

〈論 文〉

3차원 비점성 천음속 익렬 유동에 관한 수치해석적 연구

이훈구* · 유정열**

(1991년 7월 9일 접수)

A Numerical Analysis on Three-Dimensional Inviscid Transonic Cascade Flow

Hun Goo Lee and Jung Yul Yoo

Key Words : Turbine Cascade(터빈 익렬), Three Dimensional Inviscid Transonic Flow(3차원 비점성 천음속 유동), Riemann Invariant(리만 상수), Artificial Viscosity(인공 점성)

Abstract

The three dimensional inviscid transonic cascade flow was investigated numerically, incorporation a four stage Runge-Kutta integration method proposed by Jameson. Time marching to the steady state was accelerated by using optimum time step and enthalpy damping. In describing the boundary conditions at inlet and outlet, Riemann invariants are considered. By adding a second and a fourth order artificial viscosities, the numerical instability due to the propagation of undamped disturbance or the rapid change of state near the shock has been prevented. The numerical results for are bump cascade, cambered two dimensional turbine cascade and three dimensional stator cascade agreed reasonably well with previous results. It has been known that the accuracy of the solution depended a lot on the modeling of the leading or trailing edge.

기 호 설 명

A, B, C	: 특성 행렬		상수
C	: 익렬 길이	p	: 압력
C^2, C^4	: 2차, 4차 인공 점성 계수	q_n	: 경계면에 수직인 방향의 속도 성분
c	: 음속	q_{t1}	: 경계면에 평행인 방향의 속도 성분
D	: 인공 점성 연산자	\hat{R}_ξ	: 행렬 A 에 대한 리만 상수
e	: 전 에너지 (total energy)	S	: 엔트로피
$\hat{F}, \hat{G}, \hat{H}$: 계산 영역으로 변환된 Euler 방정식의 벡터	t	: 시간
F, G, H	: 물리적 영역에서 Euler 방정식의 벡터	U, V, W	: ξ, η, ζ 방향의 반변분 속도 (contravariant velocity) 성분
h	: 전 엔탈피 (total enthalpy)	u_x, u_y, u_z	: x, y, z 방향의 절대속도 성분
J^{-1}	: 메트릭 (Metric) Jacobian의 역수	w_x, w_y, w_z	: x, y, z 방향의 상대속도 성분
K^2, K^4	: 2차와 4차의 인공 점성을 계산할 쓰이는	x, y, z	: 물리적 영역에서의 좌표
		α	: 입구에서의 입사각
		γ	: 공기의 비열비
		\bar{A}	: 특성치

*정회원, 서울대학교 대학원

**정회원, 서울대학교 기계공학과

ν : 충격 감지기 (shock detector)
 ξ, η, ζ : 계산 영역에서의 좌표
 ρ : 밀도
 ω : 축의 회전 각속도

하첨자

i, j, k : 격자점의 번호
 r : 반경 방향 성분

1. 서 론

가스터빈의 효율을 향상하기 위하여 높은 마하수를 가지는 터빈 익렬 주위의 유동에 대한 이해가 필요하다. 익렬의 기울어짐, 휘어짐과 끝벽 형상 (endwall contouring) 등을 올바르게 고려하기 위해서는 3차원 해석을 필요로 하는데, 이는 이러한 특징들을 유면 (stream surface)을 가정하는 준 3차원 방법으로 해석하는데는 한계가 있기 때문이다.

지난 10여년간 유체 기계의 익렬에 대한 3차원 유동 해석에 많은 발전이 있었다. 점성 효과에 의한 날개 표면의 경계층, 선연 (leading edge)의 영향으로 인한 말굽 와류 (horseshoe-vortex), 후연 (trailing edge) 부근의 와류, 날개 끝 부분과 슈라우드 벽사이의 누설류 등과 같은 현상을 완전한 Navier-Stokes 방정식으로 풀고자 하는 연구도 활발히 수행되고 있으나 복잡한 계산으로 인하여 대단히 큰 계산 용량의 컴퓨터와 비용이 필요하기 때문에 아직까지 실용화 되지는 않았다. 점성의 효과는 벽근처의 얇은 지역에 한정되기 때문에 비점성 가정에 근거하여 해를 구하는 방법이 현재까지도 많이 채택되고 있다.

천음속 비점성 유동장의 해석에는 포텐셜 (potential) 방정식이나 Euler 방정식이 사용된다. 마하수가 낮은 천음속 영역에 대하여 비회전 유동으로 가정하여 Murman과 Cole⁽¹⁾가 미소 섭동 방정식을 수치 해석함으로써 좋은 결과를 얻었으며, Jameson⁽²⁾이 회전차분 (rotated difference)이론에 근거한 유한체적법을 완전한 포텐셜 방정식 (full potential equations)에 적용함으로써 더욱 발전되었고, Hafez 등⁽³⁾이 인공점성을 적용함으로써 거의 완성되었다. 포텐셜 방정식의 수치 해석은 Euler 방정식의 경우보다 단순하나 천음속 영역에서 유동속도가 이음속에서 초음속으로 변하며 방정식 형태가 타원형에서 쌍곡선으로 변하여 음속선 부근에서 특별한 처리가

필요하며 큰 충격파의 경우 비회전 가정이 성립하지 않는다.

Euler 방정식은 천음속 영역과 초음속 영역에서 시간에 대한 초기치 문제로 단일하게 접근하는 것을 가능하게 하며, 자동적으로 충격파를 포착한다. 또한 원시 변수 표현법 (primitive variable formation)에 바탕을 두어 복잡한 유체기체의 경계조건을 처리하기 쉽다. Euler 방정식은 휘어진 충격파나 일정하지 않은 입구 정압 분포에 기인하는 회전 유동에 대해서 적용할 수 있다. 그러므로 이러한 회전 유동이 일어나는 높은 마하수의 상태에서 작동하는 터빈과 압축기의 유동에서 포텐셜 계산보다 Euler계산이 보다 정확한 결과를 얻는다.

Denton⁽⁴⁾이 시간 진행 방법 (time marching method)을 적용한 그의 2차원 방법을 3차원으로 확장한 이래, 여러 연구^(5,6,7)가 이루어 졌다. 본 연구에서는 Jameson⁽⁸⁾이 사용한 다단계 시간 적분방법 (runge kutta multi-stage time stepping scheme)을 이 영역⁽⁹⁾이 2차원 익렬에 적용하였고, 본 연구에서는 이것을 3차원으로 확장하였다. 즉, 일반 좌표계를 도입하여 Euler 방정식을 좌표 변환 한 후, 중심 차분법을 이용하여 공간 상에서 차분함으로써, 다단계 시간 적분 방법으로 시간에 대한 적분을 수행함으로써 유동을 해석하였다.

2. 지배 방정식 및 수치 해석 방법

2.1 지배방정식

3차원 좌표계로서 x 축을 중심으로 일정한 각속도 ω 로 회전하는 직교 좌표계를 설정한다. 직교 좌표계를 사용할 경우에는 원통 좌표계를 사용할 경우에 비하여, 입구, 출구조건과 주기조건이 복잡하지만 경계영역보다 격자점이 많은 내부 영역에서 계산이 간단하다. 보존 형태의 비정상 3차원 비점성 압축성 유동의 지배 방정식은 아래와 같다.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = E, \quad (1)$$

$$Q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ \rho v_y \\ \rho v_z \\ \rho e \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \rho w_x \\ \rho w_x v_x + p \\ \rho w_x v_y \\ \rho w_x v_z \\ \rho w_x h + u_x p \end{bmatrix}.$$

$$G = \begin{bmatrix} \rho w_y \\ \rho w_y v_x \\ \rho w_y v_y + p \\ \rho w_y v_z \\ \rho w_y h + u_y p \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$H = \begin{bmatrix} \rho w_z \\ \rho w_x v_x \\ \rho w_z v_x + p \\ \rho w_z v_z \\ \rho w_z h + u_z p \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho w(2w_z + \psi_y) \\ -\rho w(w_y - w_z) \\ 0 \end{bmatrix},$$

여기에서 e 와 h 는 완전 기체 일때

$$e = \frac{p}{(\gamma-1)\rho} + \frac{(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2}, \quad (3)$$

$$h = e + \frac{p}{\rho} \quad (4)$$

이며 $\gamma=1.4$ 이다.

2.2 유한 체적법

임의 형태의 물리적인 계산 영역에 대하여 경계 조건을 적용하기 쉽게 하기 위하여 지배방정식을 물리적 영역 $[x, y, z]$ 으로부터 계산영역 $[\xi, \eta, \zeta]$ 으로 변환시킨다. 상사관계식을 다음과 같이 정의하면

$$\xi = \xi(x, y, z), \quad \eta = \eta(x, y, z), \quad \zeta = \zeta(x, y, z),$$

지배방정식 (1)은 다음과 같이 변환된다.

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{H}}{\partial \zeta} = \hat{E}, \quad (5)$$

$$\hat{R} = J^{-1}, \quad \hat{E} = J^{-1}E,$$

$$\hat{F} = J^{-1}(\xi_x F + \xi_y G + \xi_z H),$$

$$\hat{G} = J^{-1}(\eta_x F + \eta_y G + \eta_z H),$$

$$\hat{H} = J^{-1}(\zeta_x F + \zeta_y G + \zeta_z H),$$

$$J^{-1} = x_\xi(y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta) + x_\eta(y_\zeta z_\xi - y_\xi z_\zeta) \\ + x_\zeta(y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi).$$

지배방정식 (5)에 유한체적법을 적용하기 위하여 하나의 격자에 대하여 적분한다.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \hat{Q} dV + \int_V \left(\frac{\partial \hat{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{H}}{\partial \zeta} \right) dV \\ - \int_V \hat{E} dV = 0.$$

$d\xi = d\eta = d\zeta = 1$ 인 요소에서

$$x = \sum_{i=1}^8 8x_i (\xi_i \xi + 1/4) (\eta_i \eta + 1/4) (\zeta_i \zeta + 1/4),$$

$$\xi_i = \pm 0.5, \quad \eta_i = \pm 0.5, \quad \zeta_i = \pm 0.5$$

와 같은 삼일차 변환(trilinear mapping)을 이용하면

$$\frac{d}{dt} \hat{Q} + \hat{F}_{i+1/2, j, k} - \hat{F}_{i-v_{2, j, k}} + \hat{G}_{i, j+1/2, k} - \hat{G}_{i, j-1/2, k} \\ + \hat{H}_{i, j, k+1/2} - \hat{H}_{i, j, k-1/2} - \hat{E}_{i, j, k-1/2} - \hat{E} = 0 \quad (6)$$

과 같이 된다. 위식에서 하첨자 1/2는 격자면에서의 값으로 다음과 같은 의미를 가진다.

$$\hat{F}_{i+1/2, j, k} = \frac{\hat{F}_{i+1, j, k} + \hat{F}_{i, j, k}}{2}.$$

2.3 인공 점성(Artificial Viscosity)

유한 체적법을 적용한 식(6)은 중심 차분식이 되어 짝수점과 홀수점의 유동값에 분리(decoupled)가 생긴다. 또한 점성항이 없는 보존 형태의 지배방정식에 중심 차분을 사용할 경우 작은 교란에도 해가 불안정 해진다. 이러한 문제를 해결하는 방법으로서 중심 차분식에 인공 점성을 첨가하는 방법이 개발되었다.

인공 점성항을 첨가하는 방법은 여러가지로 연구되고 있다^(10,11). 본 논문에서는 Jameson⁽⁹⁾이 사용한 방법을 채택한다. 유동의 변화가 심하지 않은 부분에서 경계조건으로부터 반사되어 들어오는 줄어 들지 않는 작은 교란은 4차의 인공 점성으로 억제시킬 수 있으나, 유동의 변화가 큰 충격과 부근에서는 단조성(monotonic property)이 없는 4차의 인공 점성항이 과도(overshoot)의 원인이 되므로 2차의 인공 점성항을 넣어 찌글어짐(wiggle)을 억제시킨다.

식 (6)에 2차와 4차의 인공 점성항을 더하면 다음과 같다.

$$\frac{d}{dt} \hat{Q} + \hat{F}_{i+1/2, j, k} - \hat{F}_{i-1/2, j, k} \\ + \hat{G}_{i, j+1/2, k} - \hat{G}_{i, j-1/2, k} \\ + \hat{H}_{i, j, k+1/2} - \hat{H}_{i, j, k-1/2} - \hat{E} + D\hat{Q} = 0, \quad (7)$$

여기서

$$D = D_\xi + D_\eta + D_\zeta$$

로 정의된다. 예를 들어, 밀도에 대하여 인공 점성

항을 써보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} D_t \rho &= d_{i+1/2,j,k} - d_{i-1/2,j,k}, \\ d_{i+1/2,j,k} &= \frac{J_{i+1/2,j,k}^{-1}}{\Delta t} [C_{i+1/2,j,k}^2 (\rho_{i+1,j,k} - \rho_{i,j,k}) \\ &\quad - C_{i+1/2,j,k}^4 (\rho_{i+2,j,k} - 3\rho_{i+1,j,k} + 3\rho_{i,j,k} \\ &\quad - \rho_{i-1,j,k})], \\ C_{i+1/2,j,k}^2 &= K^2 \max(\nu_{i+1,j,k}, \nu_{i,j,k}), \\ C_{i+1/2,j,k}^4 &= K^4 \max(0, K^4 - C_{i+1/2,j,k}^2), \\ v_{i,j,k} &= \left[\frac{\hat{p}_{i+1,j,k} - 2\hat{p}_{i,j,k} + \hat{p}_{i-1,j,k}}{\hat{p}_{i+1,j,k} - 2\hat{p}_{i,j,k} + \hat{p}_{i-1,j,k}} \right]. \end{aligned}$$

여기에서 K^2, K^4 값은 1/4, 1/256 정도가 쓰이나, 수치 계산을 통하여 조정한다.

2.4 다단계 시간 적분

비정상 Euler 방정식(7)을 시간에 대하여 적분하는 방법에는 외재적 방법과 내재적 방법이 있다. 외재적 방법은 내재적 방법에 비해 계산과정이 간단하나, 유동 조건과 격자의 크기가 정해지면 다음 단계의 시간진행 간격이 CFL 조건(Courant, Friedrichs and Lewy condition)에 의해 제한되므로 정상 상태에 도달하기 위해서 내재적 계산 방법보다 많은 계산시간이 필요하다.

시간에 대해서 1차 정확도를 가지는 외재적 시간 적분 방법 중에서 Runge Kutta의 다단계 방법(multistage scheme)이 매우 효과적이다. 선형 방정식의 경우 CFL수가 2.828까지 안정하다. 그러나 Euler 방정식에 적용되면 경계조건, 인공점성, 비선형효과 등으로 인하여 안정한 CFL수의 범위가 줄어든다. 비정상 상태의 해를 구하려면 실제의 초기 유동상태에서 모든 격자에 대한 최적 시간 간격 중 최소의 시간 간격을 사용해야 하나, 정상 상태의 해만 구하려면 임의의 유동상태에서 각 격자에 대해 최적 시간 간격을 사용함으로써 해의 수렴 속도를 증가시킨다⁽¹²⁾.

식 (7)을 다음과 같은 형태로 바꾼다.

$$\frac{d}{dt} \bar{Q} + \bar{R} = 0 \quad (8)$$

식(8)을 시간에 대하여 Runge-Kutta 방법으로 다단계 적분한다.⁽⁸⁾ 각 검사 체적에 대한 최적 시간은 ξ, η, ζ 에 대한 시간 간격 중 최소값으로 정하였다⁽¹³⁾.

2.5 경계 조건

지배방정식은 공간 좌표에 대해 아음속인 경우 타원형 방정식이며 초음속인 경우 쌍곡선형이다. 익렬입구에서 유입류 조건, 주기 조건이 필요하고, 허브, 슈라우드, 흡입면, 압력면에서는 벽조건, 익렬출구에서는 유출류 조건이 필요하다. 본 연구에서는 정상상태 해를 얻기 위하여 비정상 Euler 방정식을 시간에 대해 1차 정확도로 적분하므로 경계 조건도 시간에 대해 1차 이상 정확도를 가져야 한다. 본 연구에서는 유동 특성치들에 대해 시간에 대한 1차 근사를 적용하여 유동 특성 곡선을 구한 후 이 특성 곡선을 따라 보존되는 리만 상수를 이용하는 방법을 적용했다. 방정식 (5)에 연쇄율을 적용하면

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{Q}}{\partial t} + A \frac{\partial \bar{Q}}{\partial \xi} + B \frac{\partial \bar{Q}}{\partial \eta} + C \frac{\partial \bar{Q}}{\partial \zeta} &= 0, \\ A &= \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{Q}}, \quad B = \frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{Q}}, \quad C = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{Q}}. \end{aligned}$$

행렬 A, B, C 에 대한 형태는 참고문헌(14)와 같은데, 예를 들면 A 행렬에 대한 특성치는 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \bar{\Lambda}_e &= [U, U, U, U + c(\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2)^{1/2}, \\ &\quad U - c(\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2)^{1/2}]^T, \\ U &= \xi_x w_x + \xi_y w_y + \xi_z w_z. \end{aligned}$$

3차원 계산 영역에 대해 경계면은 계산영역 (ξ, η, ζ) 에서 어느 한 좌표가 일정한 표면이 되므로 그 좌표에 대하여 1차원 등엔트로피 유동으로 가정하여 리만 상수를 정한다. S 는 엔트로피, c 는 음속, 경계면에 수직인 속도 성분을 q_n , 평행인 성분을 q_{t1}, q_{t2} 라고 하면 ξ 가 일정한 A 행렬에 대응되는 리만 상수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{R}_e &= \left[S, q_{t1}, q_{t2}, q_n + \frac{2c}{\gamma-1}, q_n - \frac{2c}{\gamma-1} \right], \\ S &= \frac{p}{\rho^\gamma}, \quad m = (\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2)^{1/2}, \\ q_n &= \frac{u\xi_x + v\xi_y + w\xi_z}{m}, \quad q_{t1} = \frac{-u\xi_y + v\xi_x}{m}, \\ q_{t2} &= \frac{-u\xi_z + w\xi_x}{m}. \end{aligned}$$

입구에서 유동이 아음속으로 들어오는 경우 리만 상수는 5가지 중 4가지가 안으로 들어오는 특성치를 따라 유입류 조건으로부터 결정되고 남은 하나의 값은 내부의 값으로부터 외삽한다. 아음속으로

나가는 유동의 경우 내부로부터 4가지 값이 외압으로 결정되고 한가지는 주어진 값이 된다. 보통 정압이나 마하수를 준다. 3차원의 경우 허브에서 정압을 주고 반경 방향으로의 다음과 같은 방정식에서 분포를 구한다.

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\rho v_{\theta}^2}{r}$$

이 방정식은 축방향으로 유동이 완전하게 발달되었다고 가정하여 반경 방향의 운동량 방정식으로부터 유도된다. 이 방정식으로 구한 반경 방향의 압력 분포는 다음 시간 단계에 적용된다. 초음속으로 나가는 유동의 경우 모든 유동값이 외부로만 나가도록 5가지 값을 모두 내부로부터 외삽한다.

익렬과 허브와 슈라우드에서는 벽 조건(no flux)을 적용한다. 익렬에서는 ζ 가 물체표면과 일치하므로 반변분속도(contravariant velocity) 성분 W 는 0이다. 허브와 슈라우드에서는 V 는 0이다. 반사 원칙(reflection principle)으로 벽 조건(no flux)을 적용할 경우 벽에서의 압력수정이 필요하다. η 방향으로 반변분속도 성분 $J^{-1}V$ 은 시간에 상관없이 0이므로 시간에 대해 이를 미분하고 운동량 방정식에 대입함으로써 수직방향의 압력구배 $\frac{\partial p}{\partial \eta}$ 를 구하여 1차 외삽으로 벽에서의 압력을 구한다. 같은 방법으로 ζ 방향에 대해 압력을 외삽한다.

2.6 수렴 가속방법

비정상 Euler 방정식의 해가 정상 상태로 수렴하면 유동장의 엔탈피는 입구에서의 엔탈피 H_{∞} 와 같게 된다. Jameson⁽⁸⁾이 도입한 강제 함수 \hat{T} (forcing function)를 식(5)에 적용하면

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{H}}{\partial \zeta} + \alpha(H - H_{\infty}) \hat{T} = 0,$$

$$\hat{T} = [\rho, \rho u, \rho v, \rho w, 1]^T$$

로 표시되어 수렴 속도를 증가시킨다.

2.7 격자계 생성

임의의 3차원 유동을 해석하려면 적절한 좌표계 선택이 대단히 중요하다. 유한 체적법으로 수치해석할 경우 계산 영역의 모든 경계면이 좌표면과 일치하는 것이 좋으며, 이를 위해서는 일반좌표계에 기초한 물체 적합 좌표계(boundary fitted coordinate)의 도입이 필요하다⁽¹⁵⁾. 이 방법을 적용하여

터빈 익렬과 같은 복잡한 3차원 형상 주위의 유동을 계산할 때 경계조건의 적용이 쉽고, 곡률이 심한 곳에 격자를 집중시킴으로써 벽면 근처의 유동을 정밀하게 해석할 수 있으며, 모든 계산이 물리적 영역의 모양에 관계없이 계산 영역 상의 균일한 좌표계에서 이루어지므로 이산화(discretization) 과정이 간단해진다. 격자 생성을 위한 계산에서는, 물리적 영역 상의 경계면에서는 격자배치를 주고 물리적 영역의 내부 영역에서는 물리적 영역과 계산 영역을 연결시키는 방정식을 수치적으로 해석한다. 본 논문에서는 Thomson⁽¹⁶⁾의 2차원 격자 생성 방법과 오건 제⁽¹⁷⁾의 3차원 격자 생성 방법을 이용하였다.

3. 수치 해석 및 결과

3.1 대형 원호 모양의 익렬을 지나는 아음속 및 천음속 유동 해석

Euler 방정식을 다중격자(multi-grid)를 이용하여 계산한 Ni⁽¹⁸⁾의 수치 해석 결과와 비교하기 위하여 본 연구에서 채택한 계산 방법은 계산영역이 2개의 원호형 물체의 반쪽 평면인 Fig. 1과 같은 형상에 적용하였다. 원호의 길이 방향의 중심점에서 원호의 높이는 10%이며 가장 작은 격자 간격과 원호의 길이에 대한 비가 0.03125이고 입구에서의 마하수는 각각 0.5, 0.675이고 입구에서 입사각 0°를 주었다. 격자의 크기는 65×17로 Ni의 계산 격자와 같게 하였다. 본 계산의 결과는 Fig. 1,2에 나타내었다.

Fig. 1은 입구에서 마하수가 0.5로 아음속 유동이며, Ni⁽¹⁸⁾의 Fig. 5와 결과가 거의 일치한다. 이 경우 최고 마하수가 원호의 가장 높은 곳에서 0.68 정도이며, 유동이 좌우 대칭으로 포텐셜 유동과 비슷하다. 이러한 이유는 충격파가 발생하지 않아 유동이 비회전 유동(irrotational flow)에 가깝기 때

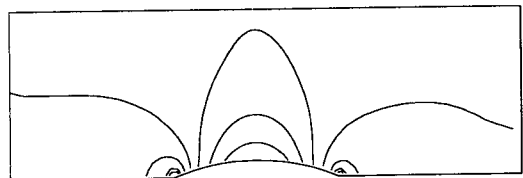


Fig. 1 Mach number contours for subsonic flow ($M_{in}=0.5$) through an arc bump cascade

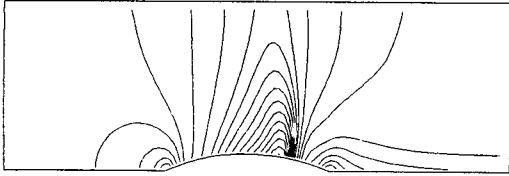


Fig. 2 Mach number contours for transonic flow ($M_{in}=0.675$) through an arc bump cascade

문이다. 따라서 비교적 유동의 변화가 크지 않은 낮은 마하수의 유동에서는 포텐셜 유동으로 가정하여 계산할 수 있다. Fgi. 2는 입구 마하수가 0.675로서 천음속 유동이 된다. 최고 마하수는 1.4 정도이고 충격파가 생기는 지점은 Ni⁽¹⁸⁾의 계산 결과인 Fig. 6(b)와 일치한다. 충격파는 익렬 길이의 72% 부근에 있는 몇 개의 격자들에 걸쳐 나타 났다. 이러한 이유는 유체가 충격파면을 지나면서 아주 좁은 지역에서 유동의 압력 및 밀도의 변화가 크나, 이 부근에서 격자의 수가 너무 작기 때문이다. 즉 한 점의 유동값을 계산하는데 ξ 방향으로 전후의 각각 2점의 유동값이 필요하므로 충격파면이 선명히 나타나지 않는다. 이러한 문제는 밀도의 변화가 큰 부근에 자동적으로 격자를 집중해 주는 adaptive grid의 생성으로 해결할 수 있다. 충격파 뒤의 유동은 회전 유동이 된다. 이것은 Fig. 1과 Fig. 2를 비교하면 Fig. 1에서는 등마하선이 밀면과 직각으로 되는데 비하여 Fig. 2에서는 직각으로 교차하지 않는 것으로 알 수 있다.

3.2 캠버가 큰 VKI 터빈 익렬의 경우

높은 마하수에서 작동하는 터빈의 개발을 위해서는 신뢰성이 있는 익렬에 대한 자료가 필요하다. 이론과 실험을 비교하기 위해서는 유동이 물리적으로 상사(similar)해야 한다. 그러나 마하수, Reynolds 수, 난류량, 형상비(aspect ratio), 이웃한 익렬의 주기성, 상대적인 인구 경계층의 두께 등을 모두 상사하게 만들기는 어렵다. 따라서 익렬 유동에 대한 실험은 수 십년 동안 이루어지고 있으나 가능한 모든 오차를 고려하기가 어렵기 때문에 실험의 정확도의 평가는 쉽지 않다. 특히 천음속 영역에서는 유입류의 발달과 측정 기구로 인한 봉쇄 효과(blockage effect)등이 큰 영향을 미친다. 이러한 풍동 효과(tunnel effect)로 인한 영향을 규명하기 위하여 Kiock 등⁽¹⁹⁾은 1985~1986년에 걸쳐 2

차원 선형 터빈 익렬인 VKI 터빈 익렬에 대하여 4개의 풍동에서 실험하여 각 익렬의 자료와 각 풍동에서의 실험조건, 결과 등을 발표했다. 이 결과들은 Kiock 등⁽¹⁹⁾의 Fig. 7에서 알 수 있듯이 압력면은 거의 같은 마하수의 분포를 가지나 흡입면은 충격파가 발생한 이후 큰 편차가 있는 것을 보인다. 이 실험 자료 중 본 연구는 OX와 GO를 참조하기로 한다. OX 실험의 경우 익렬의 형상비가 3.0, 익렬길이(chord length)가 100mm이고, 풍동 실험 단면의 크기는 300×420mm²이다. GO 실험의 경우 익렬의 형상비가 2.083, 익렬길이가 60mm이고, 풍동 실험 단면의 크기는 125×353mm²이다.

본 연구에서는 두 가지 경우에 대해 계산을 하였는데 첫번째는 입구 마하수가 0.281, 출구 마하수가 1.1, 입구 익렬각 33°, S/C의 비가 0.71, 입사각이 30°인 경우이고, 두 번째는 입구 마하수 0.281, 출구 마하수 1.4, 입사각이 역시 30°인 경우이다.

두가지 경우 모두 질식상태이므로 입구마하수가 거의 일정하다. 계산 격자는 H형태로 하고 격자의 크기는 113×24로 하였다. 첫 번째 경우의 결과를 Fig. 3에서 나타 내었다. 이것을 익렬의 흡입면(suction side)과 압력면(pressure side)에서 마하수로써 실험치⁽¹⁹⁾와 비교하면 잘 일치함을 알 수 있다. 등압력선도인 Fig. 4에서도 알 수 있는 바와 같이

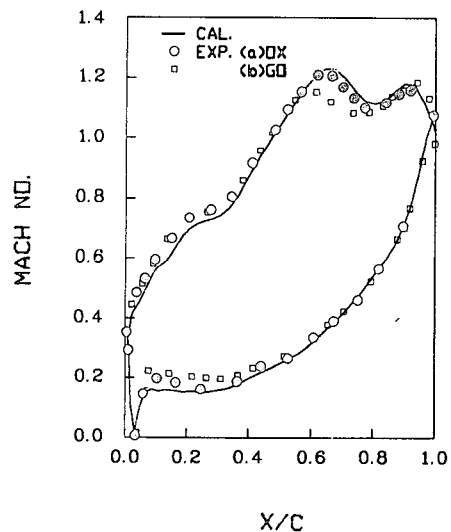


Fig. 3 Surface Mach number distributions for a transonic flow through VKI turbine blades ($M_{in}=0.28$, $M_{ex}=1.1$ and $\alpha=30^\circ$)

날개의 압력면 끝에서 발생하는 충격파가 흡입면의 약 60%되는 지점에 영향을 주어서 이 지점의 마하수를 급격히 감소시킴을 알 수 있다. 이러한 유동현상을 정확히 예측하기 위해서는 점성 계산의 경우 후연 부근에 극단적으로 격자를 많이 주어야 하며, 만일 비점성 가정을 할 경우 후연 부근에서 점성효과로 인한 경계층의 영향과 재순환(recirculation) 영역을 정확히 예측할 수 없다. 따라서 Euler 방정식을 수치 계산할 경우 후연 부근에서 비실제적인 강한 과도팽창(overexpansion)이 발생

하여 총압력 손실이 생기며 익렬하중에 큰 영향을 미치게 된다. 이러한 문제는 Fig. 5에 그려져 있는 것처럼 아음속의 경우와 초음속의 경우를 구분하여 재순환 영역을 크기와 모양이 비슷한 쇄기로 모델링하여 처리한다. 후연 부근의 쇄기에서 쇄기의 길이는 후연 부근 반경의 2~3배가 되도록 하며 그 각도는 추가적인 압력 부하가 익렬에 걸리지 않도록 시행 오차법으로 구했다. 초기 각도에 대해 수렴한 유동장을 새로운 쇄기의 각도에 대한 초기값으로 사용할 경우 빠르게 수렴이 되며 3~4회의 반복계산으로 만족된 각도를 얻을 수 있다. 한편 등압력선이 선연 부근에서 공통적으로 찌그러지는 현상을 볼 수 있다. 그 이유는 선연 부근의 급격한 압력 변화 때문인데 인공점성항의 삽입으로 찌그러짐

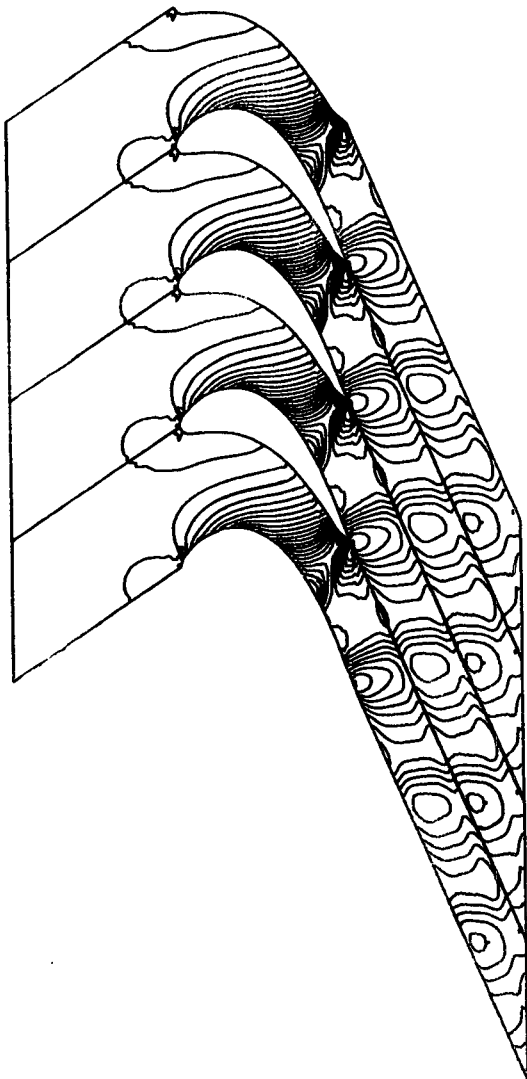


Fig. 4 Isobars for a transonic flow through VKI turbine blades ($M_{in}=0.28$, $M_{ex}=1.1$ and $\alpha=30^\circ$)

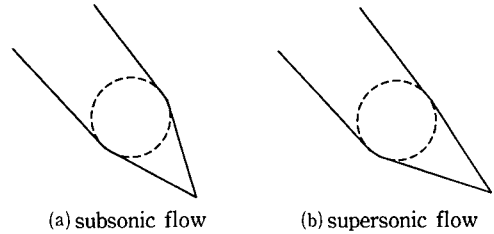


Fig. 5 The modelings of trailing edge

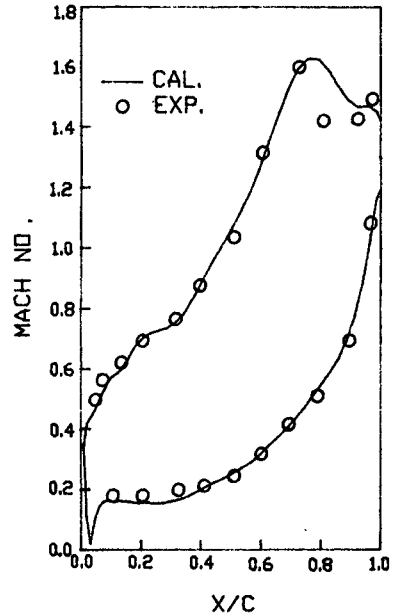


Fig. 6 Surface Mach number distributions for a transonic flow through VKI turbine blades ($M_{in}=0.28$, $M_{ex}=1.4$ and $\alpha=30^\circ$)

을 줄일수는 있으나 완전히 해결할 수는 없었다.

두 번째 경우 결과를 Fig. 6에서 익렬의 흡입면과 압력면에서의 마하수를 그린 Arone와 Stecco⁽²⁰⁾가 인용한 Kiock 등의 실험치와 비교하면 후연 부근을 제외하고는 비교적 잘 일치함을 알 수 있다. 등밀도 선도인 Fig. 7에서 익렬 후류에서 충격파가 나타남을 알 수 있다. 후류에서 격자를 성글게 정할 경우 이러한 충격파는 나타나지 않았고 익렬 내부의 유동도 정확하지 않았다.

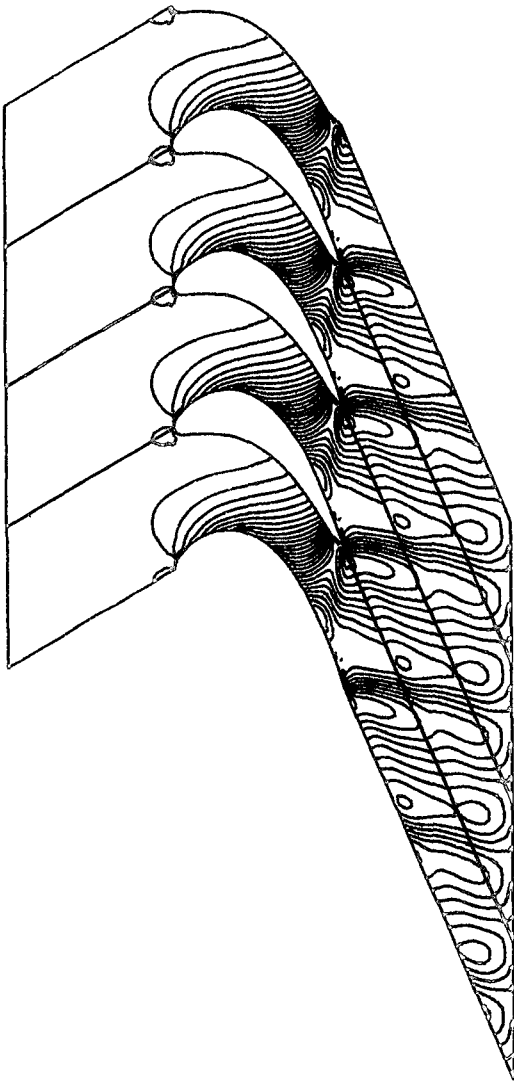


Fig. 7 Density contours for a transonic flow through VKI turbine blades ($M_{in}=0.28$, $M_{ex}=1.4$ and $\alpha=30^\circ$)

3.3 3차원 정익 유동 해석

본 연구의 최종 단계로서 goldman 등⁽²¹⁾이 레이저 유속계(Laser anemometer)로 측정된 정익 모델에 대해 수치 계산을 하였다. 허브의 반경은 215.9 mm이고, 형상비(stator hub-tip ratio)는 0.85이며, 익현길이(chord)는 52mm이고, 이는 36개 익렬의 full annular ring의 한 부분이다. 깃 형상비(vane aspect ratio J_{ms})는 1.0이고, 중간 반경에서의 피치/익현길이(AC/S)는 0.73이다. 일정한 단면의 꼬여지지 않은(untwisted) 익렬은 후연 중심을 기준으로 좌표가 설정되어 있으나 3차원 형상으로 인하여 익렬의 기울어짐과 휘어짐, 둥그런 벽면등이 나타나서 반경 방향의 단면의 형상이 변하여 2차원 계산으로는 유동을 예측할 수 없다. Fig. 8은 중간단면(mid-span)에서의 계산 영역의 모양이다. 더 자세한 형상은 참고 문헌⁽²¹⁾을 참고하기 바란다.

실험한 조건은 입구 마하수 0.231이고 총압력에

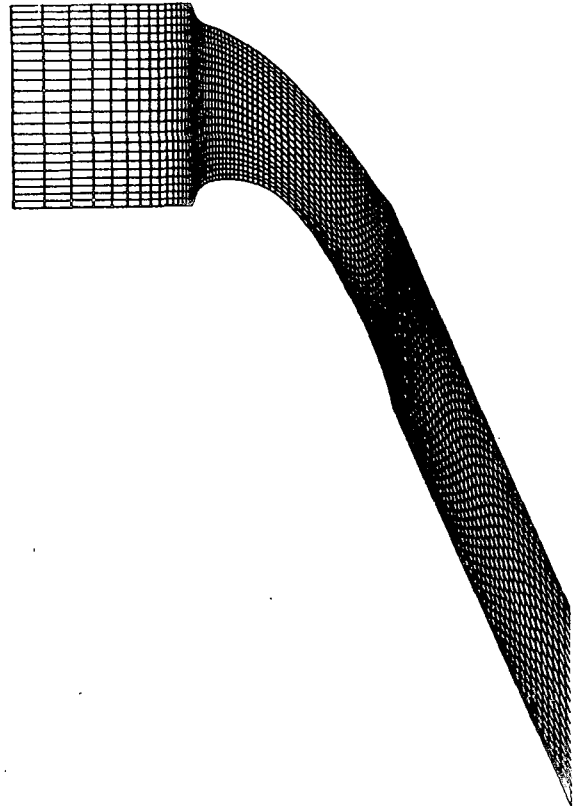


Fig. 8 Blade geometry and grid system for a turbine stator at mid span ($113 \times 21 \times 25$)

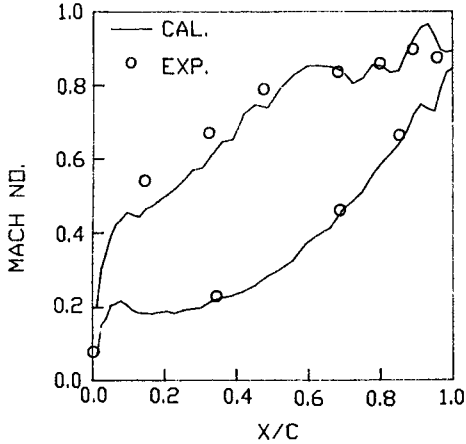


Fig. 9 Surface Mach number distribution for a turbine stator at 13.2% span ($M_{in}=0.231$, $M_{ex}=0.8$ and $\alpha=0^\circ$)

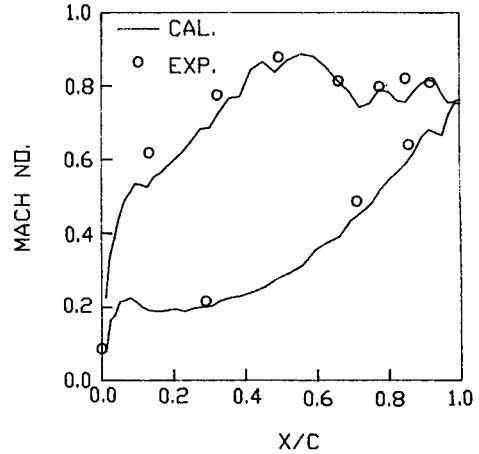


Fig. 11 Surface Mach number distribution for a turbine stator at 86.7% span ($M_{in}=0.231$, $M_{ex}=0.8$ and $\alpha=0^\circ$)

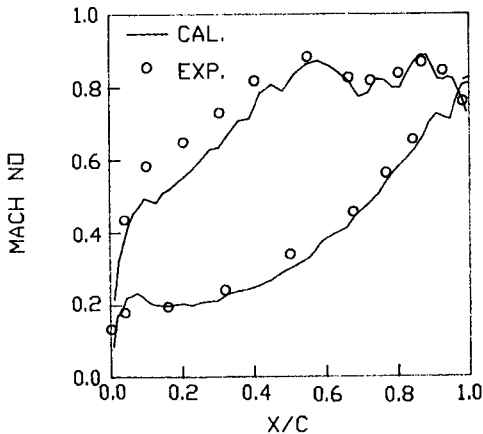


Fig. 10 Surface Mach number distribution for a turbine stator at 50.0% span ($M_{in}=0.231$, $M_{ex}=0.8$ and $\alpha=0^\circ$)

대한 허브 정압비가 0.65이다. 그리고 출구 마하수는 0.78이다. 허브로부터 13.2%, 50%, 86.7% span에서 수치 계산과 실험결과를 익렬 표면의 마하수 분포로 Fig. 9, 10, 11에 그렸다.

익렬의 압력면에서 마하수는 실험치와 비교적 잘 일치한다. 익렬 흡입면의 뒷부분에서 반경이 커질수록 후연 부근의 마하수는 내려가고, 중심 부근의 마하수는 증가하여 2개의 정점(peak)의 변화가 3차원 효과를 나타내는 실험과 정성적으로 잘 일치한다. 그러나, 흡입면의 앞부분에 대하여 x/C 가 0.15정도 일 때 마하수가 실험값보다 약 0.1 정도 낮다. 2차원에서는 고려할 필요가 없는 허브와 슈

라우드에서 점성으로 인한 경계층 형성의 영향일 것이다. 또한 후연 부근의 뿔기모양의 모델링을 반경 방향에 관계없이 중간 단면(mid-span)에서와 같이 일정하게 하였는데, 2차원 VKI 터빈 익렬 계산 결과로 보아 반경 방향의 유동 특성에 따라 뿔기의 각도를 약간 휘어지게 모델링하여야 할 것이다. 설계의 중요한 변수인 출구 유동각은 중간 단면에서 65° 로 계산되어 Goldman 등의 실험 측정치인 $67^\circ \pm 1.2^\circ$ 와 잘 일치한다. 유동에서 찌그러짐이 발생하고 있는 이유는 Euler 방정식에서는 점성항이 없기 때문이다. Euler 계산의 특징인 인공 점성항을 조절함으로써 이것을 줄일 수 있었다.

3.4 수치해의 수렴성 및 안정성 평가

수치 해석의 경우 채택한 수치 해석적 방법의 타당성을 증명하기 위해서는 수치해의 수렴 및 안정성에 대한 검토가 필요하다. 특히 비점성 계산이 점성 계산에 비하여 실용적인 이유 중의 하나는 상대적으로 빠른 수렴 속도에 있기 때문에 본 연구에서 해의 수렴성 및 안정성은 더욱 중요하다. 수치 실험 결과 2차 점성 계수는 3/5, 4차 점성 계수는 1/107이 적합하였다. 2차 점성 계수를 지나치게 크게 정할 경우 수렴된 해라도 불안정했고, 4차 점성 계수는 유동의 특성이 급격히 변하는 지역에서 찌그러짐(22)을 발생하여 수렴을 방해하기 때문에 수렴에 큰 영향을 준다. 2차원 아음속 유동장의 경우 CFL 수가 2.7까지 안정한 수렴이 되나, 천음속 영역 유동장의 경우에는 충격파 등의 영향으로 CFL

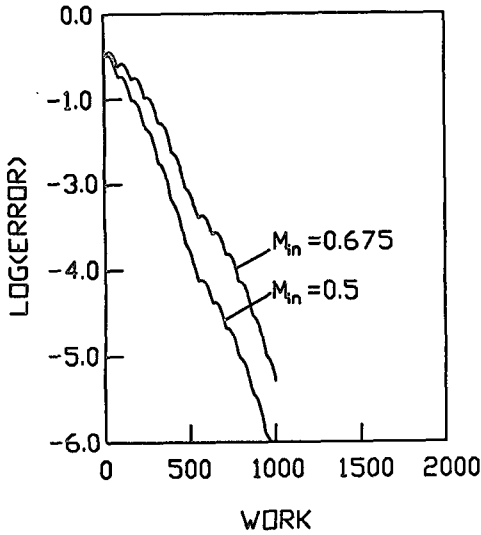


Fig. 12 Convergence history for are bump cascade flow

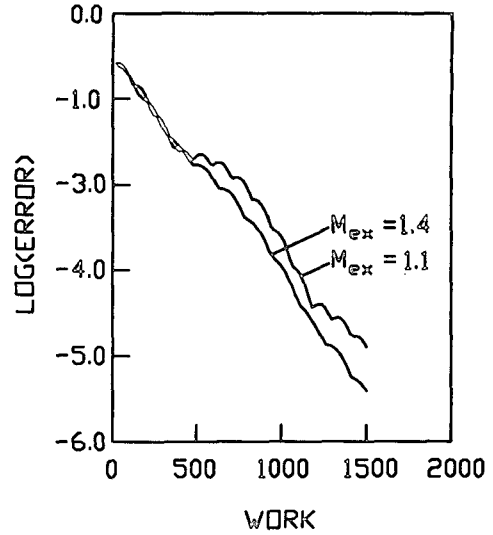


Fig. 13 Convergence history for a transonic flow through VKI turbine blades

수를 1.3으로 계산하였다. 수치 해석에 큰 영향을 미치는 격자 조밀성의 영향을 조사하기 위하여 2차원 대칭 원호형 익렬에 대하여 격자 크기를 $65 \times 17, 55 \times 13$ 의 경우로 바꾸어 가며 계산하였다. 격자 크기를 65×17 로 계산할 경우 최고 마하수가 1.4 정도이고, 충격파가 명확히 발생하였으나, 55×15 로 계산할 경우 1.35이고 35×13 로 계산할 경우 1.31이었고 충격파가 넓은 범위에 걸쳐 나타나 뚜렷하지 않았다.

3.1절의 대칭 원호형 익렬을 지나는 아음속 및 천음속 유동 해석의 경우 수렴이력을 Fig. 12에 그렸다. 1000회 반복 계산의 결과 엔탈피에 대한 상대 오차는 아음속일 경우 10^{-6} 까지 떨어졌으며, 천음속일 경우 충격파 등으로 인한 유동의 급격한 변화로 상대 오차가 10^{-5} 까지 떨어졌다. 한편 $Ni^{(18)}$ 는 다중 격자를 이용하지 않을 경우 900번 반복계산을 하여 수렴했으나 다중 격자를 쓸 경우 135번 반복계산으로 수렴하였음을 보였다. 따라서 Euler 방정식을 수치 해석할 경우 실용화를 위해서는 다중 격자의 도입이 필요하다. 3-2절의 VKI 터빈 익렬 주위의 천음속 유동 해석의 경우 수렴 이력을 Fig. 13에 그렸다. Fig. 4와 Fig. 7에서 보여지듯이 두가지 계산에서 충격파가 발생하고 있다. 이러한 익렬 내부의 충격파의 영향은 Fig. 2의 대칭 원호형 익렬보다 더 크고, 선연 부근의 급격한 유동 변화로 인한 해의 불안정성이 존재하여 수렴속도가

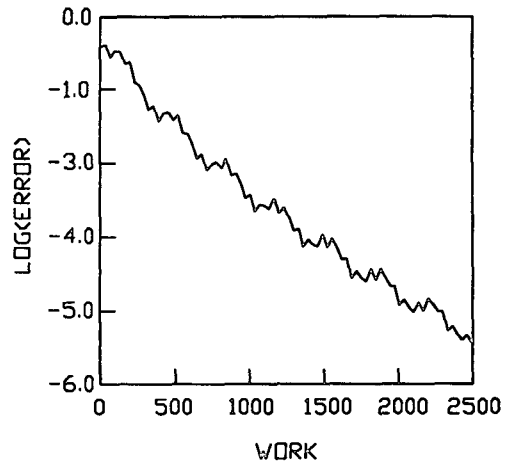


Fig. 14 Convergence history for a turbine stator

더욱 느려져서 1500회 반복 계산 후에 엔탈피에 대한 상대오차가 10^{-5} 이 되었다. 3.3절의 3차원 정익 유동 해석에 대한 수렴이력은 Fig. 14에 그렸다. 2400회 반복 계산 후 오차가 10^{-5} 이 되었다. 수렴속도가 느려진 이유는 유동의 유출류 조건에서 허브 위치의 정압을 주고 반경방향으로 반복 계산 과정에서 압력을 계산하여 다음 시간 단계 계산에서 유출류의 압력으로 주기 때문이다. 즉, 후류에서의 압력은 유동에 큰 영향을 미치므로 각 시간 단계마다 후류 압력의 변화는 수렴성을 좋지 않게 하기 때문이다. 또한 선연의 뭉뚱함으로 인하여 유동의

큰 변화가 생기는데, 이것이 수렴을 어렵게 하기 때문이다. 계산 시간은 Cray-2s에서 벡터화 된 프로그램의 경우 $113 \times 21 \times 25$ 의 격자를 2400번 반복 계산하는데 CPU시간으로 35분이었다.

4. 결 론

3차원 익렬 주위에 대한 비점성 유동을 다단계 시간 적분 방법에 의한 유한 체적법으로 해석하였다. 2차원의 2개의 원호형 익렬과 캠버가 큰 VKI 익렬과 3차원 정익 익렬에 대한 계산 결과를 기존의 계산 및 실험 결과와 비교하여 본 연구에서 채택한 수치 해석 방법의 타당성을 확인할 수 있었다.

비점성 가정으로 인하여 후연 부근의 모델링이 필요하였으며, 적절한 인공점성 계수의 값 및 CFL 수를 주어야 했다. 또한 벽에서의 적절한 격자 배치도 정확한 해를 구하는데 중요한 역할을 하였다. 동일한 입구조건의 경우에도 출구의 압력조건에 의해 내부의 유동장이 매우 민감하게 영향을 받는다는 것을 알 수 있었다.

실제 설계에 이용하기 위해서는 지금의 방법으로는 계산시간이 너무 많이 걸리므로 다중 격자와 새로운 방법의 도입이 필요하다.

후 기

이 연구는 한국과학재단 첨단 기술 연구과제 및 터보동력기계연구센터의 지원을 받아서 수행되었으므로 이에 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Murman, E.M. and Cole J.D., 1971, "Calculation of Plane Steady Transonic Flows," AIAA Journal, Vol.9, No.1, pp. 114~121.
- (2) Jameson, A., 1974, "Iterative Solution of Transonic Flows over Airfoils and Wings, Including Flows at Mach 1," Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. 17, pp. 283~309.
- (3) Hafez, M., South, J. and Murman, E., 1979, "Artificial Compressibility Methods for Numerical Solutions of Transonic Full Potential Equation," AIAA Journal, Vol.17, No. 8, pp. 838~844.
- (4) Denton, J. D., 1982, "An Improved Time-Marching Method for Turbomachinery Flow Calculation," ASME Paper No.82-GT-236.
- (5) Van Hove, W., 1984, "Calculation of Three-Dimension, Inviscid, Rotational Flow in Axial Turbine Blade Rows," ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, Vol. 106, pp. 430~436.
- (6) Arts, T., 1985, "Calculation of Three-Dimensional, Steady, Inviscid Flow in Transonic Axial Turbine Stage," ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, Vol. 107, pp. 286~292.
- (7) Shieh, C.F. and Delaney, R.A., 1987, "An Accurate and Efficient Euler Solver for Three Dimensional Turbomachinery Flows," ASME Journal of Turbomachinery, Vol. 109, pp. 346~353.
- (8) Jameson, A., et al., 1981, "Numerical Solution of the Euler Equations by Finite Volume Methods Using Runge-Kutta Time-Stepping Schemes," AIAA Paper 81-1259.
- (9) 이영창, 유정열, 1990, "2차원 비점성 천음속 터빈 익렬 유동에 대한 수치 해석적 연구", 대한기계학회논문집, 제14권, 제 4 호, pp. 981~989.
- (10) Pulliam, T. H., 1986, "Artificial Dissipation Models for the Euler Equations," AIAA Journal, Vol.24, No. 12, pp.1931~1940.
- (11) Kandil, O.A. and Chuang, A. H., 1987, "Influence of Numerical Dissipation on computational Euler Equations for Vertex-Dominated Flows," AIAA Journal, Vol. 25, No. 11, pp. 1426~1434.
- (12) Zhou, X. and Zhn, F., 1983, "Numerical Computation of Transonic Flows over Airfoils and Cascades," Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.37, pp. 277~288.
- (13) Koya, M. and Kotake, S., 1985, "Numerical Analysis of Fully Three-Dimensional Periodic Flows Through a Turbine Stage," Journal of Engineering for Gas turbines and Power, Vol. 107, pp. 945~952.
- (14) Pulliam, T.H., 1982, "A Diagonal Form of an Implicit Approximate-Factorization Algorithm," Journal of Computational Physics, Vol. 48, pp. 182~199.

- (15) Tompson, J. F., Warsi, Z.U.A. and Mastin, C. W., 1985, "Numerical Grid Generation," North-Holland Press, New York, Amsterdam, Oxford.
- (16) Tompson, J.F., Thamas, F.C. and Mastin, C. W., 1977, "Boundary-Fitted Curvilinear Coordinate Systems for Solution of Partial Differential Equations on Fields Containing any Numer of Arbitrary Two-Dimensional Bodies," NASA CR-2779.
- (17) 오건 제, 1989, "선미 주위의 점성 해석에 관한 수치 해석적 연구," 서울대학교, 박사학위 논문.
- (18) Ron-Ho Ni, 1982, "A Multiple-Grid Scheme for Solving the Euler Equations," AIAA Journal, Vol.20, No.11, pp. 1565~1571.
- (19) Kiock, A., Lehthaus, F., Bains, N. C., Sieverding, C. H., 1986, "The Transonic Flow through a Plane Turbine Cascade as Measured in Four European Wind Tunnels," Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, Vol. 108, pp. 277 ~285.
- (20) Arone, A.A. and Stecco, S.S., 1989, "Inviscid Cascade Flow Calculation Using a Multigrid Method," ASME paper 89-GT-22.
- (21) goldman, L. J. and Seasholtz, R. G., 1982, "Laser Anemometer Measurements in an Annular Cascade of Core Turbine Vanes and Comparison with Theory," NASA TP-2018.
- (22) Harten, A., 1983, "A High Resolution Scheme for the Solution of Hyperbolic Conservation Laws," J.Computational Physics, Vol.49.