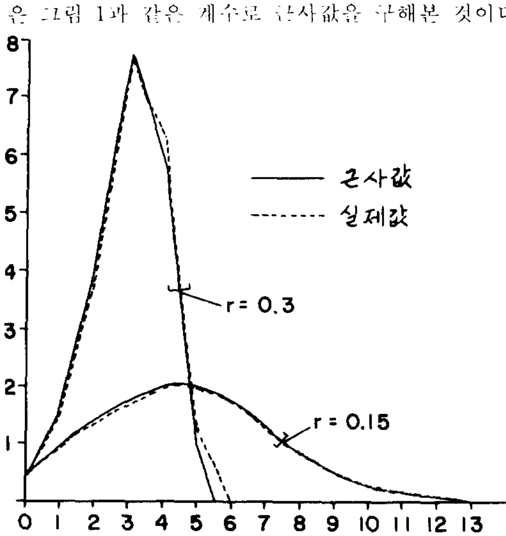

그림 6 파라메타 값이 그림 1과 같을 때의 근사값

Fig. 6 The result of approximate solution.

The parameter varied correspond to these in Fig.

5. 결 론

본 논문은 K.L.Cooke가 규칙에 의해 인구속으로 전염병이 퍼지는 모델에 관한 고찰이다. 이 모델은 상미분방정식이라기 보다는 함수적으로 이끄는 문턱값을 가지고 있다. 결과적으로 3형태로 이루어진 시스템을 제시하고 있으며, 파라메타값을 변화시키므로서 수치해석을 하여 보았다. 본 논문에서 그림들은 모델에서 파라메타 값 변화의 영향을 설명하고 있다.

참고문헌

1. N. T. J. Bailey: The mathematical theory of infectious diseases and its applications. Griffin, London, 1975
2. K. L. Cooke, Functional-differential equation: some models and perturbation problems, in Differential equation and dynamical systems. Academic press, New York, 1967
3. L. E. El'sgol'ts, Introduction to the theory of differential equations with deviating arguments. Holden-Day, San Francisco, 1966
4. K. E. F. Watt, Computer and the evaluation of resource management strategies, Amer. Sci. 52, pp. 408-418, 1964
5. 정형환 et al., pontragin 최소원리를 이용한 최적접종에 관한 연구 의공학회지, 제9권, 제1호, pp. 11-16, 1988
6. 정형환 et al., 초등급수 전개에 의한 유행병모델의 해법에 관한 연구 의공학회지. 제12권, 제3호, pp. 171-176. 1991