

〈論 文〉

경계요소법에 의한 2차원 탄소성응력해석

조희찬* · 김희송**

(1991년 8월 14일 접수)

Two Dimensional Elasto-Plastic Stress Analysis by the B.E.M.

Hee Chan Cho and Hei Song Kim

Key Words: Material Nonlinearities(재료 비선형), Initial Stress Increment(초기 응력 증분), Initial Elastic Strain Energy(초기 탄성 변형률 에너지), Convergence(수렴), Semi-analytical Integral(반해석적인 적분)

Abstract

This study is concerned with an application of the Boundary Element Method to 2-dimensional elastoplastic stress analysis on the material nonlinearities. The boundary integral formulation adopted an initial stress equation in the inelastic term. In order to determine the initial stress increment, the increment of initial elastic strain energy due to elastic stress increment in stress-strain curve was used as the convergence criterion during iterative process. For the validity of this procedure, the results of B.E.M. with constant elements and NISA with linear elements were compared on the thin plate with 2 edge v-notches under static tension and the thick cylinder under internal pressure. And this paper compared the results of using numerical integral with the results of using semi-analytical integral on the plastic domain integral.

1. 서 론

재료비선형문제를 경계적분방정식으로 해석한 최초의 탄소성해석은 1971년에 Swedlow와 Cruse⁽¹⁾에 의해 발표되었다. 그들은 내부영역의 응력해석을 못하였지만, 소성변형률증분을 설명하는 영역적분의 존재를 지적하였다. 그 후, Mukherjee⁽²⁾와 Kumar⁽³⁾에 의해 많은 수정과 보완이 이루어졌으며, 비탄성경계요소정식화에 많은 공헌을 하였다. 그러나 이들의 논문은 내부응력에 대한 완전한 식을 나타냈다고는 볼 수 없었다. 왜냐하면, Bui⁽⁴⁾에 의해 밝혀진 바와같이 내부영역의 응력에 대한 적분방정식에 있어서 영역적분의 특이성으로 인한 자

유항의 존재가 지적되었기 때문이다. 그래서 그는 비탄성항의 특이적분유도에 대한 적절한 방법을 제시하여 처음으로 올바른 적분방정식을 이루었다. 그 뒤, Telles와 Brebbia^(5,6,7)는 특이영역적분을 보완함으로써, 2차원 및 3차원 탄소성문제에 대한 완전한 경계요소정식화를 이루었고, 비탄성해석에 대한 경계요소법의 유용성과 광범위한 적용성들을 발표하였다.

본 연구에 있어서는 Kelvin의 기본해^(8,9)와 초기 응력 증분에 의해 정식화된 경계적분방정식⁽⁷⁾을 이용하여 점차적으로 외력을 증가시켰을 때, 선형등방경화재에 국부적으로 생기는 항복영역과 항복하중, 탄소성 응력해석등을 재료비선형문제로 해석하였다. 이때 초기응력 증분을 결정함에 있어서 종래에는 등가 소성변형률을 수렴판정으로 해석하였지만, 이는 구분적인 선형 경화재와 온도 의존성 문

*정회원, 단국대학교 대학원

**정회원, 단국대학교 기계공학과

제에는 적당하지 않으므로 岩崎龍一⁽¹⁰⁾ 등은 등가응력과 응력-변형률 선도를 이용하여 수렴판정을 하였다. 그러나 이 방법은 소성역에서의 기울기가 변화하는 곳에서는 피할 수 없는 오차가 존재한다. 따라서 여기에서는 계산된 초기응력 증분에 의한 초기 탄성변형률에너지 증분과 응력-변형률선도로부터 구해지는 초기 탄성변형률에너지 증분을 이용한 수렴판정으로 초기응력증분을 결정하였다. 또한, 내부영역적분을 일부 해석적인 적분과 수치적분을 병행한 경우와 전부 수치적분방법으로만 하는 경우로 나누어 행하였다. 이상과 같은 방법으로 내압을 받는 실린더와 단순 인장하중이 작용하는 양편 V형 노치를 갖는 박판의 경우에 적용하여 해석하였으며, 그 결과를 유한요소법 프로그램인 NISA (numerically integrated elements for system analysis)로 구한 결과치와 비교, 고찰하였다.

2. 적분방정식

미소변형 범위내에서의 비탄성 연속체에 대한 평형조건과 변형률을 속도성분으로 표현하면 다음과 같다.

$$\dot{\sigma}_{ij} + \dot{b}_i = 0 \quad (1)$$

$$\dot{p}_i - \dot{\sigma}_{ij} n_j = 0 \quad (2)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^a \quad (3)$$

여기서, \dot{b}_i 와 \dot{p}_i 는 물체력과 표면력의 속도성분이 고, n_j 는 물체표면의 외향법선에 대한 방향여현을 나타낸다.

식(3)에서 비탄성변형률속도 $\dot{\epsilon}_{ij}^a$ 를 초기변형률로 생각하고, 총변형률 속도 $\dot{\epsilon}_{ij}$ 의 탄성부분인 $\dot{\epsilon}_{ij}^e$ 에 Hook의 법칙을 적용시킴으로써, 초기 변형률에 대한 초기응력 $\dot{\sigma}_{ij}^a$ 를 포함하는 응력속도성분 $\dot{\sigma}_{ij}$ 로 다음과 같이 변환시킬 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij} &= 2G\dot{\epsilon}_{ij} + 2G\frac{\nu}{(1-2\nu)}\dot{\epsilon}_{kk}\delta_{ij} - \dot{\sigma}_{ij}^a \\ &= \dot{\sigma}_{ij}^e - \dot{\sigma}_{ij}^a \end{aligned} \quad (4)$$

$$\text{단, } \dot{\sigma}_{ij}^a = 2G\dot{\epsilon}_{ij}^a + 2G\frac{\nu}{(1-2\nu)}\dot{\epsilon}_{kk}\delta_{ij}$$

윗 식들로부터 확장된 형태의 Navier의 식⁽⁸⁾을 얻을 수 있으므로 탄성해석과같이 Kelvin의 기본해를 여기서도 사용할 수 있다.

해석하고자하는 영역 Ω 와 경계 Γ 에서의 가정된 해인 변위, 표면력의 속도성분 \dot{u}_i , \dot{p}_i 와 경계조에

의해 이미 알고있는 변위, 표면력의 속도성분 \dot{v}_i , \dot{p}_i 에 대해서 생기는 오차는 다음과 같은 가중잔여치법(weighting residual method)으로써 최소화시킬 수 있다⁽¹¹⁾.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\dot{\sigma}_{ij} + \dot{b}_i) u_i^* d\Omega &= \int_{\Gamma_2} (\dot{p}_i - \dot{p}_i) u_i^* d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_1} (\dot{u}_i - \dot{u}_i) p_i^* d\Gamma \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 u_k^* , p_k^* 는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} p_i^* &= \sigma_{ij}^* n_j \\ \epsilon_{ij}^* &= \frac{1}{2} (u_i^*,_{j} + u_{j,i}^*) \end{aligned} \quad (6)$$

식(5)를 부분적분하고 식(4)와 식(6)을 이용하면 내부영역에 대한 적분방정식이 구하여진다. 또한 경계에 대한 적분방정식은 기본해의 $1/r$ 항에 의한 특이성 때문에 내부영역의 적분방정식과는 다소 다르게 변화되나, 하나의 적분방정식으로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} c_{ij}(\zeta) \dot{u}_j(\zeta) &= \int_{\Omega} r u_{ij}^*(\zeta, x) \dot{p}_j(x) d\Gamma(x) \\ &- \int_{\Gamma} r p_{ij}^*(\zeta, x) \dot{u}_j(x) d\Gamma(x) \\ &+ \int_{\Omega} u_{ij}^*(\zeta, x) \dot{b}_j(x) d\Omega(x) \\ &+ \int_{\Omega} \epsilon_{jki}^*(\zeta, x) \dot{\sigma}_{jk}^a(x) d\Omega(x) \end{aligned} \quad (7)$$

여기서, $c_{ij}(\zeta)$ 는 내부영역인 경우 Kronecker delta δ_{ij} 이며, 평활한 경계인 경우에는 $1/2\delta_{ij}$ 를 갖는다^(11,12). $\dot{u}_{ij}(\zeta, x)$,와 $\dot{p}_{ij}(\zeta, x)$ 는 근사장에서, $u_{ij}^*(\zeta, x)$ 와 $p_{ij}^*(\zeta, x)$ 는 가중장에서 각 각 점 ζ 에서 i 방향으로 작용하는 단위하중에따른 점 x 에서 j 방향의 변위속도성분과 표면력속도성분, 변위와 표면력을 나타낸다.

그리고 내부영역의 응력은 식(7)의 변위를 식(3)에 의해 변형률로 변화시키고 Hook의 법칙에 대입함으로써 구하여진다. 그런데 식(7)의 우변 4번째 항은 Telles와 Brebbia⁽⁶⁾ 그리고 Bui⁽⁴⁾에 의해 밝혀졌듯이 특이성이 존재한다. 따라서 내부영역의 탄소성응력증분 $\dot{\sigma}_{ij}$ 는 다음과 같다⁽⁷⁾.

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij}(\zeta) &= \int_{\Omega} r u_{ijk}^*(\zeta, x) \dot{p}_k(x) d\Gamma(x) \\ &- \int_{\Gamma} r p_{ijk}^*(\zeta, x) \dot{u}_k(x) d\Gamma(x) \\ &+ \int_{\Omega} u_{ijk}^*(\zeta, x) \dot{b}_k(x) d\Omega(x) \\ &+ \int_{\Omega} \epsilon_{ikl}^*(\zeta, x) \dot{\sigma}_{kl}^a(x) d\Omega(x) \\ &+ g_{ij}(\dot{\sigma}_{kl}^a(x)) \end{aligned} \quad (8)$$

단, 평면변형률인 경우 $g_{ij}(\dot{\sigma}_{kl}^a)$ 는

$$g_{ij}(\dot{\sigma}_{kl}^a) = -\frac{1}{8(1-\nu)} (2\dot{\sigma}_{ij}^a + (1-4\nu)\dot{\sigma}_{kl}^a\delta_{ij})$$

이며, 평면응력인 경우는

$$g_{ij}(\sigma_{ij}^0) = -\frac{(1+\nu)}{8} [2\sigma_{ij}^0 + \frac{(1-3\nu)}{(1+\nu)} \sigma_{ii}^0 \delta_{ij}]$$

이다. 또한 $u_{ij}^*(\zeta, x)$, $p_{ij}^*(\zeta, x)$, $u_{ijk}^*(\zeta, x)$, $p_{ijk}^*(\zeta, x)$, $\varepsilon_{jki}^*(\zeta, x)$, $\varepsilon_{ijk}^*(\zeta, x)$ 는 Kelvin의 기본해와 기본해로부터 파생된 Tensor를 나타낸다^(8,9).

3. 초기응력증분의 결정

해석하고자하는 탄소성체가 비압축성 등방경화재라 할 때 항복조건식은 일반적인 형으로써 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$F(\sigma_{ij}, k) = f(\sigma_{ij}) - \varphi(k) = 0 \quad (9)$$

여기서 $\varphi(k)$ 는 변형률경화를 나타내는 변수로써 소성일의 함수로 생각할 수 있으므로 다음과 같이 표현된다.

$$dk = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p = \sigma_e d\varepsilon_e^p \quad (10)$$

항복 후 거동에 대한 응력-변형률관계를 증분형으로 쓰면

$$d\sigma_{ij} = C_{ijk1} (d\varepsilon_{k1} - d\varepsilon_{ij}^p) \quad (11)$$

이고, Von Mises의 항복조건식에 대한 연합흐름법칙 (associated flow rule) 은

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (12)$$

이다⁽¹³⁾. 식(12)를 식(11)에 대입하면 다음과 같다.

$$d\sigma_{ij} = C_{ijk1} (d\varepsilon_{k1} - a_{k1} d\lambda) \quad (13)$$

$$\text{단, } a_{k1} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{k1}}$$

소성항복이 생겼을 때의 응력은 식(9)을 미분해서 얻어지는 다음 식을 만족한다.

$$dF = a_{ij} d\sigma_{ij} - \frac{d\varphi}{dk} dk = 0 \quad (14)$$

식(14)에 식(10)과 식(13)을 대입하여 비례계수 $d\lambda$ 를 정리하면 다음과 같이 된다.

$$d\lambda = \frac{1}{\gamma'} a_{ij} C_{ijk1} d\varepsilon_{k1} \quad (15)$$

$$\text{단, } \gamma' = a_{ij} C_{ijk1} a_{k1} + H'$$

여기서 H' 는 응력과 소성변형률의 관계를 나타내

는 단축응력곡선의 기울기이다. 다시 말해서 응력과 총변형률의 관계에서 H' 를 탄성역의 기울기 E 와 소성역의 기울기 ET 로 나타내면, $H' = \frac{ET}{E - ET}$ 의 관계를 갖는다. 식(13)에 식(15)를 대입하여 정리하면, 초기응력 증분 $d\sigma_{ij}^0$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$d\sigma_{ij}^0 = \frac{1}{\gamma'} C_{ijmn} a_{mn} a_{k1} d\sigma_{k1}^0 \quad (18)$$

여기서 $d\sigma_{k1}^0$ 은 탄성응력 증분값으로 $C_{k1op} d\varepsilon_{op}$ 를 나타낸다. 초기응력 증분 $d\sigma_{ij}^0$ 에 의한 초기 탄성변형률에너지 증분 du_0^2 를 응력성분으로 나타내면 다음과 같다.

$$du_0^2 = \frac{1}{2E} [(d\sigma_{xx}^p)^2 + d\sigma_{yy}^p]^2 - 2\nu (d\sigma_{xx}^p d\sigma_{yy}^p + d\sigma_{yy}^p d\sigma_{zz}^p + d\sigma_{zz}^p d\sigma_{xx}^p)] + \frac{1}{2G} d\tau_{xy}^p{}^2 \quad (19)$$

또한, Fig.1⁽¹⁴⁾의 등가 응력-변형률선도에 의한 초기 탄성변형률에너지 증분 du_0^2 는 이미 응력상태를 알고있는 A점에서 하중증분을 주었을 경우에 대하여 고려하기로 한다. 탄성상태로 가정하여 Fig. 1의 A점에서 하중증분을 주면, 탄성응력 증분 $d\sigma_{ij}^0$ 만큼 증가되어 응력은 Fig. 1의 T점에 존재하고 탄성변형률 증분은 Fig. 1의 선분 A''T'로 나타내며 탄성변형률에너지 증분 du_0^2 는 면적 A''ATT'로 된다. 그러나, 실제로는 소성상태이므로 응력은 Fig. 1의 F점에 존재하고 변형률에너지 증분 du_0^2 는 면적 A''AFT'로써 나타낸다. Fig. 1에서 보면 총변형률 증분은 소성변형률 증분인 선분 AF'와

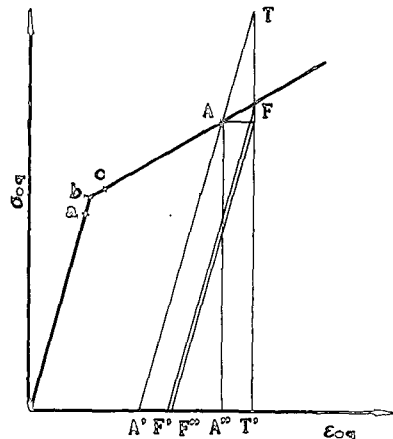


Fig. 1 Schematic representation of stress-strain curve

탄성변형률 증분 $F'F''$ 의 합인 선분 $A'F''$ 이고, 이는 선분 $A'T'$ 와 같다. 이같이 변형률의 크기는 같고 응력의 크기는 다르므로 변형률에너지 증분의 차이가 존재한다. 그 차이가 초기 탄성변형률에너지 증분 du_g^e 이며 Fig. 1에서 삼각형 ATF의 면적을 나타낸다. 식(4)와 같은 형으로 초기 탄성변형률에너지 증분 du_g^e 를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$du_g^e = du_g^e - du_g \quad (20)$$

재료의 탄성범위내에서부터 여러번 하중증분을 주어 응력해석을 하면, 내부영역요소가 탄성상태에서 소성상태로 넘어가는 과정을 3가지로 구분할 수 있다. 첫째로, 최초의 소성이 생기기 바로 직전의 탄성응력상태에서 그 다음의 하중증분에 의해서 소성이 생기는 경우로써 Fig. 1에서 이미 알고있는 응력상태가 a인 경우이다. 둘째로, 재료의 초기항복점에서 하중증분이 시작하는 경우로써 Fig. 1의 b점인 경우이다. 셋째로, 탄성해석 중에 이미 재료의 초기항복점을 넘어선 곳에서 부터 하중증분을 주어 소성해석을 하는 경우로써 Fig. 1의 c점인 경우이다. 탄성상태에서 소성상태로 넘어가는 과정의 첫번째와 두번째의 경우에는 앞에서 언급한 바와 같은 방법으로 초기 탄성변형률에너지 증분을 구하고, 셋째의 경우에는 초기에 이미 생긴 탄성변형률에너지 증분 즉, c점과 초기항복점의 차이에 의해 생기는 초기 탄성변형률에너지 증분과 하중증분에 의해서 생기는 초기 탄성변형률에너지 증분의 합으로 된다. 그러므로 식(19)에서 계산한 초기 탄성변형률에너지 증분을 응력-변형률선도에 의해 구한 초기 탄성변형률에너지 증분에 수렴시켜 초기응력 증분을 계산한다.

4. 해석 및 고찰

해석하고자하는 연속체는 비압축성 선형등방성화 재료 가정하며, 2차원 문제를 재료비선형으로 생각하여 PC로써 해석하였다. 간략화한 흐름도는 Fig. 2와 같다.

본 해석방법의 타당성을 나타내기위하여, 해석대상을 양편 V형 노치를 갖는 박판에 단순인장력이 작용하는 경우와 살두께가 두꺼운 실린더에 내압이 작용하는 경우로 나누어 해석하였으며, 그 결과를 NISA로 구한 결과와 비교하였다. 두 경우 모두 다 종탄성계수 E 는 $2.1 \times 10^4 \text{Kg/mm}^2$, 항복응력 σ_y

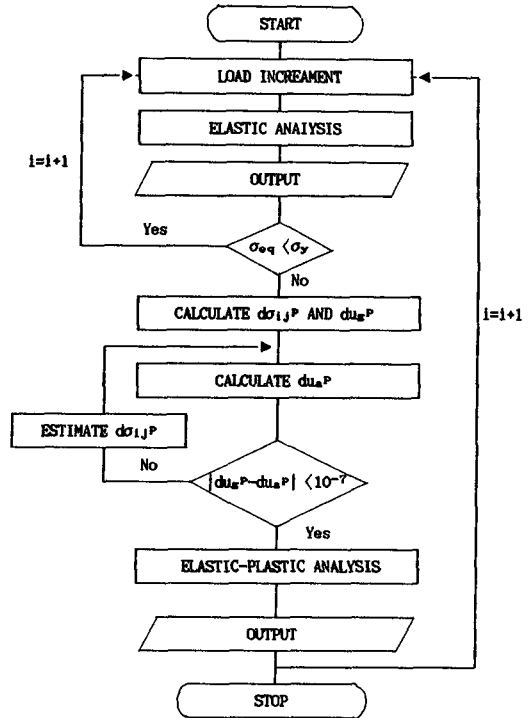


Fig. 2 Simplified flow chart

는 30kg/mm^2 , 포아송비 ν 는 0.33, 단축응력 곡선에 대한 소성구역의 기울기 $E_T (= \tan \beta)$ 는 0.577인 재료로 가정하였다. 식(7)과 식(8)을 이산화(discretization)시키는데 있어서 변위, 표면력, 응력등의 변화가 심한 곳에는 일정요소(constant element)로 분할을 세분화하였다. 또한, 외력이 증가함에 따라 내부영역에 국부적인 소성이 생길 것으로 예상되는 곳을 Fig. 3과 Fig. 4와같이 일정 삼각형요소로 분할하였다. 이산화시킨 후, 내부영역요소를 일정요소로 하는 적분은 두가지 경우로 나누었다. 첫째로 점 ζ 가 점 x 와 일치됐을 때는 해석적인 적분방법으로 하고 그 외에는 Gauss 수치적분법을 이용하는 경우와 둘째로 모두 Gauss 수치적분법을 이용하여 해석하는 경우이다.

4.1 양편 V형 노치를 갖는 박판

해석대상물체가 상하좌우대칭이므로 Fig. 3에서 보는 바와 같이 1/4만을 해석대상으로 고려하였으며, 경계요소법에서는 경계를 38개의 일정 경계요소로 분할하고 내부영역을 100개의 일정 삼각형요소로 분할하였다. NISA에서는 선형요소로 노치부

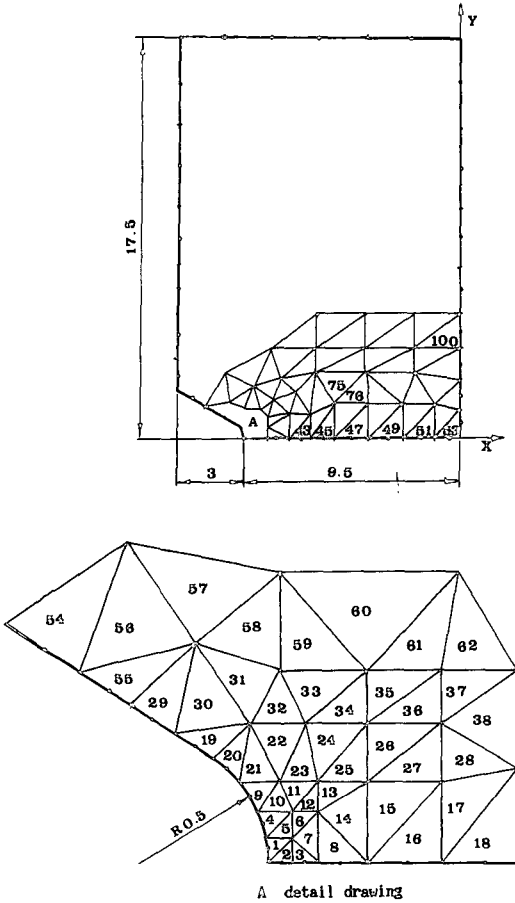


Fig. 3 Boundary elements and interior cells discretization of thin plate with v-notches

근의 영역을 경계요소법에서 내부영역요소분할한 것과 같이 하고 그 외의 영역을 56개 요소로 분할 하였으므로, 총 156개의 삼각형요소로 분할한 셈이다. 경계요소법에서 인장하중을 5.1kg/mm^2 에서부터 시작하여 0.2kg/mm^2 씩 증가시켜 해석하다가 Von Mises의 항복조건식에 의해 소성영역발생이 판정되면 바로 전의 하중에서부터 다시 0.01kg/mm^2 씩 증가시켜 해석하였다. 그 결과, 5.33kg/mm^2 에서 내부영역요소의 중심적 좌표가 $(-9.47, 0.066)$ 인 1번이 최초의 소성을 나타내었다. 여기서 다시 하중증분량을 1.07kg/mm^2 및 1.0kg/mm^2 만큼씩 증가시켜 인장하중 8.4kg/mm^2 일 때 탄소성 해석을 한 결과, 반해석적 적분인 경우와 수치적분인 경우 모두 내부영역요소 1, 2, 3, 4, 5, 6번에서 소성이 발생하였다. NISA에서는 인장 하중 5.3kg/mm^2 하에서 최초의 소성이 1번 요소에서 발생하였

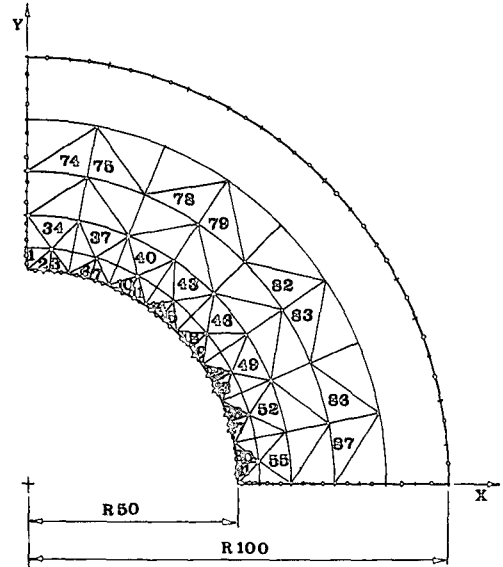


Fig. 4 Boundary elements and interior cells discretization of thick cylinder

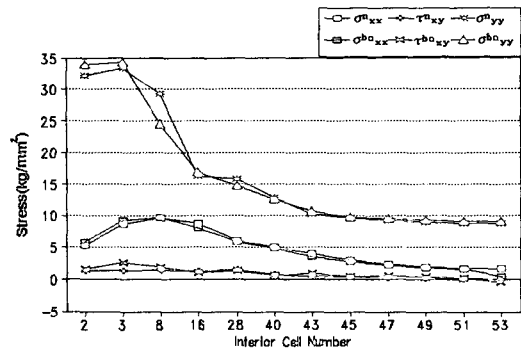


Fig. 5 Comparison of stresses calculated by NISA and B.E.M. using semi-analytical integral on the thin plate with v-notches

고, 인장하중이 8.4kg/mm^2 인 경우 내부영역요소 1, 2, 3, 4, 5, 6번에서 소성이 발생하였다.

NISA와 반해석적인 경계적분법에 의한 노치선단에서의 응력분포를 비교한 결과, Fig. 5에서 보는 바와 같이, 반해석적인 경계적분법에 의해 구한 x 방향의 응력 σ^{ba}_{xx} , 전단응력 τ^{ba}_{xy} , y 방향의 응력 σ^{ba}_{yy} 는 NISA로 구한 x 방향의 응력 σ^{n}_{xx} , 전단응력 τ^{n}_{xy} , y 방향의 응력 σ^{n}_{yy} 와 같은 경향을 나타내고 있으나 2번과 8번 내부요소에서 각각 약 1.7kg/mm^2 과 2.9kg/mm^2 의 차이로 일치하지 않지만 이들을 제외한 다른 영역요소에서는 비교적 잘 일

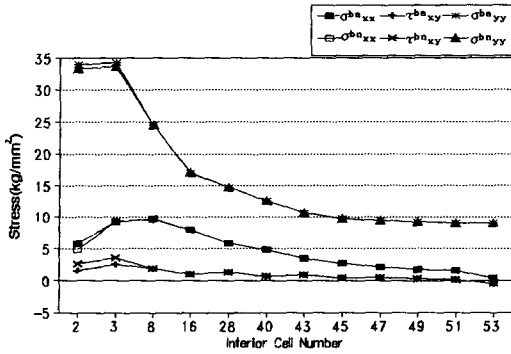


Fig. 6 Comparison of stresses calculated by B.E.M. using semianalytical integral and numerical integral on the thin plate with v-notches

치하고 있다. 또한, 경계요소법의 영역적분에 있어서 반해석적인 적분방법과 전부 수치적분방법에 의한 노치선단에서의 응력분포는 Fig. 6에서 보는 바와같이 서로 잘 일치하고 있다.

위와 같이 비교한 결과로 미루어 보아서, 본 연구에서 적용한 초기 탄성변형률에너지 증분에 의한 수렴방법이 타당하다고 볼 수 있다. 또한, 경계요소법의 내부영역적분에 있어서 반해석적인 적분방법과 모든 영역의 수치적분방법을 비교하면, 양자간의 결과치 차이는 작다. 반해석적인 적분방법은 수치적분방법에 비하여 적분해석하는데 드는 시간과 노력이 많이 소요되므로 수치적분방법에 비해 상당히 비효율적임을 알 수 있다.

4.2 실두께가 두꺼운 실린더

실린더가 상하좌우대칭인 관계로 Fig. 4와같이 1/4만을 해석 대상으로 고려하였고, 경계요소법에서는 일정 경계요소 및 삼각형 내부영역 요소를 각각 70개, 88개로 분할하였으며, NISA에서는 선형요소로 내부영역을 앞에서와 같이 88개의 요소로 분할하고 그 외의 영역을 16개의 요소로 분할하였으므로 총 104개의 삼각형요소로 분할된 셈이다. 경계요소법에 의한 해석은 내압을 13.651kg/mm²에서부터 0.01kg/mm²씩 증가시켜 탄성해석을 하면서 Von Mises의 항복조건식에 의해 소성 영역을 검토하였다. 소성영역이 발견되면 바로 전의 압력상태보다 0.001kg/mm²씩 크게하여 해석함으로써 최초의 소성영역 및 내압을 구하였다. 그 결과 13.653kg/mm² 압력하에서 내부영역요소 2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15, 18, 19, 22, 23, 26, 27, 30, 31번에서 최초

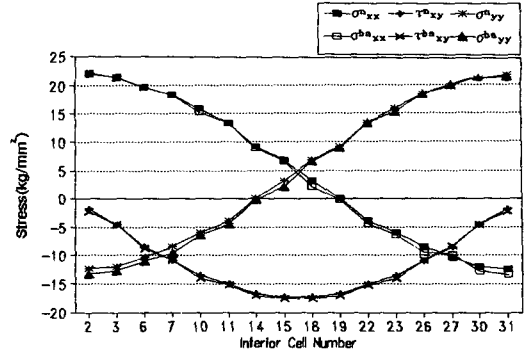


Fig. 7 Comparison of stresses calculated by NISA and B.E.M. using semi-analytical integral on the inner radius 51.9mm of thick cylinder

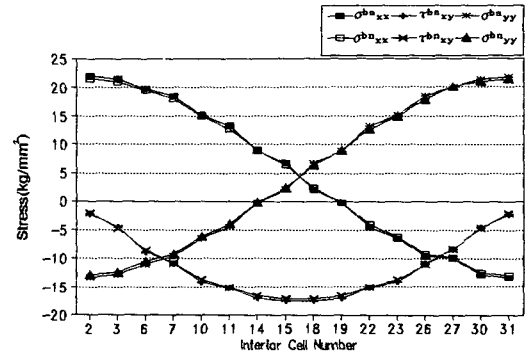


Fig. 8 Comparison of stresses calculated by B.E.M. using semianalytical integral and numerical integral on the inner radius 51.9mm of thick cylinder

의 소성이 발생하였다. 다시 말해서 이는 반경 약 51.9mm인 전원주에 걸쳐 최초의 소성이 발생한다는 것을 나타낸다. 최초의 소성이 생긴 이후부터는 다시 내압증분을 0.147kg/mm² 및 0.2kg/mm²씩 증가시켜서 내압 14.2kg/mm²이 작용할 때 탄소성해석을 하였다. NISA에 의하면 경계요소법으로 해석한 같은 장소인 반경 약 51.9mm인 곳에 최초의 소성을 발생시키는 압력은 13.63kg/mm²로 밝혀졌다.

내압이 14.2kg/mm²일 때 소성영역의 확대는 두 방법에 의해 해석한 결과 똑같이 더 이상 일어나지 않았다. 내압 14.2kg/mm²하에서 소성상태를 나타내고 있는 반경 약 51.9mm인 원주방향 즉 2, 3, 5, 7, 10, 11, 14, 15, 18, 19, 22, 23, 26, 27, 30, 31번 내부영역요소의 응력분포는 Fig. 7과 Fig. 8에 나타내었고, 탄성상태인 반경 약 79.67mm인 원주방향 즉

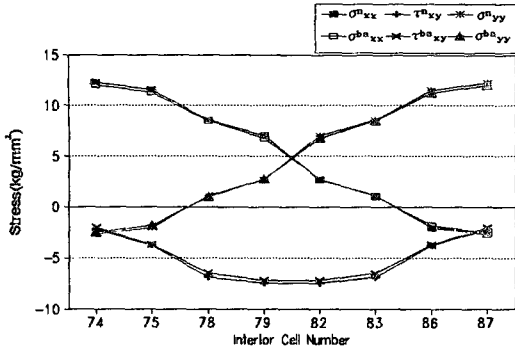


Fig. 9 Comparison of stresses calculated by NISA and B.E.M. using semi-analytical integral on the inner radius 79.67mm of thick cylinder

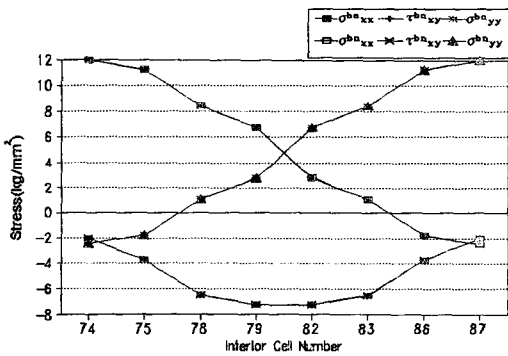


Fig. 10 Comparison of stresses calculated by B.E.M. using semianalytical integral and numerical integral on the inner radius 79.67mm of thick cylinder

74, 75, 78, 79, 82, 83, 86, 87번 내부영역요소의 응력분포는 Fig. 9 Fig. 10에 나타내었다. 이들 그림에서 보는 바와같이 내부영역요소 15, 18번과 79, 82번 사이의 중간에 y방향 축을 중심으로 x방향의 응력이 y방향의 응력과 대칭을 이루고 있고 전단응력도 대칭을 이루고 있다. 따라서 각 요소에 대한 등가응력을 계산하면 모두 같은 값을 갖는다. Fig. 7에서 보는 바와같이 NISA에서 구한 x방향의 응력 σ_{xx}^n , 전단응력 τ_{xy}^n , y방향의 응력 σ_{yy}^n 와 반해석적인 경계적분법에 의해 구한 x방향의 응력 σ_{xx}^{ba} , 전단응력 τ_{xy}^{ba} , y방향의 응력 σ_{yy}^{ba} , τ_{xy}^{ba} , σ_{yy}^{ba} 도 Fig. 8에서 보는 바와같이 서로 잘 일치하고 있다. 탄성상태에 있는 반경 약 79.67mm인 곳의 응력분포는 Fig. 9에서 보는 바와같이 NISA에서 구한 σ_{xx}^n , τ_{xy}^n , σ_{yy}^n 와 반해석적인 경계적분법에 의해 구한 σ_{xx}^{ba} , τ_{xy}^{ba} , σ_{yy}^{ba} 는 서로 잘 일치

하고 등가응력은 약 13kg/mm² 정도의 값을 갖는다. 영역적분에 있어서 반해석적인 적분방법에 의해 해석된 응력 σ_{xx}^{ba} , τ_{xy}^{ba} , σ_{yy}^{ba} 와 모든 영역을 수치적분방법에 의해 해석된 응력 σ_{xx}^{na} , τ_{xy}^{na} , σ_{yy}^{na} 도 Fig. 8에서 보는 바와같이 서로 잘 일치하고 있다.

따라서 본 연구에서 적용한 해석방법에 의한 결과와 NISA의 해석 결과가 비교적 잘 일치하고 있으므로 초기 탄성변형률에너지 증분에 의한 수렴이 타당하다고 볼 수 있다. 또한, 내부영역적분에 있어서 반해석적인 적분방법으로 해석한 결과와 모든 내부영역을 수치적분방법으로 해석한 결과를 비교하면, 양자 간의 결과치 차이는 작다. 따라서 적분하는데 많은 시간을 필요로 하는 반해석적인 적분 방법보다는 수치적분방법으로 해석하는 것이 좋다고 사료된다.

5. 결론

2차원 재료비선형문제를, PC를 이용한 경계요소법으로 해석한 결과, 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 응력-변형률 선도에 의한 초기 탄성변형률에너지 증분을 수렴기준으로 하는 초기응력 증분의 결정 방법에 대하여 타당성을 입증하여 제시하였다.

(2) 내부영역적분에 있어서 반해석적인 적분방법으로 해석한 결과와 모든 내부영역을 수치적분방법으로 해석한 결과를 비교하면, 양자 간의 결과치 차이는 작다. 그러므로 해석적으로 적분하는데 많은 시간과 노력을 필요로 하는 반해석적인 적분 방법보다는 수치적분방법으로 해석하는 것이 바람직하다.

(3) 해석예에서 양편 V-형 노치를 갖고 단순 인장하중을 받는 박판은 경계요소법에서는 하중 5.33 kg/mm²인 경우에, NISA에서는 5.3kg/mm²인 경우에 내부영역요소의 중심적 좌표가 (-9.47, 0.066)인 1번에서 최초의 소성을 나타내었다. 내압을 받는 실린더는 경계요소법에서는 내압 13.653 kg/mm²인 경우에, NISA에서는 13.63kg/mm²인 경우에 반경 약 51.9mm인 전원주에 걸쳐 최초의 소성을 나타내었다.

참고문헌

- (1) Swedlow, J.L. and Cruse, T.A., 1971, "Formu-

lation of Boundary Intergral Equations For Three-Dimensional Elasto-Plastic Flow," Int. J. Solids Structures, Vol.7, pp. 1673~1683.

(2) Subrata Mukherjee, 1977, "Corrected Boundary Integral Equations in Planar Thermoelastoplasticity," Int. J. Solids Structures, Vol. 13, pp. 331~335.

(3) Virendra Kumar and Subrata Mukherjee, 1977, "A Boundary Integral Equation Formulation for Time-Dependent in Elastic Deformation in Maters," Int. J. Mech. Sci., Vol. 19, pp. 713~724.

(4) Bui,H.D., 1978, "Some Remarks about the Formulation of Three-Dimensional Thermoelastoplastic Problems By Integral Equations," Int. J., Solids Structures, Vol.14, pp. 935~939.

(5) Telles,J.C.F. and Brebbia,C.A., 1981, "The Boundary Element Method in Plasticity," Appl. Math. Modelling, vol.5, pp.275~281.

(6) Telles, J.C.F. and Brebbia,C.A., 1981, "Boundary Elements : New Developments in Elastoplastic Analysis," Appl. Math. Modelling, Vol.5, pp. 375~382.

(7) Telles, J.C.F. and Brebbia,C.A., 1982, "Elastic/Viscoplastic Problems Using Boundary Elements," Int. J. Meth. Sci., Vol.24, No.10, pp. 605~618.

(8) Brebbia, C.A., Telles, J.C.F. and Wrobel, L.C., 1984, "Boundary Element Techniques ; Theory and Applications in Engineering," Springer-Verlag, pp. 237~305.

(9) Brebbia, C.A. and Walker, S., 1980, "Boundary Element Techniques in Engineering," Newnes-Butterworths, pp. 1~24, pp. 80~119.

(10) 岩崎龍一, 石崎泰郎, 1988, "境界要素法による非弾性解析", 日本機械學會論文集(A編), 53卷, 495號, pp. 2066~2070.

(11) Brebbia,C.A., 1980, "The Boundary Element Method For Engineers," Pentech Press, pp. 6~45, pp. 116~131.

(12) 戸川集人, 下關正義, 1985, "パソコンによる境界要素法入門", サイエンス社, pp. 131~135, pp. 197~199.

(13) 平修二, 1980, "現代塑性力學", pp. 33~55.

(14) 辻勇, 井手敏治, 小柳雅博, 渡利久規, 1987, "境界要素法による熱弾塑性應力解析について", 西部造船會會報, 72號, pp. 35~47.

부록 I

내부영역을 Fig. 5와 같이 일정삼각형요소로 분할한 경우에 점 ζ 와 점 x 가 같을 때, ϵ_{jki}^* 와 ϵ_{ijk}^* 의 해석적인 적분을 다음과 같이 하였다.

ϵ_{jki}^* 와 ϵ_{ijk}^* 가 $r(\zeta, x)$ 만의 함수이므로 등방적임을 알 수 있다. 따라서 Fig. 11에서 보는 바와같이 요소의 중심을 원점으로하는 3개의 구역으로 나누어 극좌표로써 적분계산하는것이 좋다.

$$|r_1| = \frac{a \sin \alpha_2}{\sin(\theta + \alpha_2)}, \quad |r_2| = \frac{b \sin \alpha_3}{\sin(\theta + \alpha_3)},$$

$$|r_3| = \frac{c \sin \alpha_1}{\sin(\theta + \alpha_1)}$$

$$\hat{r}_1 = \left[\left[\frac{2}{3}(x_2 - x_3) - \frac{1}{3}(x_1 - x_3) \right] - (x_2 - x_3) \right]$$

$$- (x_2 - x_3) \frac{a \sin \theta}{L_2 \sin(\theta + \alpha_2)} \Big] \hat{i}$$

$$+ \left[\left[\frac{2}{3}(y_2 - y_3) - \frac{1}{3}(y_1 - y_3) \right] \right]$$

$$- (y_2 - y_3) \frac{a \sin \theta}{L_2 \sin(\theta + \alpha_2)} \Big] \hat{j}$$

$$\hat{r}_2 = \left[(x_1 - x_3) \frac{b \sin \theta}{L_1 \sin(\theta + \alpha_3)} - \left[\frac{1}{3}(x_1 - x_3) \right. \right]$$

$$+ \left. \frac{1}{3}(x_2 - x_3) \right] \Big] \hat{i}$$

$$+ \left[(y_1 - y_3) \frac{b \sin \theta}{L_1 \sin(\theta + \alpha_3)} \right]$$

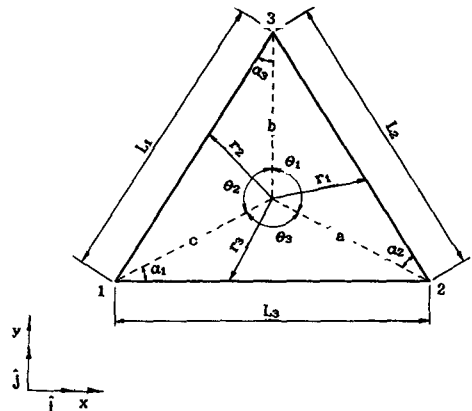


Fig. 11 Geometrical definitions for analytical integration

$$\begin{aligned} & -\left[\frac{1}{3}(y_1 - y_3) + \frac{1}{3}(y_2 - y_3)\right] \hat{j} \\ \hat{\gamma}_3 = & \left[\left[\frac{2}{3}(x_1 - x_3) - \frac{1}{3}(x_2 - x_3) \right] \right. \\ & - (x_1 - x_2) \frac{c \sin \theta}{L_3 \sin(\theta + \alpha_1)} \left. \right] \hat{i} \\ & + \left[\left[\frac{2}{3}(y_1 - y_3) - \frac{1}{3}(y_2 - y_3) \right] \right. \\ & \left. - (y_1 - y_2) \frac{c \sin \theta}{L_3 \sin(\theta + \alpha_1)} \right] \hat{j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{jki} = & \int_{\text{I}} \epsilon_{jki}^*(\zeta, x) d\Omega + \int_{\text{II}} \epsilon_{jki}^*(\zeta, x) d\Omega \\ & \int_{\text{II}} \epsilon_{jki}^*(\zeta, x) d\Omega = \int_0^{\theta_1} \int_0^{r(\theta_1)} \epsilon_{jki}^*(\zeta, x) r dr d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \int_0^{\theta_2} \int_0^{r(\theta_2)} \epsilon_{jki}^*(\zeta, x) r dr d\theta \\ & + \int_0^{\theta_3} \int_0^{r(\theta_3)} \epsilon_{jki}^*(\zeta, x) r dr d\theta \\ F_{ijk1} = & \int_{\text{I}} \epsilon_{ijk1}^*(\zeta, x) d\Omega + \int_{\text{II}} \epsilon_{ijk1}^*(\zeta, x) d\Omega \\ & + \int_{\text{III}} \epsilon_{ijk1}^*(\zeta, x) d\Omega \\ = & \int_0^{\theta_1} \int_0^{r(\theta_1)} \epsilon_{ijk1}^*(\zeta, x) r dr d\theta \\ & + \int_0^{\theta_2} \int_0^{r(\theta_2)} \epsilon_{ijk1}^*(\zeta, x) r dr d\theta \\ & + \int_0^{\theta_3} \int_0^{r(\theta_3)} \epsilon_{ijk1}^*(\zeta, x) r dr d\theta \end{aligned}$$

단, $r, i = -\frac{\partial r}{\partial x_i(\zeta)} = -\frac{r_i}{r}$ 이다.