

〈論 文〉

# Navier-Stokes 方程式을 利用한 超音速 제트 推進 飛行體 後方의 流動解析

尹炳國\* · 鄭明均\*\*

(1991년 8월 19일 접수)

## Navier-Stokes Computations of Supersonic Flow over Missile Afterbodies Containing a Centered Propulsive Jet

Byung Kook Yoon and Myung Kyoon Chung

**Key Words :** Supersonic(초음속), Underexpanded Jet(과소팽창 분류), Baldwin-Lomax Turbulence Model, Beam-Warming Scheme, Adaptive Grid(적응격자계)

### Abstract

The strongly interactive flow field near a missile afterbody containing a centered exhaust jet is numerically investigated. The thin shear layer and full formulation of compressible, Reynolds averaged Navier-Stokes equations are solved. A time-dependent implicit numerical algorithm is used to obtain solution for a variety of flow conditions. Turbulence closure is implemented by the Baldwin-Lomax algebraic eddy viscosity model. An adaptive grid technique is adopted to resolve flow regimes with large gradients and to improve the accuracy and efficiency of the computation. Numerical results show good agreement with experimental data in all regimes.

### 기 호 설 명

$a$ : 음속	$Re$ : 레이놀즈數
$D$ : 로켓의 直徑	$t$ : 無次元化된 時間
$D_{e_i}, D_{i_e}, D_{i_v}$ : 人工 點性項	$T$ : 溫度
$e$ : 單位 體積당 總 에너지	$u, v$ : 速度의 $x$ 方向, $y$ 方向 成分
$E, F$ : 從屬 變數의 플럭스 벡터	$U, V$ : 座標 變換된 速度의 $\xi$ 方向, $\eta$ 方向 成分
$I$ : 단위 行列	$x, y$ : Cartesian 座標
$J$ : 座標 變換의 Jacobian	$\alpha$ : 로켓 後半部의 傾斜角
$k$ : 格子界 彈性 係數	$\beta$ : 노즐 出口角
$M$ : 마하數	$\gamma$ : 比熱
$P$ : 壓力	$\Delta$ : 增分
$Pr$ : Prandtl數	$\varepsilon_{e_i}, \varepsilon_{i_i}$ : 人工 粘性 係數
$Q$ : 從屬 變數의 벡터	$\gamma_x$ : Klebanoff의 間歇度 係數
$R$ : 로켓의 半徑	$\xi, \eta$ : 一般 座標界
	$\mu$ : 粘性 係數
	$\rho$ : 密度
	$\omega$ : 過渡

\*韓國科學技術院 機械工學科

\*\*正會員, 韓國科學技術院 機械工學科

上添字

$n$  :  $n$ 時間에서의 값

$\wedge$  : 次元變數

下添字

$i, j$  :  $\xi, \eta$ 方向의 配列을 나타내는 變數

$j$  : 噴流 出口에서의 값

$t$  : 亂流量

$v$  : 粘性項

$\infty$  : 自由 流動에서의 값

演算子

$\Delta$  : 前向差分演算子(forward differencing operator)

$\nabla$  : 後向差分演算子(backward differencing operator)

### 1. 序論

超音速으로 비행하는 로켓 주위의 유동은 선단에서의 충격파 및 로켓 몸체 후면에서의 팽창파로 대표되는 비점성 영역과 로켓 표면을 따라 발달되는 경계층 및 후류의 점성 영역으로 대별된다. 특히 過小 팽창(under-expansion) 되거나 過大 팽창(over-expansion) 되는 噴流(jet)의 복잡한 비점성 유동 구조와 박리된 전단층의 상호작용 그리고 로켓 후면 再循環(recirculation) 영역의 존재는 로켓 후면 압력 변동에 따른 항력 변화, 후면 근처에서의 剝離에 의한 조종 능력 감소, 분류에 의한 열 손상 등을 초래하므로 이에 대한 해석은 로켓의 공학적 안전 설계를 위해 매우 중요하다.

Fig. 1은 본 연구에서 해석하게 될 過小 膨脹 噴流의 구조이다. 고압의 기체가 대기압하의 유동장으로 분출되면 기체는 대기압으로 팽창되어야 하므로 노즐 출구 모서리에서 Prandtl-Meyer 팽창이 일어나고 팽창파들은 분류 混合層으로 이루어진 일정 압력 경계면에서 다시금 반사되어 분류 중심축상에 충격파를 형성한다. 이는 압력의 급작스러운 降下로 기체 분류가 급격히 팽창하여 기체 입자들이 분류 반경 방향으로 관성력에 의해 가속되다가 입자들의 평형 위치 이탈에 따른 분류 중심부의 압력 강하로 인해 기체 입자들이 다시 분류 중심축으로 돌아오려는 경향을 갖기 때문에 일어나는 현상이다. 이러한 기체 거동은 난류 剪斷層의 발달로 비점성 유동 구조가 소멸될 때까지 반복되어진다. 膨脹比,  $P_j/P_\infty$ 가 비교적 큰 경우에는 국부적으로

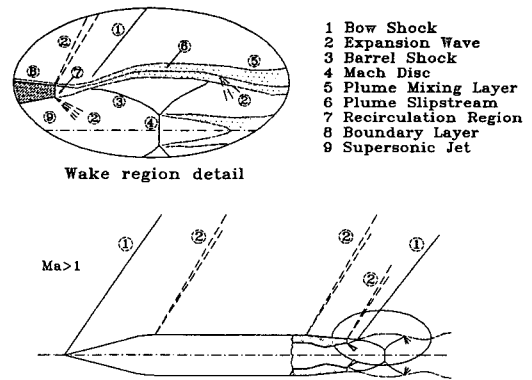


Fig. 1 Flowfield schematic for an axisymmetric boattailed body containing a centered propulsive jet in Supersonic flow

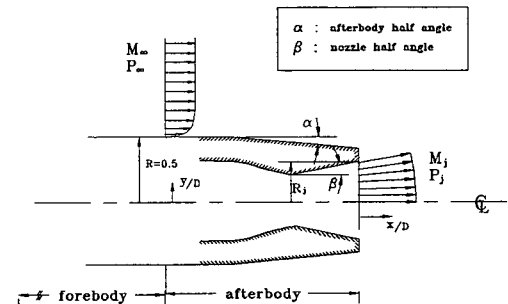


Fig. 2 Configuration and nomenclature

난류강도가 큰 亞音速 후류를 유발하는 마하 원판(mach disc)이 형성되기도 한다. 과거 20여년간 로켓 설계시 로켓 후면 압력과 流線 계산에 사용된 구성 요소 해석 방법<sup>(1)</sup>은 적분식을 사용함으로써 유동의 상세한 정보를 획득할 수 없었다. 때문에 전산 능력이 향상된 최근에는 Navier-Stokes 방정식이나 유동 방향으로의 粘性項을 무시하는 薄層 假定(thin shear layer approximation)을 취한 Navier-Stokes 방정식을 수치 해석하여 결과를 얻고 있다. 이 분야의 대표적인 계산 결과들로는 Hasen<sup>(2)</sup>, Deiwert<sup>(3)</sup>, 그리고 Wagner<sup>(4)</sup>의 것이 있다.

Hasen<sup>(2)</sup>은 MacCormack의 陽差分法(explicit differencing scheme)을 Navier-Stokes(以下 FNS로 略稱) 방정식에 적용, 과소 및 과대 팽창 분류를 갖는 로켓 유동을 해석 하였는데 박리된 유선을 따르는 단순한 適應(adaptive)格子界를 도입하여 충격파의 위치와 로켓 후면 압력을 비교적 정확히

예측하였다. 그러나 양차분법이 갖는 격자 크기 제한성으로 인해 전체 격자계가 로켓 후면 유동을 표현하기에는 너무 성기다. 때문에 최근의 Deiwert<sup>(3)</sup> 등과 같은 연구자들은 Beam-Warming의 陰差分法(implicit differencing scheme)을 채택하고 있다.

Deiwert<sup>(3)</sup>는 薄層 N-S 방정식(以下TNS로 略略)을 Beam-Warming의 陰差分法으로 차분화하고 격자계는 실험 결과를 토대로 구성하여 박층 가정이 크게 違背되지 않도록 하였다. 이들은 특히 噴流 出口角의 증가에 따른 로켓 후면 압력의 변화 경향을 Agrell과 White<sup>(5)</sup>의 실험결과와 비교하였는데 예측된 박리 영역과 로켓 후면 압력이 실험치에 비하여 너무나 작았다. 그 원인으로 이들은 노즐 출구 모서리에서의 팽창과 구조와 점성-비점성 간섭 영역에서의 난류 구조의 緋明이 未洽함을 지적하였다. Wagner<sup>(4)</sup>는 Deiwert<sup>(3)</sup>와는 달리 MacCormack의 hybrid방법을 사용하였으며 박층 가정도 도입하지 않았다. 격자계는 Schlieren 사진을 참조하여 구성하였으며 로켓 후면 근방에서의 레이놀즈應力을 실험결과와 비교하였을 때 경향만이 근사하였다. 이들은 격자계의 분포와 난류 모델 적용의 模糊性을 오차의 주요 원인으로 파악하였다. 전술한 연구들은 한결같이 격자계의 구성에 세심한 주의를 기울이고 있는데 이점에 있어 Forester와 Storm<sup>(6)</sup>의 연구는 示唆하는 바가 크다. 이들은 MacCormack의 양차분법을 적용, 박층 N-S 방정식을 해석하였는데 적합한 격자계를 모색하기 위해 격자의 밀도나 분포를 변화시키거나 多重格子界(multi-grid system)로 差分 誤差를 算定하였다. 최종적으로 이들은 剪斷層(shear layer)을 따라 稠密하게 분포된 격자계가 Deiwert<sup>(3)</sup>나 Wagner<sup>(4)</sup>가 사용한 박리된 유선을 기준으로 조밀 분포된 격자계보다 월등히 정확한 결과를 예측함을 보였다. 그러나 로켓 몸체에서의 박리점은 실험결과에 비해 지나치게 하류인 지점으로 계산되었다.

본 연구는 이들 관련 논문들 중 Deiwert<sup>(3)</sup>의 해석 방법에 따라 Beam-Warming의 음차분법을 사용하여, 薄層N-S 방정식(TNS)과 N-S 방정식(FNS)을 차분화하고 계산을 수행하였다.

첫번째 계산은 다른 변수를 일정하게 놓고 압력 비를 증가시킬 때의 이들 두가지 지배 방정식에 의한 결과를 비교하여 박층가정에 따른 오차를 算定하고, 다음으로 적용 격자계를 N/S 방정식의 계산에 도입하여 適應 格子界의 적용에 따른 결과의 개

선 여부를 검토한다.

## 2. 支配 方程式

2차원, 時間從屬形, 레이놀즈평균, 壓縮性 Navier-Stokes 방정식을 일반 좌표계상에서 保存 形態(conserved form)로 취하여 無次元化 시키면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \partial_t Q + \partial_\xi E + \partial_\eta F + \alpha H &= \partial_\xi E_v + \partial_\eta F_v + \alpha H_v \quad (1) \\ \alpha = 0 &: 2-D \text{ planar flow} \\ \alpha = 1 &: 2-D \text{ axisymmetric flow} \end{aligned}$$

여기서 일반 좌표 변환계는

$$\xi = \xi(x, y, t), \quad \eta = \eta(x, y, t), \quad \tau = t$$

가 사용되고, 각 행렬은 다음과 같다.

$$Q = J^{-1} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix} \quad E = J^{-1} \begin{bmatrix} \rho U \\ \rho u U + \xi_x P \\ \rho v U + \xi_y P \\ (e + P) U \end{bmatrix}$$

$$F = J^{-1} \begin{bmatrix} \rho V \eta \\ \rho u V + x P \\ \rho v V + y P \\ (e + P) V \eta \end{bmatrix}$$

$$E_v = \frac{\mu}{Re a J} \begin{bmatrix} 0 \\ a_1 u_\xi + a_3 v_\xi + c_1 u_\eta + c_3 v_\eta \\ a_3 u_\xi + a_2 v_\xi + c_4 u_\eta + c_2 v_\eta \\ EVE \end{bmatrix}$$

$$F_v = \frac{\mu}{Re a J} \begin{bmatrix} 0 \\ c_1 u_\xi + c_4 v_\xi + b_1 u_\eta + b_3 v_\eta \\ c_3 u_\xi + c_2 v_\xi + b_3 u_\eta + b_2 v_\eta \\ FVE \end{bmatrix}$$

$$a_1 = \frac{4}{3} \xi_x^2 + \xi_y^2 \quad a_2 = \xi_x^2 + \frac{4}{3} \xi_y^2$$

$$a_3 = \frac{1}{3} \xi_x \xi_y \quad a_4 = \xi_x^2 + \xi_y^2$$

$$b_1 = \frac{4}{3} \eta_x^2 + \eta_y^2 \quad b_2 = \eta_x^2 + \frac{4}{3} \eta_y^2$$

$$b_3 = \frac{1}{3} \eta_x \eta_y \quad b_4 = \eta_x^2 + \eta_y^2$$

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \frac{4}{3} \eta_x \xi_x + \xi_y \eta_y & c_2 &= \xi_x \eta_x + \frac{4}{3} \xi_y \eta_y \\
 c_3 &= \eta_x \xi_y - \frac{2}{3} \xi_x \eta_y & c_4 &= \xi_x \eta_y - \frac{2}{3} \xi_y \eta_x \\
 c_5 &= \xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{EVE} &= 0.5 [a_1(u^2)_\xi + a_2(v^2)_\xi + c_1(u^2)_\eta + c_2(v^2)_\eta] \\
 &+ a_3(uv)_\xi + c_3 uv_\eta + c_4 v u_\eta \\
 &+ \frac{1}{Pr(\gamma-1)M_\infty^2} (a_4 T_\xi + c_5 T_\eta)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{FVE} &= 0.5 [c_1(u^2)_\xi + c_2(v^2)_\xi + b_1(u^2)_\eta + b_2(v^2)_\eta] \\
 &+ c_3 uv_\xi + c_4 uv_\eta + b_3(uv)_\eta \\
 &+ \frac{1}{Pr(\gamma-1)M_\infty^2} (c_5 T_\xi + b_4 T_\eta)
 \end{aligned}$$

$$H = J^{-1} y^{-1} \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 \\ (e+P) V \end{bmatrix}$$

$$H_v = \frac{1}{Re a y J} \begin{bmatrix} 0 \\ \mu(\eta_y u_\eta + \eta_x v_\eta) - \frac{2}{3} y \eta_x \partial_\eta \left( \mu \frac{v}{y} \right) \\ 2\mu \left( \eta_y v_\eta - \frac{v}{y} \right) - \frac{2}{3} y \eta_y \partial_\eta \left( \mu \frac{v}{y} \right) \\ \text{HVT} \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{1}{Re a y J} \begin{bmatrix} 0 \\ \mu(\xi_y u_\xi + \xi_x v_\xi) - \frac{2}{3} y \xi_x \partial_\xi \left( \mu \frac{v}{y} \right) \\ 2\mu \xi_y v_\xi - \frac{2}{3} y \xi_y \partial_\xi \left( \mu \frac{v}{y} \right) \\ \text{HVF} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \text{HVF} &= \mu u (\eta_y u_\eta + \eta_x v_\eta) + \frac{4}{3} \mu v \eta_y v_\eta - \frac{2}{3} \mu v \eta_x u_\eta \\
 &- \frac{\mu^*}{Pr(\gamma-1)M_\infty^2} \eta_y T_\eta - \frac{2}{3} \mu \frac{v^2}{y} - \frac{2}{3} y \\
 &\left[ \eta_y \partial_\eta \left( \mu \frac{v^2}{y} \right) + \eta_x \partial_\eta \left( \mu \frac{uv}{y} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{HVT} &= \mu u (\xi_y u_\xi + \xi_x v_\xi) + \frac{4}{3} \mu v \xi_y v_\xi - \frac{2}{3} \mu v \xi_x u_\xi \\
 &- \frac{\mu^*}{Pr(\gamma-1)M_\infty^2} \xi_y T_\xi - \frac{2}{3} \mu \frac{v^2}{y} - \frac{2}{3} y \\
 &\left[ \xi_y \partial_\xi \left( \mu \frac{v^2}{y} \right) + \xi_x \partial_\xi \left( \mu \frac{uv}{y} \right) \right] \\
 \frac{\mu^*}{Pr(\gamma-1)M_\infty^2} T_\eta &= \frac{\gamma \mu^*}{Pr} \partial_\eta \left[ \frac{e}{\rho} - \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\mu^*}{Pr(\gamma-1)M_\infty^2} T_\xi &= \frac{\gamma \mu^*}{Pr} \partial_\xi \left[ \frac{e}{\rho} - \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \right] \\
 \mu &= \mu_1 + \mu_t & \mu^* &= \mu_1 + Pr_t \mu_t \\
 U &= \xi_x u + \xi_y v, & V &= \eta_x u + \eta_y v
 \end{aligned}$$

윗식에서의 Metric 항들은 일반 좌표 변환 관계에 의해 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \xi_x &= J y_\eta, \quad \xi_y = -J x_\eta, \quad \eta_x = -J y_\xi, \quad \eta_y = J x_\xi \\
 \text{where } J^{-1} &= x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi
 \end{aligned}$$

ξ좌표는 流線을 따르는 방향이며, η좌표는 유선에 垂直한 방향이다. U, V는 보존 형태로 변환할 때 도입되는 ξ와 η방향으로의 contra-variant 속도 성분이다. 윗식의 각 유동량들은 다음과 같이 무차원화 되어 있다.

$$\begin{aligned}
 \rho &= \frac{\hat{\rho}}{\rho_\infty}, \quad u = \frac{\hat{u}}{a_\infty}, \quad v = \frac{\hat{v}}{a_\infty}, \quad e = \frac{\hat{e}}{\rho_\infty a_\infty^2}, \\
 \mu &= \frac{\hat{\mu}}{\mu_\infty}, \quad Re = \frac{\rho_\infty a_\infty D}{\mu_\infty}, \quad Pr = \frac{C_p \mu_\infty}{K_\infty}
 \end{aligned}$$

여기서 ^으로 표시된 값이 차원변수이며 K는 熱傳導계수, μ는 앞서 정의된 점성계수이다. 무차원화된 압력은 에너지 식으로부터 다음과 같이 정의된다.

$$P = (\gamma - 1) \left[ e - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \right] \quad (2)$$

식(1)을 Beam과 Warming이 개발한 음차분법<sup>(7,8)</sup>을 적용시켜, 우선 시간에 대해 前向差分(forward differencing)하고 n+1시간에서의 E, F, H, E\_v, F\_v, H\_v 항을

$$\begin{aligned}
 E^{n+1} &= E^n + \left( \frac{\partial E}{\partial Q} \right)^n \Delta Q, \\
 F^{n+1} &= F^n + \left( \frac{\partial F}{\partial Q} \right)^n \Delta Q, \dots
 \end{aligned}$$

와 같이 대입한 후 近以因數化(approximate factorization) 하면 그 표현식은 다음과 같다<sup>(9)</sup>.

$$\begin{aligned}
 &\left\{ I + \Delta \tau \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \left( \frac{\partial E}{\partial Q} \right) - \left( \frac{\partial E_v}{\partial Q} \right) \right]^n + D_{i\xi} \right\} \\
 &\left\{ I + \Delta \tau \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \left( \frac{\partial F}{\partial Q} \right) - \left( \frac{\partial F_v}{\partial Q} \right) \right]^n \right. \\
 &\quad \left. + \Delta \tau \left[ \frac{\partial H}{\partial Q} - \frac{\partial H_v}{\partial Q} \right]^n + D_{i\eta} \right\} \Delta Q \\
 &= -\Delta \tau \left( \frac{\partial E}{\partial \xi} + \frac{\partial F}{\partial \eta} - \frac{\partial E_v}{\partial \xi} - \frac{\partial F_v}{\partial \eta} \right. \\
 &\quad \left. + H - H_v \right)^n + D_e
 \end{aligned} \quad (3)$$

where  $D_e = -\epsilon_e \Delta \tau J^{-1} [(\nabla_\xi \Delta_\xi)^2 + (\nabla_\eta \Delta_\eta)^2] (JQ^n)$

$$D_{i\xi} = -\epsilon_i \Delta \tau J^{-1} \nabla_\xi \Delta_\xi J$$

$$D_{i\eta} = -\epsilon_i \Delta \tau J^{-1} \nabla_\eta \Delta_\eta J$$

식 (3)에서 空間 微分項 (spatial derivative term) 은 中央差分 (central differencing) 한다.  $D_{i\xi}$ ,  $D_{i\eta}$ ,  $D_e$ 항은 충격과 捕獲시 惹起되는 非線形 불안정성을 인위적으로 억제시키는 人工粘性 係數 (artificial viscosity)로서  $\epsilon_e$ ,  $\epsilon_i$ 의 값은 Biringen과 Mc-Millan<sup>(10)</sup>의 결과를 참고하여  $\epsilon_e = 2 \sim 5$  정도로,  $\epsilon_i = 3\epsilon_e$ 로 하였다.  $\nabla_\xi, \nabla_\eta, \Delta_\xi, \Delta_\eta$ 는 각기  $\xi, \eta$  방향으로의 後向, 前向 差分 演算子이다.  $\partial E / \partial Q$ ,  $\partial F / \partial Q$  등의  $4 \times 4$  Jacobian Matrix 항은 Hoffman<sup>(9)</sup>이 유도한 식을 사용하였다. 식 (3)과 같은 형태는  $\xi, \eta$  방향으로 block tridiagonal matrix 연산을  $\xi, \eta$  방향으로 차례로 수행하므로 효율적이다.

### 3. 亂流 모델

본 연구에서 사용된 난류 모델은 해석을 단순화 하기 위해 배출가스에서의 강한 壓縮性 효과나 급격한 유동변화에 隨從되는 난류 강도의 뒤쳐짐 효과 (flow history)를 고려하지 않은 일반적인 代數 渦粘性 (algebraic eddy viscosity) 모델이다. 차원 해석에 의하여 와점성계수  $\mu_t$ 는 길이 단위  $l$ 과 속도 단위  $v$ 의 곱으로 나타낼 수 있다.

경계층을 크게 두가지 영역으로 나누어  $l$ 과  $v$ 를 정의해 주는 방법은 Cebeci-Smith 모델과 Baldwin-Lomax 모델<sup>(11)</sup>이 대표적인데, 境界層 두께 설정에 크게 유의할 필요가 없는 Baldwin-Lomax 모델을 많이 사용하고 있다. Baldwin-Lomax 모델은 벽면 전단층을 두개의 영역으로 나누어 다음과 같이 표현한다.

$$\begin{aligned} \mu_t &= (\mu_t)_{inner} & \eta < \eta_{crossover} \\ &= (\mu_t)_{outer} & \eta > \eta_{crossover} \end{aligned}$$

여기서  $\eta$ 는 벽면으로부터의 수직거리,  $\eta_{crossover}$ 는 內層 (inner layer)과 外層 (outer layer)에서 두식의 값이 같아지는 최소의 값이다. 우선 대층에 Prandtl-Van Driest 관계식을 적용하면

$$(\mu_t)_{inner} = \rho l^2 |\omega|$$

여기서

$$l = K \eta [1 - \exp(-\eta^+ / A^+)]$$

$$\eta^+ = (\rho_w \tau_w)^{1/2} \eta / \mu_w, \quad K = 0.4, \quad A^+ = 26$$

그리고  $\omega$ 는 局部渦度 (local vorticity)이다.

$$|\omega| = |\partial_y u - \partial_x v|$$

외층에서의 공식은 다음과 같이 주어진다.

$$(\mu_t)_{outer} = 0.0168 C_{cp} F_{wake} F_{kleb} (\eta)$$

$$F_{wake} = \left[ \frac{\eta_{max} F_{max}}{\eta_{max} C_{wk} U_{diff}^2 / F_{max}} \right] \text{ the smaller}$$

$$C_{cp} = 1.6 \quad C_{wk} = 0.25 \quad C_{kleb} = 0.3$$

$\eta_{max}$ 와  $F_{max}$ 는  $F(\eta) = \eta |\omega| [1 - \exp(-\eta^+ / A^+)]$  식으로 부터 구해진다.  $F_{max}$ 는  $F(\eta)$ 의 最大値이며 이때의  $\eta$ 값이  $\eta_{max}$ 이다.  $F_{kleb}(\eta)$  함수는 Klebanoff 間歇度 函數로서 다음 식으로 주어진다.

$$F_{kleb}(\eta) = [1 + 5.5 (C_{kleb} \eta / \eta_{max})^6]^{-1}$$

$U_{diff}$ 는 速度 線圖 (velocity profile)의 최대값과 최소값의 차이이며 경계층의 경우에는 최소값이 0이다. Deiwert<sup>(3)</sup>의 모델 방법을 따라 자유 전단류 (배출 가스와 후류)에서는  $\eta$ 값에 의존하지 않도록 모델을 조정한다. 즉 Van Driest 減衰項은 벽의 영향을 고려하기 위해 도입된 것이므로  $[\exp(-\eta^+ / A^+)]$ 항을 무시하고 Klebanoff 간헐도 함수를 분류 중심선으로 부터 결정하도록 하며  $U_{diff}$ 의 최소값은 속도 선도의 최소치로 한다.

### 4. 計算領域

로켓 後流의 유동 특성이 본 연구의 주된 관심사이고 所要시간의 節減이 요구되므로 로켓의 몸체 전체를 계산 모델로 하지않고 Fig. 3과 같이, 로켓 몸체 先端으로부터 발달된 境界層이 계산 영역내에

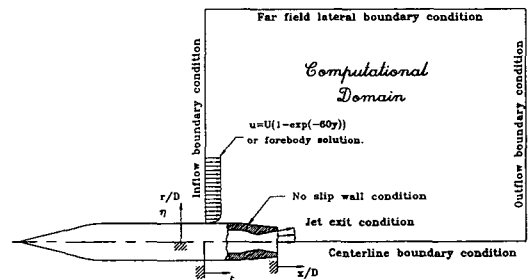


Fig. 3 Computational domain for a boattailed body with propulsive jet

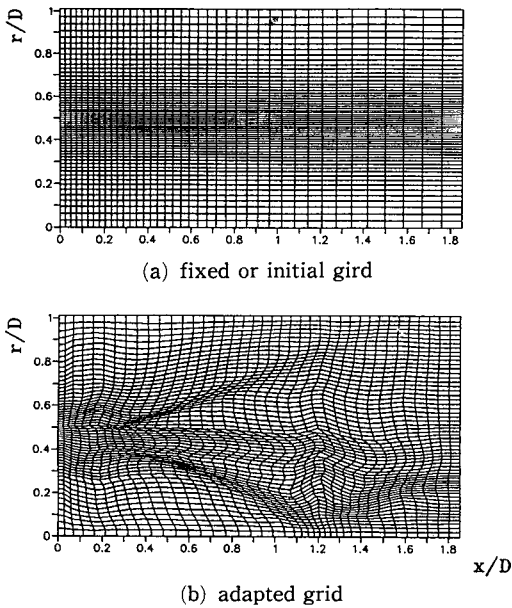


Fig. 4 Computational grid for Case 2

유입되는 것으로 보아 로켓 後面으로 부터  $x = -2R$ 의 상류,  $x = 17R$ 의 하류,  $r = 19R$ 의 경계면을 계산 영역으로 한다.

전체 계산 영역은  $100 \times 100$ 의 격자계로 구성하며 로켓의 몸체가 위치한 영역은 계산에서 제외된다. 固定격자계인 경우 hyperbolic sine函數를 사용하여 Fig. 4의 (a)와 같이 안쪽과 바깥쪽 유동의 경계면 가까이에 격자를 밀집 시켰다.

Fig. 4 (b)의 적응격자계는 P.A.Gnoffo<sup>(14)</sup>의 방법을 채택하여 구성한 것으로서 밀도를 제어변수로 하여 Case 2일때 얻어진 결과이다.

衝擊波(shock wave)를 捕獲하는데 매우 유용한 이방법은 격자점 사이의 유동 변화치를 彈性 係數(spring constant)化하여 이 값으로 격자점을 조정하는 것으로서 다음의 관계식으로 이루어진다.

$$s_1 = 0, \quad s_j = \sum_{i=2}^{j-1} [(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2]^{1/2}$$

$s$ 는  $\xi = \text{const}$  또는  $\eta = \text{const}$ 인 격자선상에서  $j$ 번째 격자점 까지의 총길이로서, 알려진 유동변수의 기준이 되는 위치이다.

$$k_j = 1 + C_3 |\rho(n_{j+1}) - \rho(n_j)| / (n_{j+1} - n_j)$$

$k$ 는  $j+1$  위치와  $j$ 위치에서의 유동변수의 變化程度를 표현하는 계수이다.

$$\Delta n_j = s_{jN+1} / (k_j \cdot \text{SUM})$$

$$\Delta n_1 = s_{jN+1} / (k_1 \cdot \text{SUM})$$

$$\text{where } s_{jN+1} = \sum_{j=1}^{jN} \Delta n_j = \Delta n_1 k_1 \sum_{j=1}^{jN} \left( \frac{1}{k_j} \right) = \Delta n_1 k_1 \cdot \text{SUM}$$

위 식은 격자점이 이동되는 양을 제시한다.

새로운 격자점의 위치가 결정되면 초기의 격자점 위치와 기지의 유동량들을 사용, 內插(interpolation)하여 그 위치에서의 유동량들을 결정한다.

### 5. 初期 및 境界條件

#### (1) 初期條件

초기 유동조건은 바깥쪽 자유 흐름으로 하였다. 즉 무차원화된 유동 변수

$$\rho = 1, \quad u = M_\infty, \quad v = 0, \quad e = \frac{p}{(\gamma - 1)} + \frac{1}{2} M_\infty^2$$

을 초기 조건으로 한다.

수렴 시간을 단축시키기 위해서는 다른 조건하에서 수렴된 결과를 초기조건으로 하는 것이 효율적이다.

#### (2) 流入流出 條件

유입 조건은  $u = U_\infty(1 - \exp(-Ay))$ 의 속도분포로 假定하거나, 로켓 전반부의 유동을 계산하여 그 값으로 한다. 유출 경계면이 로켓 후방에서 충분히 먼 경우(대략 10R의 거리)로 보아 경계점 바로 안쪽의 값을 外插(extrapolation)하여 사용한다.

#### (3) 壁條件

粘着조건을 적용하며 벽에 수직인 방향으로의 압력 勾配를 무시한다. 즉,

$$u = 0$$

$$v = 0$$

$$\partial e / \partial n = 0 (\because \partial P / \partial n)$$

또한 斷熱조건에 의해  $\partial \rho / \partial n = 0 (\because \partial T / \partial n)$

#### (4) 噴流條件

분류와 외부유동의 압력비 및 밀도비 그리고  $M_j$ 를 주어진 조건으로 한다.

#### (5) 噴流 中心軸 條件

분류 중심축에서  $\eta$ 방향으로의 유동량 변화가 없다고 놓는다. 즉 축대칭으로 한다.

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (Q) = 0$$

(6) 外部 境界 條件

외부 유동의 값을 조건으로 한다.

6. 計算 結果

(1) 出口 압력비가 미치는 영향

본 연구에서 계산된 유동조건은 Table 1과 같다. Case 1은  $Re_D=4.5 \times 10^6$  일때의 유동으로서 薄層 假定 N-S(TNS) 방정식을 사용하였다. Case 1의 유동 조건은 출구 압력비가 증대됨에 따른 유동 구조의 변화를 살펴보기 위해 채택된 것으로 壓力比 ( $P_j/P_\infty$ )를 1.0, 2.0, 3.0, 3.5로 변화시켜 계산하였다.

충분히 발달된 噴流가 대기압과 같아져 분출되는 경우의 等密度線圖는 Fig. 5와 같다. 로켓 후면이 존재하므로 유동은 로켓 후면의 바깥 모서리와 노즐쪽 모서리에서 Prandtl-Meyer 팽창하고 분류 중심축상에서는 충격파를 형성한다. Fig. 1에서 稠

密하게 분포된 등밀도선에 의해 유동 구조들이 잘 나타나고 있다. Fig. 6은 압력비를 증가시킬 때 분류 중심축을 따르는 압력 분포를 보여 준다. 노즐 출구 직후의 유동은 압력비가 증가되더라도  $X=0.6D$ 의 하류까지는 출구 조건을 그대로 유지하며 그후 유동이 급히 팽창해 나간다. 압력비가 1.0인 경우 충격파가 형성되는 위치는  $X_s=1.5D$ 이며 압력비가 2.0, 3.0, 3.5로 커짐에 따라  $X_s$ 는 1.8D, 2.2D, 2.5D로 점점 하류로 밀려난다. 주목할 만한 점은 충격파 이후 압력의 최고값은 압력비가 작은 경우 더 크다는 것이다. 이는 압력비가 커지면 충격파의 위치가 하류로 이동할 뿐만 아니라 분류의 반경 방향 퍼짐도 커져, 충격파 이전의 압력이 크게 다르지 않은 이 경우, 충격파의 세기는 충격파의 직경이 작은 경우에 강하고 직경이 큰 경우에 약하기 때문이다. 그리고 격자가 노즐 출구 직후에 밀집되고 하류 방향으로 갈수록 성기게 분포하여 人工 減衰項에 의한 충격파의 퍼짐이 하류에서 크

Table 1 Flow conditions and numerical method

	$R_j$	$\alpha$	$\beta$	$M_j/M_\infty$	$P_j/P_\infty$	SOLVER
CASE1-1	0.436	0	0	2.00/2.00	1.0	TNS
-2	0.436	0	0	2.00/2.00	2.0	TNS
-3	0.436	0	0	2.00/2.00	3.0	TNS
-4	0.436	0	0	2.00/2.00	3.5	TNS
CASE2-1*1	0.300	0	20	2.50/2.01	1.0	TNS & FNS
-2	0.300	0	0	2.50/2.01	1.0	TNS & FNS
CASE3-1*2	0.370	0	0	3.00/1.94	1.03	TNS & FNS

\*1 : Agrell & White<sup>(6)</sup>, experimental data

\*2 : Bromm & O'Donnell<sup>(12)</sup>, experimental data

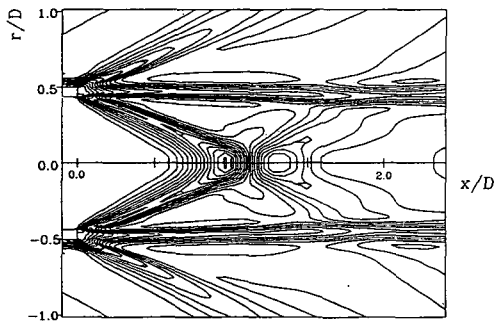


Fig. 5 Computed density contours for Case1-1;  $M_j/M_\infty=2.0/2.0$ ,  $P_j/P_\infty=1.0$ ,  $R_j=0.436$ ,  $\alpha=\beta=0^\circ$

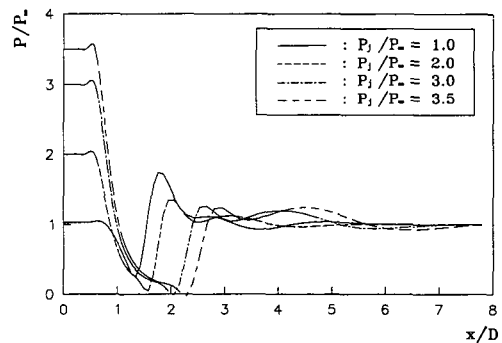


Fig. 6 Computed pressure distributions along the jet centerline for the Case;  $M_j/M_\infty=2.0/2.0$ ,  $R_j=0.436$ ,  $\alpha=\beta=0^\circ$





1에서 보인 바와 같이 두가지 노즐 출구각을 사용하여 계산함으로써 노즐 출구각의 변화에 따른 유동 구조 변화를 알아 보았다. Fig. 8은 FNS 방정식을 사용한 경우, 노즐 출구각이 각각 20°, 0°일 때의 등압력선도이다. 그림에서 알 수 있듯이 기체는 노즐 출구각이 0°인 경우, 보다 강하게 Prandtl-Meyer 팽창하고 弓形 충격파가 로켓 후면 영역을 침투하는 강도도 크다. 그러나, 그림 9의 분류 중심축을 따르는 압력 분포를 통해 알 수 있듯이 Mach disc의 위치는 크게 변하지 않으며 따라서 Mach disc의 위치를 결정하는 주된 인자는 출구 압력비이다. Fig. 9의 압력 분포로부터 1.0D ~ 1.5D로 퍼져버린 Mach disc의 위치를 한 점으로 결정하는 것은 다소 임의적일 수 있다. Beam-warming 수치해법 자체가 공간 미분항을 중앙 차분 연산자로 차분하며 수치적인 안정을 위해 인공 감쇠항을 도입하여, 충격파와 같은 불연속선을 완만한 선으로 밖에는 예측하지 못함을 고려하면 계산된 Mach disc의 위치는 1.2D 정도로 보아야 한다. 이는 그림에서 제시된 실험치와 차이가 나는데, 여기서 인용된 충격파의 위치가 Wagner<sup>(4)</sup>가 그의 논문에서 실험으로 결정한 충격파 위치를 스케치한 것을 다시금 인용하였기 때문에 야기된 것으로 여겨진다.

Fig. 10은 로켓 후면 근방에서의 속도 벡터이다. 예상대로 전단층은 노즐 출구각이 있는 경우에 더욱 반경 방향 바깥쪽으로 형성된다. 또한 로켓 후면부 재순환 유동은 노즐 가까운 쪽에서 반시계 방향, 먼쪽에서 시계 방향의 와동을 갖는다. 노즐 출구각이 없는 경우에는 노즐 안쪽의 반시계 방향 와동의 영향력이 상대적으로 미약함을 알 수 있다. Fig. 11의 로켓 후면부 압력 분포의 비교는 Prandtl-Meyer 팽창이 강하게 일어나는  $\beta=0^\circ$ 인 경우의 로켓 후면 압력이 출구 압력에 비해 많이 떨어진다는 사실을 보여준다.  $\beta=20^\circ$ 인 경우의 계산 결과는 실험치와 잘 맞고 있다.

(3) 適應 格子界 사용시 계산 결과의 개선

Case 3은  $Re=2.2 \times 10^6$ 일 때의 유동으로서 Beam-Warming 수치 해법 사용시 충격파가 퍼져버리는 단점을 극복하기 위하여 적응 격자계를 도입 계산한 것이다.

Fig. 12는 적응 격자계 상에서 FNS 방정식으로 계산된 등밀도선과 Schlieren 사진을 비교한 것이다. Fig. 13은 적응 격자계를 사용한 경우와 사용

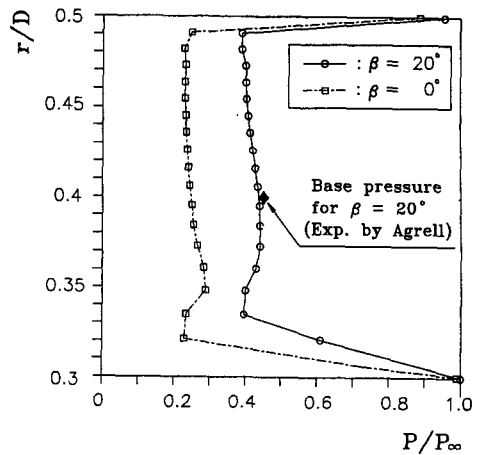


Fig. 11 Base pressure distributions for the Case 2

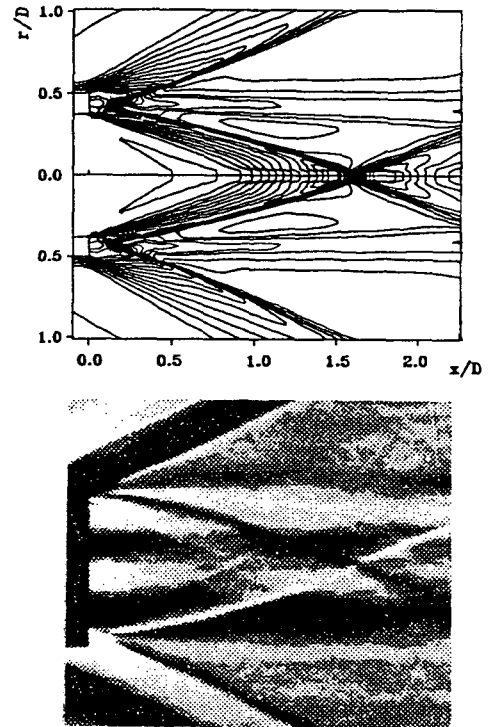


Fig. 12 Comparison between adaptive FNS computed density contours and the schlieren photography for the Case 3;  $M_j/M_\infty=3.0/1.94$ ,  $P_j/P_\infty=1.03$ ,  $R_j=0.37$ ,  $\alpha=\beta=0^\circ$

하지 않은 경우의 압력 분포 비교이다. 이 결과들은 1.35D~2.0D로 퍼져 있던 Mach disc의 위치를 1.5D~1.7D로 비교적 명확히 예측하였으며 또한 Mach disc 통과후의 최고 압력값도 압축과 강도가

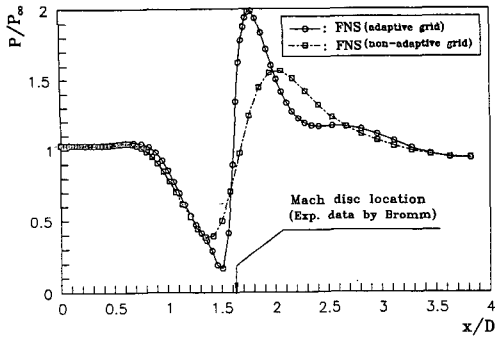


Fig. 13 Comparison of the FNS solved, Adaptive FNS solved pressure distributions along the jet centerline for the Case 3;  $M_j/M_\infty=3.0/1.94$ ,  $P_j/P_\infty=1.03$ ,  $R_j=0.37$ ,  $\alpha=\beta=0^\circ$

정확히 산정됨으로써 보다 크게 계산되었다.

(4) TNS, FNS, 적응 격자 FNS 해의 비교

TNS(Thin layer Navier-Stokes) 방정식은 유동 방향으로의 점성항을 고려하지 않으므로 로켓 후면의 재순환 영역 계산에는 타당하지 않으리라 생각되나 지금까지의 다른 연구자들은 대개 계산 시간의 절감을 위해 이를 사용하였다. 본 연구에서는 TNS 방정식 뿐 아니라 FNS(Full Navier-Stokes) 방정식도 계산하여 유동 방향으로의 점성 구배항이 계산의 정확도에 기여하는 바를 고찰하였다. Fig. 14는 Case 2인 경우에 TNS, FNS 그리고 적응 격자 FNS 방정식의 해를 등밀도선으로 표현한 것이다. 그림에서 TNS와 FNS의 결과는 크게 다르

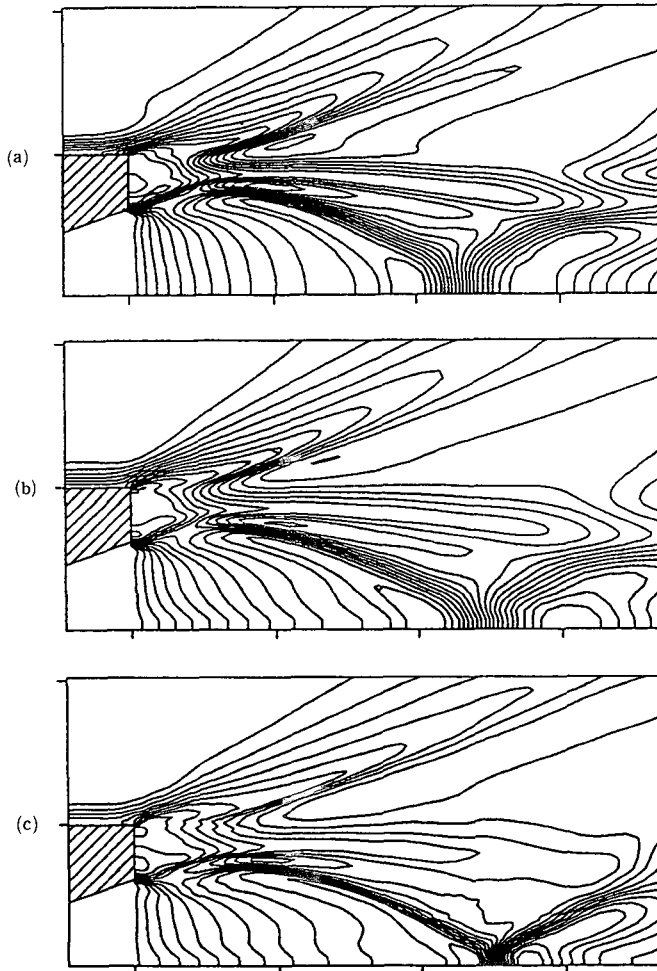


Fig. 14 Comparison of (a) ; Thin shear N-S solved, (b) ; Full N-S solved and (c) ; Adaptive grid Full N-S solved density contours for the Case 2

지 않으며 Mach disc의 위치가 FNS인 경우에 약간 하루로 물러나 있는 것을 알 수 있다. Fig. 14(b)에서 출구 직후의 등밀도선의 꺾임은 인공 감쇠 계수 사용에 좀더 주의할 기울여야 함을 나타내준다. Fig. 14(c)는 적응 격자계를 도입하였을 때의 결과로 Mach disc 이후의 충격파 구조를 명확히 포착하고 있다.

Fig. 15와 16은 TNS對 FNS, FNS對적응 격자계 FNS해의 상대 오차를 도시한 것이다. 상대 오차는 FNS 계산치를 기준으로 하였다. Fig. 15에서 알 수 있는 사실은 박층 가정에 의한 오차는 주로

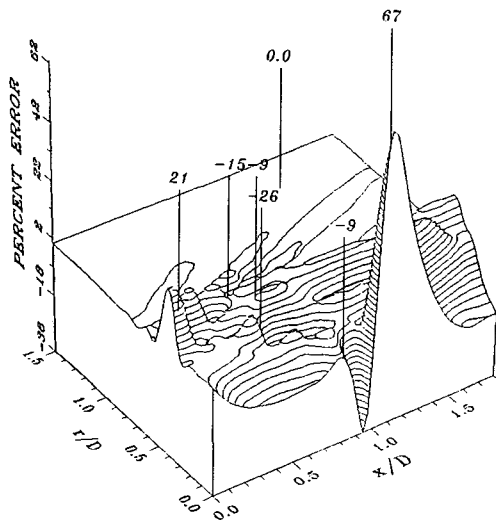


Fig. 15 Difference between TNS, FNS solved density field

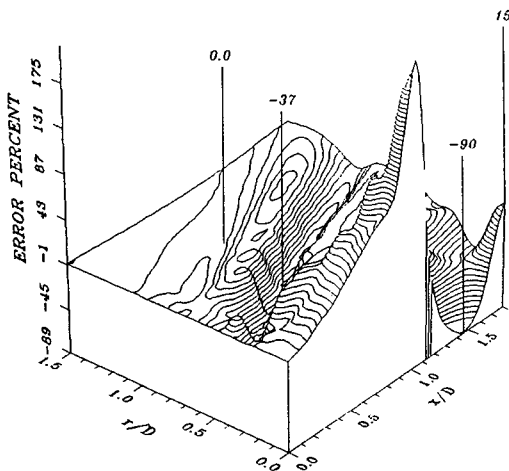


Fig. 16 Difference between FNS, Adaptive FNS solved density field

로켓 후면과 충격파 구조 가까이에서 발생한다는 점이다. 즉 TNS에 의한 결과는 로켓 후방에서의 밀도를 20% 높게 예측하며 분류 중심축을 따라서 오차가 波의 형태로 나타나 두해의 사이에 위상차가 있음을 알 수 있다. 이는 Fig. 18의 압력 분포를 통해서도 확인 할 수 있다. 반면에 FNS해와 적응 격자계 FNS해의 차이는 주로 충격파나 행창파와 같은 비점성 유동 구조에서 현격함을 알 수 있다. 특히 궁형 충격파를 따라 고랑이 생기며 적응 격자계에 의해 밀도가 40% 정도 작게 예측되고 있다. 또한 분류 중심축상  $X=1.0D$ 에서 적응 격자에 의해 밀도를 2배 크게 산정하고 있다. 이들 오차 비교는 각 점에서의 값들을 비교한 것으로서 이 부분에서는 밀도의 크기 자체가 매우 작아 이와 같이 다소 과장된 상대 오차로 표현이 되고 있다. Fig. 17은 적응 격자계 상에서의 속도 벡터로서 Fig. 10(a)에서 보인 비적응 격자계 상의 속도 벡터와 비교해 보면, 분류의 반경 방향 분출이 적응

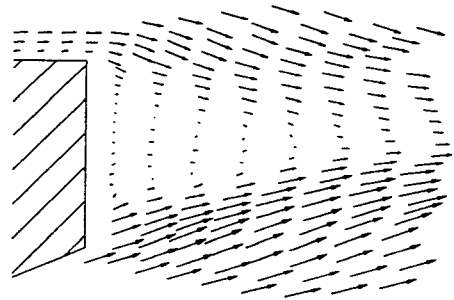


Fig. 17 Adaptive FNS solved velocity vector field in the near wake region of the nozzle base for the Case 2

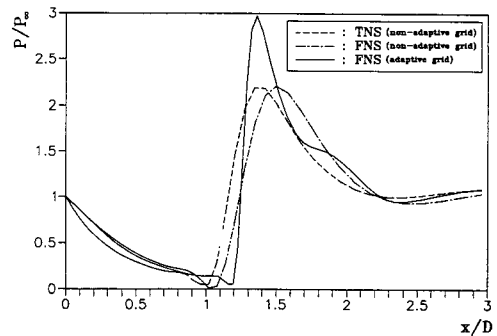


Fig. 18 Comparison of the thin shear N-S solved, full N-S solved and adaptive grid full N-S solved pressure distributions along the jet centerline for the Case 2

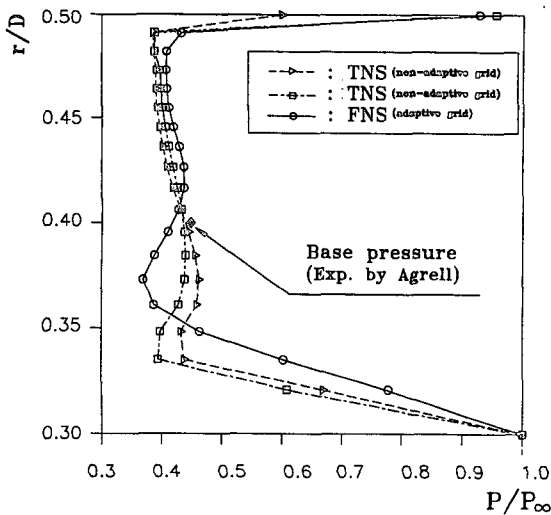


Fig. 19 Comparison of the thin shear N-S solved, full N-S solved and adaptive grid full N-S solved base pressure distributions along the base surface for the Case 2

격자계를 채용시 더 강하게 표현되나 격자 생성시 유동 변수중 밀도만을 제어 변수로 취하였기 때문에 밀도 구배가 심한 충격파 쪽으로는 격자가 밀집되나 밀도 변화가 크지 않은 재순환 영역에서는 격자가 성기어져 재순환 영역을 뚜렷이 표현하지 못함을 알 수 있다. 따라서 이 부분의 유동 계산 결과를 개선하려면 이 부분에도 격자를 밀집시킬 수 있도록 속도 구배의 영향을 고려하여야 한다. Fig. 18은 Case 3의 경우에서와 마찬가지로 적응 격자계의 도입에 의해  $X_3$ 를 1.25D로 매우 명확히 표현함을 알 수 있다. 결과적으로 같은 격자수로도 적응 격자계를 도입하면 보다 정확한 유동 해석이 이루어짐을 알 수 있다.

## 7. 결론

(1) 다른 유동 조건이 일정한 경우 압력비의 증가는 로켓 후면의 압력을 증가시키나 선형적으로 증대시키지는 않는다.

(2) 분류 출구각의 증대는 로켓 후면의 압력을 증가시키고 Barrel 충격파의 위치를 반경 방향 바깥쪽으로 이동시킨다.

(3) 박층 가정을 취한 N-S 방정식의 해는 로켓 후면이 비교적 큰,  $R_j=0.3$ 인 경우에도 N-S 방정식의 해와 비교하여 그다지 큰 차이를 보이지 않는

다. 이는 Deani와 Steger<sup>(13)</sup>가 박리 유동이 현저한 Ramp 유동에 대해 얻은 결과와도 부합된다.

(4) 비점성 유동 구조의 정확한 예측은 적응 격자계를 채택하므로써 가능하였다. 본 연구에서는 밀도만을 제어변수로 하여 격자를 생성하였기 때문에 밀도 변화가 크지 않은 로켓 후면 가까이에서는 조밀도 계수  $C_3$ 를 국부적으로 변화시켜 주어야만 하였다. 제어 변수로 전단층을 따르는 유선도 고려한다면 로켓 후면에서의 결과도 개선할 수 있을 것이다.

## 참고문헌

- (1) Korst, H.H., 1972, "Dynamics and Thermodynamics of Separated Flows," in "Heat & Mass Transfer in Flows with separated Regions", ed. Zaric, Z., pp. 1~45, Pergamon.
- (2) Hasen, G.A., 1982, "Navier-Stokes Solutions for an Axisymmetric Nozzle," AIAA Journal, Vol.20, pp. 1219~1227.
- (3) Deiwert, G.S., 1984, "Supersonic Axisymmetric Flow over Boattails Containing a Centered Propulsive Jet," AIAA Journal, Vol.22, No. 10, pp. 1358~1365.
- (4) Wagner, B., 1985, "Calculation of Turbulent Flow about Missile Afterbodies Containing an Exhaust Jet," Z.Fluwiss, Weltraumforsch 9, Heft 6, pp.333~338.
- (5) Agrell, J. and White, R.A., 1974, "An Experimental Investigation of Supersonic Axisymmetric Flow over Boattails Containing a Centered Propulsive Jet," FFA. Tech. Note, AU-913.
- (6) Forester, C.K. & Storm, I., 1985, "Navier-Stokes and Experimental Modeling of Blunt Base Rocket Nozzle Flow," IUTAM Symposium, "Turbulent Shear Layer/Shock Wave Interactions", pp. 177~188, Springer-Verlag.
- (7) Beam, R.M. and Warming, R.F., 1978, "Implicit Factored Scheme for the Compressible Navier-Stokes Equations," AIAA Journal, Vol. 16, pp. 393~402.
- (8) Beam, R.M. and Warming, R.F., 1976, "An Implicit Finite Difference Algorithm for Hyper-

- bolic Systems in Conservation Law Form," *J. Comput. Phys.*, Vol. 22, pp. 87~110.
- (9) Hoffman, K.A., 1989, "Computational Fluid Mechanics for Engineers," EES, Austin.
- (10) Biringen, S. and McMillan, Od.J., 1981, "Calculation of 2-D Inlet Flow Fields by an Implicit Method Including Viscous Effects-User Manual," NASA CR 3412.
- (11) Baldwin, B.S. and Lomax, H., 1978, "Thin Layer Approximation and Algebraic Model for Separated Turbulent Flows," *AIAA Paper*, 78-257.
- (12) Gnoffo, P.A., 1982, "A Vectorized, Finite-Volume, Adaptive-Grid Algorithm for Navier-Stokes Calculations," in "Numerical Grid Generation," ed. J.F.Thompson, pp. 819~835, Elsevier.
- (13) Bromm, A.F. and O'Donnell, R.A., 1954, "Investigation at Supersonic Speeds of the Effect of Jet Mach Number Divergence Angle of the Nozzle upon the Pressure of the Base Annulus of a Body of Revolution," NACA RML54116.
- (14) Seiner, J.M., Dash, S.M. & Wolf, D.E., 1985, "Analysis of Turbulent Underexpanded Jets, Part 2: Shock Noise Features Using SCIPVIS," *AIAA Journal*, Vol. 23, pp. 669~677.
- (15) Degani, D. and Steger, J.L., 1983, "Comparison between Navier-Stokes and Thin Layer Computations for Separated Supersonic Flow," *AIAA Journal*, Vol.21, pp. 1604~1606.