

〈論 文〉

에너지법에 의한 직사각형 격막의 정수압벌징 해석

양동열* · 이항수**

(1991년 11월 21일 접수)

Analysis of Hydrostatic Bulging of a Rectangular Diaphragm by Using the Energy Method

Dong-Yol Yang and Hang-Soo Lee

Key Words : Energy Method(에너지법), Hydrostatic Bulging of Rectangular Diaphragm(직사각형 격막의 정수압 벌징), Sweep Surface(스융곡면), Aspect Ratio(축비), Composite Surface(복합곡면)

Abstract

The present study is concerned with the analysis of three-dimensional sheet metal forming process by the upper-bound method. For the analysis a systematic approach is necessary for the expression of geometric configuration of the deforming workpiece. In the present paper geometric configuration is constructed by three unit surfaces which are defined by sweeping the vertical section curves and boundary curve. The principal components of strain increment during the process is calculated directly from the change of geometric configuration for an arbitrary triangular element. The corresponding solution is found through optimization of the total energy consumption with respect to some parameters assumed in the velocity field and geometric profile. In order to verify the effectiveness of the present method, hydrostatic bulging of a rectangular diaphragm is analyzed and the computation by the present method for the geometric shape renders the good result. From the comparison of the present results with the existing experimental results and elastic-plastic finite element solutions, good agreements have been obtained for the pressure curves, polar membrane strains and pressure distributions. The present method can thus be further applied to the analysis of other three-dimensional sheet metal forming processes.

기 호 설 명

$G_{\alpha\beta}, G'_{\alpha\beta}$: 한 단계 전후에서의 metric 텐서
 G, G' : $G_{\alpha\beta}$ 와 $G'_{\alpha\beta}$ 행렬식
 K, ϵ_0, n : 응력과 변형도의 관계를 나타내기 위한 상수
 h : 센터의 높이
 p : 유체의 작용압력
 R : 수직 이방성을 나타내는 이방성 계수

S_v : 속도가 정의된 경계
 S_T : 외력이 정의된 경계
 T_i : 외력 벡터
 v^* : 동적 가용 속도장
 V : 변형물체의 체적 (body volume)
 W_{act} : 실제의 일
 W^* : 동적 가용 속도장에 의한 일
 W_i : 내부 변형 에너지
 $\Delta\epsilon_1, \Delta\epsilon_2, \Delta\epsilon_3$: 변형률 증분의 주성분
 $\Delta\dot{\epsilon}$: 유효 변형률 증분

*정회원, 한국과학기술원 정밀공학과

**정회원, 기아자동차(주) 생산기술본부

- $\epsilon, \bar{\epsilon}$: 유효 변형률 속도 및 유효 변형률
 ϵ_{ij}^0 : 동적 가용 속도장(v^0)에 따른 변형률 속도
 σ_{ij}^0 : ϵ_{ij}^0 에 따른 항복응력장
 $\bar{\sigma}$: 유동 응력
 λ_α : 주 변형 길이비

1. 서 론

박판 금속 성형에 대한 에너지법의 적용은 주로 상계해법(upper-bound method)에 의한 하이드로포밍 공정이나 정수압 별장 공정등의 해석을 통하여 이루어져 왔으며, 플랜지 부분의 평면 변형이나 비교적 간단한 형상의 축대칭 문제에 대한 보고들이 많다. Tirosh등⁽¹⁾은 축대칭 하이드로포밍에서 펀치의 행정에 따른 적절한 압력을 찾기 위하여 상계 해법을 적용하였다. Noh와 Yang⁽²⁻³⁾은 비축대칭 용기를 제작하기 위한 하이드로포밍 공정에서 균일한 두께의 제품을 얻기 위한 펀치 행정과 유체 압력의 관계를 상계해석을 통하여 구하였다. 이들은⁽¹⁻³⁾ 플랜지와 펀치 사이의 곡면을 날카롭다고 가정한 가운데 속도 불연속에 의한 에너지 소비율 및 블랭크 홀더에 접촉된 플랜지 부분의 평면 변형에 의한 에너지 소비율을 최소화 하는 속도장을 찾는 방법으로 하이드로포밍을 해석하였다. Yang과 Noh⁽⁴⁾는 상계 해법을 적용시켜 간단하면서도 적당한 속도장으로 축대칭 정수압 별장을 해석하였으며 실험과 비교하여 좋은 일치를 보였다.

지금까지 에너지법에 의해 연구된 결과의 대부분은 간단한 속도장을 갖는 2차원 문제에 대한 것으로서, 축대칭 공정이나 플랜지 변형이 추가되는 공정에 관한 것들이다. 일반적으로 박판 성형공정에 의해 생산된 대부분의 제품들은 그 형상이 매우 복잡하며 이를 에너지법으로 해석하는 데에는 다음과 같은 문제점들이 대두된다.

첫째, 기하학적 형상의 해석적인 표현

둘째, 전체 변형 영역에 만족되는 적합한 동적 가용 속도장(kinematically admissible velocity field ; KAVF)의 구성

셋째, 변형 영역 내에서 속도장의 미분을 통한 변형률의 계산

축대칭 문제나 평면 문제로 취급할 수 있는 비교적 간단한 공정에 있어서 이러한 문제들은 비교적 쉽게 해결된다. 그러나 대부분의 3차원 형상과 같

이 복잡한 형상을 위한 박판 성형 공정을 해석할 때는 3차원 곡면 내에서 전체 변형 영역에 적합한 좌표계를 선정하는 것도 간단하지 않다. 이러한 이유로 인하여 지금까지는 특정한 공정에 따르는 특수한 해를 얻는 방법으로 연구가 진행되어 왔다.

축대칭 박판 성형공정의 해석에 대하여 이러한 제한점을 극복하기 위하여 Lee와 Yang⁽⁵⁾이 전체 변형 영역을 몇개의 작은 영역으로 분할한 뒤, 각 영역에서 각각 정의된 단위 속도장을 조합하여 전체 변형영역에서의 속도장으로 구성하여 에너지법으로 해석하는 방법을 제안하였으며 반구형 펀치에 의한 인장성형을 해석하여 좋은 결과를 보였다.

또한 그들은 3차원 박판성형 공정을 에너지법으로 효율적으로 해석하기 위하여, 변형증분을 성형중의 변위장의 변화로부터 직접 구하는 방법을 도입하여 타원형 격막의 정수압 별장을 해석하였으며 실험결과와 비교하여 좋은 결과를 얻었다.⁽⁶⁾

그러나 일반적인 3차원 박판성형에 대하여 효과적으로 기하학적 형상을 표현하는 데에는 보다 체계적인 연구가 필요하다.

본 논문에서는 3차원 형상의 금형에 의한 박판 금속 성형 공정을 에너지법으로 해석함에 있어 스융 곡면(sweep surface)을 통해 기하학적 형상을 효과적으로 표현하는 방법을 제안하고, 이를 직사각형 격막의 정수압별장의 해석에 응용하여 이에 의한 결과를 이미 보고된 자료와 비교함으로써 일반적인 박판 성형공정을 해석하는데 본 이론의 적용 가능성에 대하여 논의하고자 한다.

직사각형 격막의 정수압별장은 2축응력 상태에서의 가공경화 특성을 살펴보기 위한 재료시험법으로 많이 사용되고 있으며, 실험적으로 또는 이론적으로 많은 논문을 통하여 연구되어 왔다.

Duncan등⁽⁷⁻⁹⁾은 직사각형 및 타원형 격막의 정수압 별장에 대하여 간단한 계산과 함께 실험결과를 보고하였다. 그들은 정수압 별장에서의 비례변형(proportional straining)상태에서의 가공경화 특성에 대하여 실험적으로 고찰하였다. Ilahi등⁽¹²⁾은 Hill의 신이방성 이론을 바탕으로 유한 차분법으로 축대칭 정수압 별장을 해석하였으며, Iseki등⁽¹¹⁻¹²⁾은 탄소성 유한요소법으로 축대칭 및 타원형 그리고 직사각형 격막의 정수압 별장을 해석하였다. Yang등⁽¹³⁻¹⁴⁾은 박판재의 수직 이방성을 고려하여 타원형 및 직사각형 격막의 정수압 별장을 강소성 유한요소해석하였다. 그리고 Shim과 Yang⁽¹⁶⁾은 탄

소성 적층 쉘 이론을 바탕으로 한 탄소성 유한요소 방법으로 직사각형 격막의 정수압 벌징을 해석하였다.

제안된 방법에서 기하학적 형상은 직교좌표계상의 기본 평면위에 스윕곡면으로 표현하였으며, 전체 영역에서 등적 가용 속도장의 조건이 만족되도록 속도장이 구성된다. 그리고 문제의 해를 구하기 위해 소재의 내부 변형 에너지 및 마찰 에너지등을 포함하는 전체 에너지 소비를 최소화시키는 최적화 변수를 찾는다. 여기서 최적화 변수는 속도장뿐만 아니라 기하학적 형상에 대하여도 가정된다. 기하학적 형상도 속도장에 따라 가변성이 있으므로 속도장과 일치하는 형상으로 최적화 되어야 하기 때문이다. 해석 모델에서 xz -평면 및 yz -평면에서의 기하학적 형상은 타원의 일부로 가정하였으며 다이와 경계에서는 힌지(hinge)조건을 가정하였다.

2. 스윕 곡면에 의한 기하학적 형상의 표현

대부분의 3차원 박판 성형 공정에 대하여 기하학적 형상을 단일 함수로 표현하는 데에는 많은 제한점이 따른다. 어떤 영역의 경계를 나타내는 곡선으로부터 전체 곡면을 형성하는 방법에는 여러가지가 있으나 직교 좌표계 내에서 $z=z(x,y)$ 형태의 표현이 용이한 스윕 곡면을 적용했다⁽¹⁶⁾. 직교 좌표계 내에서의 복잡한 기하학적 형상은 유한한 개수의 xz -평면 및 yz -평면상의 단면곡선과 xy -평면상의 경계곡선으로 표현이 가능하다. Fig. 1은 직교 좌표계 내에서 형성된 복합 곡면의 한 예를 모식화

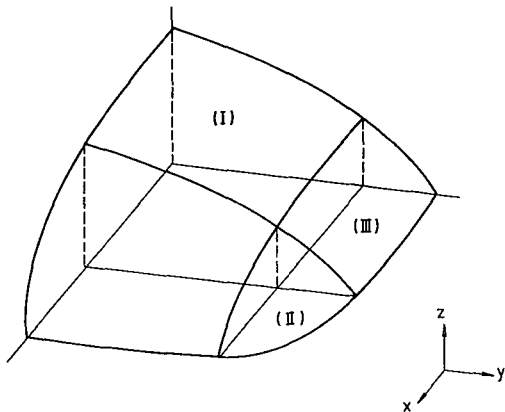


Fig. 1 Schematic diagram of a composite surface

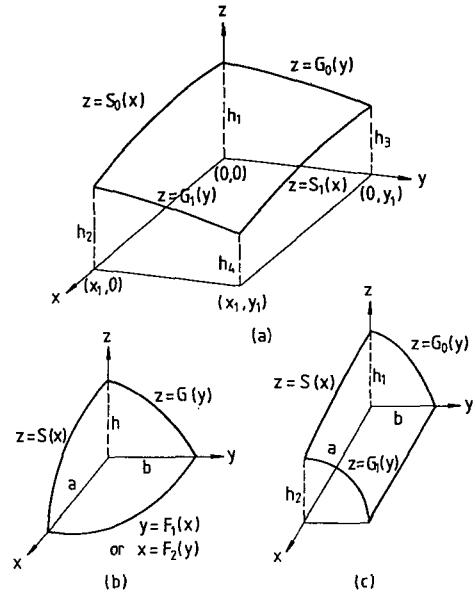


Fig. 2 Sweep surfaces : (a) with four-vertical sections, (b) with two-section curves and a boundary curve and (c) with three-vertical section curves and a boundary line

하여 보여주고 있는데, 이 그림으로부터 단위 곡면은 다음과 같은 세가지 형태로 분류시킬 수 있다.

- (가) 네개의 단면곡선에 의해 형성되는 곡면
- (나) 두개의 단면곡선과 경계곡선에 의해 형성되는 곡면
- (다) 세개의 단면곡선과 한개의 경계선에 의해 형성되는 곡면

위의 세가지 단위곡면은 독자적으로 또는 조합되어 전체 변형영역에 해당하는 복합 곡면을 구성한다. 이러한 곡면의 세가지 형태가 Fig. 2에 나타나 있다.

2.1 네개의 단면곡선에 의해 형성되는 곡면

Fig. 3에 두개의 단면곡선 및 한개의 안내곡선(guide curve)에 의해 형성되는 곡면이 모식화되어 나타나 있다. 이 그림에서 $G(y)$ 는 yz -평면상에서 정의된 안내곡선이며 $S_0(x)$ 및 $S_1(x)$ 는 xz -평면상에 정의된 단면곡선이다. 정의된 영역과 함께 이들은 다음과 같이 표현된다.

$$z = G(y), \quad y_0 \leq y \leq y_1 \tag{1.a}$$

$$z = S_0(x), \quad x_0 \leq x \leq x_1 \tag{1.b}$$

$$z = S_1(x), \quad x_0 \leq x \leq x_1 \tag{1.c}$$

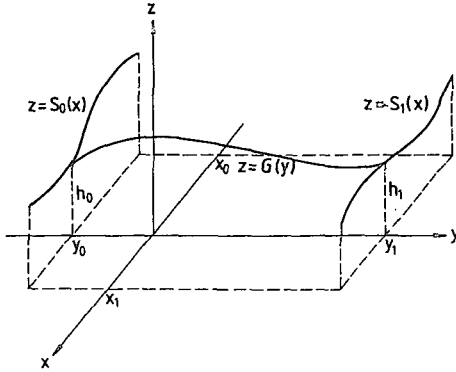


Fig. 3 Parallel sweep surface with two-section curves

이들 세개의 곡선으로부터 두개의 스위프곡면을 구성할 수 있다.

$S_0(x)$ 를 $G(y)$ 로 안내(guide)시키면 아래의 식(2.a)와 같이 되며 $S_1(x)$ 를 $G(y)$ 로 안내시키면 식(2.b)와 같이 된다.

$$z_0(x,y) = S_0(x) + G(y) - h_0, \quad x_0 \leq x \leq x_1, \quad y_0 \leq y \leq y_1 \quad (2.a)$$

$$z_1(x,y) = S_1(x) + G(y) - h_1, \quad x_0 \leq x \leq x_1, \quad y_0 \leq y \leq y_1 \quad (2.b)$$

여기서, $h_i = G(y_i), \quad i=0,1$

위의 두개의 곡면을 Hermite 혼합(blending)함수로 혼합시키면 아래와 같은 하나의 곡면이 형성된다.

$$z(x,y) = H_1(\eta) z_0(x,y) + H_2(\eta) z_1(x,y) = G(y) + H_1(\eta) [S_0(x) - h_0] + H_2(\eta) [S_1(x) - h_1] \quad (3)$$

여기서 $H_1(\eta)$ 와 $H_2(\eta)$ 는 Hermite 혼합 함수로서 다음과 같다.

$$H_1(\eta) = 1 - 3\eta^2 + 2\eta^3 \quad (4.a)$$

$$H_2(\eta) = 3\eta^2 - 2\eta^3 \quad (4.b)$$

이와 같은 방법으로 Fig. 2의 (a)에 있는 형태에 대하여도 기하학적 형상을 표현할 수 있다. $S_0(x)$ 와 $S_1(x)$ 를 $G_0(y)$ 로 스위핑(sweeping)시키면 아래의 식(5.a)와 같이 되며 $S_0(x)$ 와 $S_1(x)$ 를 $G_1(y)$ 로 스위핑시키면 아래의 식(5.b)와 같이 된다.

$$z_0(x,y) = G_0(y) + H_1(\eta) [S_0(x) - h_1] + H_2(\eta) [S_1(x) - h_2] \quad (5.a)$$

$$z_1(x,y) = G_1(y) + H_1(\eta) [S_0(x) - h_2] + H_2(\eta) [S_1(x) - h_1] \quad (5.b)$$

여기서, h_i 는 각 코너에서의 z -값을 나타낸다.

Hermite 혼합 함수를 이용하여 아래와 같이 x -방향으로 스위핑시키면 결과적으로, 다음과 같이 네개의 단면곡선에 의한 곡면을 얻을 수 있다.

$$z(x,y) = H_1(\xi) z_0(x,y) + H_2(\xi) z_1(x,y) \quad (6)$$

여기서 $H_1(\xi)$ 및 $H_2(\xi)$ 는 Hermite 혼합 함수를 나타낸다. 그리고 ξ, η 는 각각 아래와 같다.

$$\xi = (x - x_0) / (x_1 - x_0), \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (7.a)$$

$$\eta = (y - y_0) / (y_1 - y_0), \quad 0 \leq \eta \leq 1 \quad (7.b)$$

2.2 두개의 단면곡선과 경계곡선에 의해 형성되는 곡면

Fig. 1의 두번째 형태에 해당하는 곡면이 Fig. 2의 (b)에 모식화되어 나타나 있으며, 다음 두개의 단면곡선을 갖는다.

$$z = S(x), \quad 0 \leq x \leq a \quad (8.a)$$

$$z = G(y), \quad 0 \leq y \leq b \quad (8.b)$$

코너의 경계곡선은 다음 식으로 표현된다.

$$y = f_1(x), \quad 0 \leq x \leq a \quad \text{혹은} \quad x = f_2(y), \quad 0 \leq y \leq b \quad (8.c)$$

$G(y)$ 를 경계곡선의 영역내에서 x 방향으로 비례스위핑(proportional sweeping)시키면 아래와 같이 된다.

$$z_0(x,y) = \frac{1}{h} S(x) G\left(\frac{b}{f_1(x)} y\right) \quad (9.a)$$

여기서, $h = S(0) \equiv G(0)$

또한, $S(x)$ 를 y 방향으로 비례스위핑시키면 아래와 같이 된다.

$$z_1(x,y) = \frac{1}{h} G(y) S\left(\frac{a}{f_2(y)} x\right) \quad (9.b)$$

위의 두 식을 Brown혼합 함수를 이용하여 혼합하면 Fig. 1의 두번째 형태에 대하여 아래와 같은 식이 만들어 진다.

$$z(x,y) = \Psi(\xi, \eta) z_0(x,y) + \varphi(\xi, \eta) z_1(x,y) \quad (10)$$

여기서, $\xi = x/a, \quad \eta = y/b$ (11)

그리고 $\Psi(\xi, \eta), \varphi(\xi, \eta)$ 는 Brown 혼합 함수를 나

타내며 다음 식과 같다.

$$\Psi(\xi, \eta) = \eta^2(1 - \eta^2) / [\xi^2(1 - \xi^2) + \eta^2(1 - \eta^2)] \quad (12.a)$$

$$\varphi(\xi, \eta) = \xi^2(1 - \xi^2) / [\xi^2(1 - \xi^2) + \eta^2(1 - \eta^2)] \quad (12.b)$$

2.3 세개의 단면곡선과 한개의 경계선에 의해 형성되는 곡면

Fig. 1의 세번째 형태인 곡면을 모식화시키면 Fig. 2의 (c)와 같다. 여기서 세개의 단면곡선은 아래와 같다.

$$z = S(x), \quad 0 \leq x \leq a \quad (13.a)$$

$$z = G_0(y), \quad 0 \leq y \leq b \quad (13.b)$$

$$z = G_1(y), \quad 0 \leq y \leq b \quad (13.c)$$

$G_0(y)$ 와 $G_1(y)$ 를 각각 x -방향으로 비레스위핑시키고 이로부터 형성된 두개의 식을 y -방향으로 Hermite혼합 함수로 혼합시켜 하나의 곡면을 얻게 된다.

$G_0(y)$ 를 x -방향으로 비레스위핑시키면 다음과 같다.

$$z_{x0}(x, y) = \frac{1}{h_1} S(x) G_0(y) \quad (14.a)$$

마찬가지로 $G_1(y)$ 를 x -방향으로 스위핑시키면 다음과 같다.

$$z_{x1}(x, y) = \frac{1}{h_2} S(x) G_1(y) \quad (14.b)$$

위의 두 식을 Hermite혼합 함수를 이용하여 혼합하면 다음과 같은 x -방향으로의 스윙곡면을 얻게 된다.

$$z_x(x, y) = H_1(\xi) \frac{1}{h_1} S(x) G_0(y) + H_2(\xi) \frac{1}{h_2} S(x) G_1(y) \quad (15.a)$$

$$\text{여기서, } \xi = x/a, \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (15.b)$$

y -방향으로의 스윙곡면은 식(5) 및 식(6)에 $S_0(x) \equiv S(x)$, $S_1(x) \equiv 0$, $x_0 = 0$, $x_1 = a$ 등을 대입시켜 다음과 같이 직접 얻을 수 있다.

$$z_y(x, y) = H_1(\xi) G_0(y) + H_2(\xi) G_1(y) + H_1(\eta) S(x) - \left[\frac{1}{h_1} H_1(\xi) H_1(\eta) + \frac{1}{h_2} H_2(\xi) H_2(\eta) \right] \quad (16.a)$$

$$\text{여기서, } \xi = x/a, \quad \eta = y/b \quad (16.b)$$

$z_x(x, y)$, $z_y(x, y)$ 를 Brown 혼합 함수에 의해 혼합시키면 결과적으로 아래와 같은 세번째 형태의 곡면을 만들 수 있다.

$$z(x, y) = \Psi(\xi, \eta) z_x(x, y) + \varphi(\xi, \eta) z_y(x, y) \quad (17.a)$$

$$\text{여기서, } 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b \quad (17.b)$$

3. 직사각형 격막의 정수압 벌짐 해석

3.1 기본 가정

직사각형 격막의 정수압 벌짐의 공정 모식도가 Fig. 4에 있으며 이를 에너지법으로 해석하는데 있어 본 논문에서 취해진 가정은 다음과 같다.

(가) 두께방향의 응력변화를 무시하고, 평면응력 조건이 고려된다.

(나) 수직 이방성이 고려된다.

(다) 유동응력은 유효 변형률만의 함수이다 즉,

$$\bar{\sigma} = f(\bar{\epsilon}) \quad (19)$$

(라) 한 요소 내에서 유효 변형률 및 두께는 일정하다

(마) 박판 소재는 비압축성이다 즉,

$$\Delta \epsilon_1 + \Delta \epsilon_2 + \Delta \epsilon_3 = 0 \quad (20)$$

(바) 마찰은 Coulomb 마찰계수에 의해 고려된다. 즉,

$$\tau = \mu p \quad (21)$$

(사) xz -평면 및 yz -평면에서의 형상은 타원의 일부이다.

(아) 다이와 소재의 경계에서는 한지조건이 가정된다.

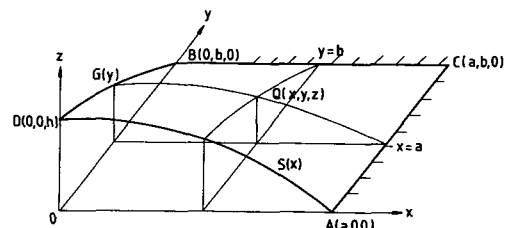


Fig. 4 Schematic diagram of hydrostatic bulging of a rectangular diaphragm

3.2 정수압 벌징에서의 상계식

Fig. 5는 소성변형을 받는 피가공물을 모식화시킨 그림이다. 소성변형을 받는 물체가 동적가용 속도장의 조건을 만족시키기 위해서는 첫째, 비압축성 조건이 만족되어야 하고 둘째, 속도 경계면에서 면의 수직방향성분이 연속이어야 한다. 이와같은 피가공물의 소성변형 영역에 대하여 유도된 동적가용 속도장, v^* 으로부터 이에 따르는 동적가용 변형률 속도장, $\dot{\epsilon}_{ij}^*$, 이 결정된다. 이때 이 변형률 속도장, $\dot{\epsilon}_{ij}^*$ 에 의한 항복응력장, σ_{ij}^* 은 실제의 응력장, σ_{ij} 과 최소일 원리(complementary minimum energy principle)에 의해 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \leq \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^* \quad (22)$$

식 (22)를 적분하고 발산 정리를 적용하면 다음과 같은 상계식이 얻어 지게 된다.

$$\int_{S_v} T_i v_i^* dS \leq \int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^* dV - \int_{S_T} T_i v_i^* dS \quad (23)$$

여기서 S_v 는 속도가 정의된 경계면이고, S_T 는 표면력(traction force)이 정의된 경계면을 나타낸다. V 는 피가공물의 변형되는 내부 체적(internal body volume)을 나타내며 "*"는 동적 가용 속도장에서 유래된 양임을 표시한다.

식 (23)에서 왼쪽 항은 속도가 정의된 경계면에 작용하는 표면력에 의해 외부에서 가해준 외부일률(external work rate)이며 오른쪽 첫번째 항은 내부 변형 에너지율(internal deformation energy

rate)을 나타낸다. 표면력이 정의되는 경계면 S_T 에서 면적분의 형태로 정의되는 두번째 항은 금형과 소재 사이의 마찰력에 의해 소비되는 마찰 에너지율(energy rate due to friction)을 나타낸다.

정수압 벌징 공정에서 실제의 외부일은 식(24)에서와 같이 가해주는 압력에 의해 발생하고 이에 따라 동적 가용 속도장에서 작용 압력과 변형에너지는 식(25)와 같은 관계를 갖는다.

$$\Delta W_{act} = p(\Delta V)_{fluid} \quad (24)$$

$$p^* = \Delta W^* / (\Delta V)_{fluid} \quad (25)$$

식(23)의 상계식에서 T_i 는 외력으로서 정수압 벌징에 있어서는 작용압력으로 대체된다. 또한 마찰 에너지는 존재하지 않으므로 식(23)의 상계식은 식(26)과 같이 되며 이로부터 최적화 시킬 범함수는 식(27)과 같다.

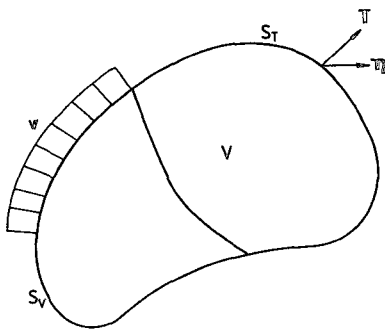
$$W_{act} \leq \int_V \bar{\sigma} \Delta \bar{\epsilon} dV \quad (26)$$

$$p^* = \frac{1}{(\Delta V)_{fluid}} \left(\int_V \bar{\sigma} \Delta \bar{\epsilon} dV \right) \quad (27)$$

3.3 3차원 박판 성형에서의 변형률 증분

3차원 박판성형 공정을 에너지법으로 해석하기 위해서는 변형 에너지가 구해져야 하며, 변형 에너지를 계산하기 위해서는 유동응력(flow stress) 및 유효변형률 증분(effective strain increment)이 계산되어야 한다.

한 요소 내에서의 균일변형을 가정한 가운데 한 변형단계 동안의 주변형률 증분은 Fig. 6과 같은 임의의 삼각형 요소에 대하여 계산된다⁽¹⁷⁾. G 와 G' 를 각각 현재상태(current configuration) 및 변형후 상태(subsequent configuration)에서의 metric 텐서로 표시하면, G 와 G' 는 삼각형의 길이로



V : Total volume
S : Total surface area
 S_v : Velocity-prescribed boundary
 S_T : Traction-prescribed boundary

Fig. 5 Schematic diagram of a deforming body

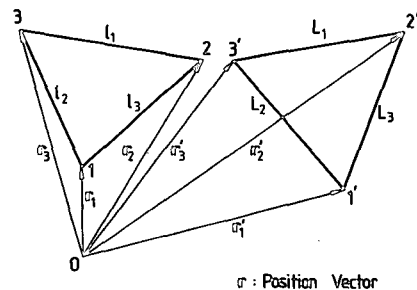


Fig. 6 Deformation of a small element in three dimensional space

표현하여 아래와 같이 된다.

$$[G_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} l_2^2 & 1/2(l_2^2 + l_3^2 - l_1^2) \\ 1/2(l_2^2 + l_3^2 - l_1^2) & l_3^2 \end{bmatrix} \quad (28.a)$$

$$[G'_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} L_2^2 & 1/2(L_2^2 + L_3^2 - L_1^2) \\ 1/2(L_2^2 + L_3^2 - L_1^2) & L_3^2 \end{bmatrix} \quad (29.b)$$

여기서 l 과 L 은 각각 변형전 상태 및 변형후 상태에서의 변의 길이를 나타낸다. 위의 metric 텐서들로부터 요소의 주변형 길이비 (principal extension ratio)는 아래 식과 같이 계산된다.

$$\lambda_{1,2} = \left[1/2 \left\{ (G^{\alpha\beta} G'_{\alpha\beta}) \pm \sqrt{(G^{\alpha\beta} G'_{\alpha\beta})^2 - 4(G'/G)} \right\} \right]^{1/2} \quad (30)$$

여기서, G 및 G' 는 각각 현재 상태 및 변형후 상태에서의 metric 텐서의 행렬식 (determinant)를 나타낸다.

주변형 길이비가 결정되면 주변형률 증분 (principal strain increment)이 아래 식과 같이 구해진다.

$$\Delta \varepsilon_\alpha = \ln(\lambda_\alpha) \quad (31)$$

유효변형률 증분은 주변형률 증분으로부터 결정되며, 유효 변형률은 유효 변형률 증분을 시간으로 적분하여 계산한다.

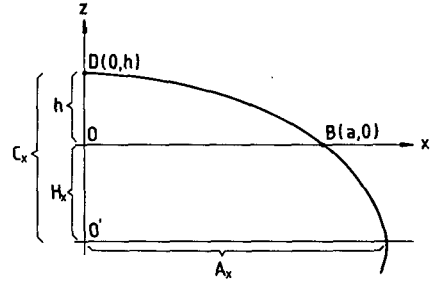
3.4 기하학적 형상의 정의

Fig. 4에 나타나 있는 직사각형 격막의 정수압 벌징의 모식도로부터 기하학적 형상이 정의된다. 이 그림에서 두개의 단면곡선 (section curve)과 하나의 경계곡선 (boundary curve)으로 기하학적 형상을 표현할 수 있다. 즉, Fig. 1에서의 두번째 형태와 같은 단위 곡면에 의해 표현된다. xz -평면에서의 단면곡선 $S(x)$ 와 yz -평면에서의 단면곡선 $G(y)$ 는 타원의 일부라고 가정하였으므로 이로부터 단면곡선을 정의할 수 있다.

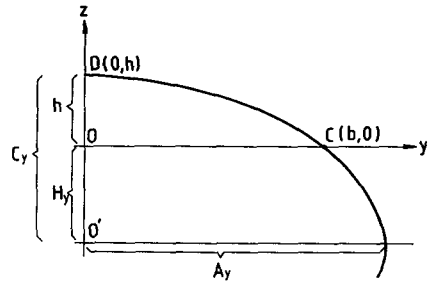
Fig. 7은 xz -평면 및 yz -평면상의 단면을 보여주고 있다. 이 그림으로부터 아래와 같은 xz -평면 및 yz -평면상의 타원 방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{x^2}{A_x^2} + \frac{(H_x+z)^2}{C_x^2} = 1, \quad \frac{y^2}{A_y^2} + \frac{(H_y+z)^2}{C_y^2} = 1 \quad (32)$$

이로부터 다음과 같은 xz -평면 및 yz -평면상의 수직 단면곡선이 얻어진다.



(a) xz -section



(b) yz -section

Fig. 7 Vertical sections of xz -plane and yz -plane for the hydrostatic bulging of a rectangular diaphragm

$$z = S(x) = C_x \sqrt{1 - x^2/A_x^2} - H_x, \quad 0 \leq x \leq a \quad (33.a)$$

$$z = G(y) = C_y \sqrt{1 - y^2/A_y^2} - H_y, \quad 0 \leq y \leq b \quad (33.b)$$

Fig. 4의 직사각형 격막의 벌징에서 경계곡선은 다음과 같이 정의된다.

$$\overline{AC} \text{에서, } x = f_2(y) = a \quad (34.a)$$

$$\overline{BC} \text{에서, } y = f_1(x) = b \quad (34.b)$$

이들 $S(x)$ 와 $G(y)$ 를 각각 x -방향 및 y -방향으로 비례스위핑시키면 다음과 같이 된다.

$$z_0(x,y) = \frac{1}{h} S(x) G\left(\frac{b}{f_1(x)} y\right) \quad (35.a)$$

$$z_1(x,y) = \frac{1}{h} G(y) S\left(\frac{a}{f_2(y)} x\right) \quad (35.b)$$

식(35)에 식(34)의 경계곡선을 대입하면 $z_0(x,y)$ 와 $z_1(x,y)$ 는 다음과 같이 된다.

$$z_0(x,y) = \frac{1}{h} S(x) G\left(\frac{b}{b} y\right) \quad (36.a)$$

$$z_1(x,y) = \frac{1}{h} G(y) S\left(\frac{a}{a} x\right) \quad (36.b)$$

식(36)에서 $z_0(x,y)$ 와 $z_1(x,y)$ 가 서로 일치하므로

로 기하학적 형상은 결국, 다음과 같이 표현된다.

$$z(x, y) = \frac{1}{h} S(x) G(y) \quad (37)$$

여기서, $S(x)$ 와 $G(y)$ 는 식(33)의 단면곡선이다.

3.5 속도장

직사각형 격막의 정수압벌징에서 속도 경계조건은 다음과 같다.

$$x=0 \text{에서,} \quad v_x=0 \quad (38.a)$$

$$y=0 \text{에서,} \quad v_y=0 \quad (38.b)$$

$$x=a \text{ 혹은 } y=b \text{에서, } v_x=v_y=0 \quad (38.c)$$

이러한 경계 조건을 만족하는 속도장의 하나로서 아래와 같은 속도장을 취하였다.

$$v_{w0} = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{2b}\right) \quad (39.a)$$

$$v_{y0} = \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) \quad (39.b)$$

그리고 변형영역의 내부에서 위의 속도장에 변화를 주기 위하여 다음과 같은 함수를 곱하였다.

$$f_x(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^{n_x} \sum_{j=0}^{n_y} a_{ij}^x \xi^i \eta^j \quad (40.a)$$

$$f_y(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^{n_x} \sum_{j=0}^{n_y} a_{ij}^y \xi^i \eta^j \quad (40.b)$$

$$\text{여기서, } \xi = x/a, \quad \eta = y/b \quad (40.c)$$

결국 가정되는 속도장은 아래와 같이 된다.

$$v_x(\xi, \eta) = f_x(\xi, \eta) \sin(\pi\xi) \cos(2\pi\eta) \quad (41.a)$$

$$v_y(\xi, \eta) = f_y(\xi, \eta) \sin(\pi\eta) \cos(2\pi\xi) \quad (41.b)$$

4. 결과 및 토론

직사각형 격막의 벌징을 해석하기 위하여 기하학적 형상을 표현 하는데 사용된 최적화 변수는 두개이다. 이들은 H_x 와 C_x 의 비 및 H_y 와 C_y 의 비로서, xz -평면 및 yz -평면에서의 단면곡선을 나타내기 위한 것이다. x 성분의 속도장을 표현하는데 여덟개의 최적화 변수가 도입되었으며, y 성분의 속도장을 가정하는 데에도 여덟개의 변수가 사용되었다. 이들 변수들에 의해 직사각형 격막의 해석에 사용된 속도장은 다음 식과 같다.

$$v_x(\xi, \eta) = (a_{00}^x + a_{10}^x \xi + a_{01}^x + a_{11}^x \xi \eta + a_{21}^x \xi^2 \eta + a_{20}^x \xi^2 + a_{30}^x \xi^3 + a_{40}^x \xi^4) \sin(\pi\xi) \cos(2\pi\eta) \quad (42.a)$$

$$v_y(\xi, \eta) = (a_{00}^y + a_{01}^y \eta + a_{10}^y \xi + a_{11}^y \xi \eta + a_{12}^y \xi \eta^2 + a_{22}^y \eta^2 + a_{33}^y \eta^3 + a_{44}^y \eta^4) \sin(\pi\eta) \cos(2\pi\xi) \quad (42.b)$$

계산된 결과는 기존의 실험결과 및 등방성 재료의 탄소성 박막요소에 의한 유한요소 해석 결과와 비교하였는데⁽¹²⁾, 적용된 재료는 알루미늄(annealed aluminium)이며 재료의 물성치는 각각 다음과 같다.

$$\text{응력과 변형도의 관계: } \bar{\sigma} = 18(0.000769 + \bar{\epsilon})^{0.29} \quad (\text{kgf/mm}^2)$$

$$\text{초기두께} \quad : t_0 = 0.314 \text{ (mm)}$$

$$\text{수직 이방성 계수} \quad : R = 1$$

적용된 직사각형 격막의 단축과 장축의 축비(aspect ratio; b/a)는 1.0, 0.74, 0.51이며, 축비가 1.0인 경우 $2a=2b=56\text{mm}$ 이고, 축비가 0.74인 경우는 $2a=65\text{mm}$, $2b=40\text{mm}$ 이다. 그리고 축비가 0.51인 경우에 장축과 단축의 길이는 각각 $2a=79\text{mm}$, $2b=40\text{mm}$ 이다.

Fig. 8은 축비가 0.74 및 0.51일때 공정중의 재료의 변형된 형상을 각각 보여주고 있다. xz -평면 및 yz -평면에서 기하학적 형상을 타원으로 가정한 것이 잘 나타나고 있다.

Fig. 9는 축비가 1.0, 0.74 그리고 0.51일때 극

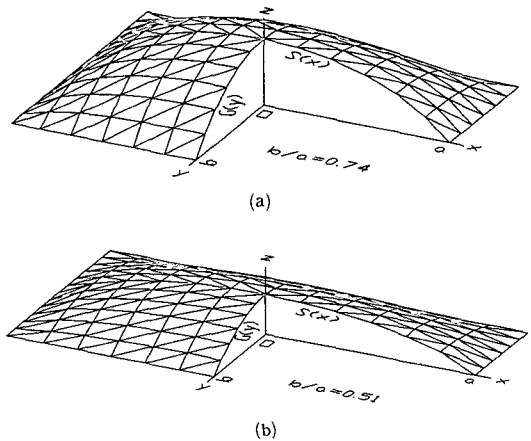


Fig. 8 Deformed configuration for hydrostatic bulging of a rectangular diaphragm when the polar thickness strain is -0.1 : (a) $b/a=0.74$ and (b) $b/a=0.51$

점(pole)의 높이에 따르는 압력의 변화에 대하여 본 이론에 의한 결과를 실험치 및 유한요소 해석 결과와 비교하여 보여주는 그림이다. 이 그림에서 본 이론에 의한 결과가 유한요소 해석 결과와 함께 실험치와 비교적 잘 일치함을 알 수 있다.

Fig. 10은 축비가 1.0, 0.74 그리고 0.51일 때 극점(pole)의 높이에 따르는 두께 방향의 변형률

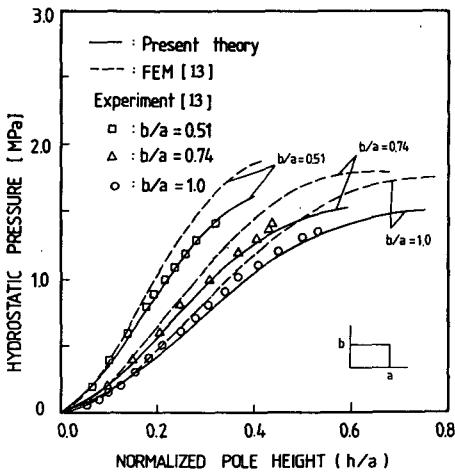


Fig. 9 Variation of polar height with respect to hydrostatic pressure for rectangular diaphragms of various aspect ratios : Comparison of the present theory with the related experiment and the finite element method

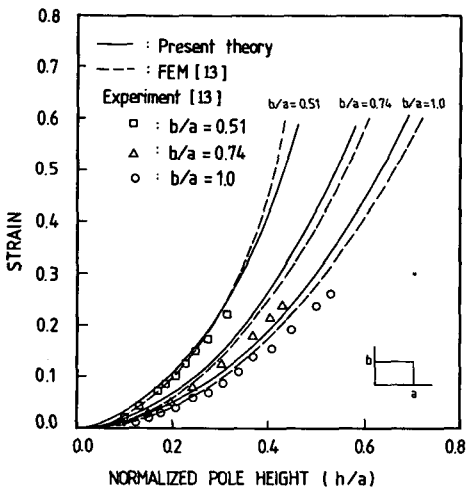


Fig. 10 Variation of polar height with respect to polar thickness strain for rectangular diaphragms of various aspect ratios : Comparison of the present theory with the related experiment and the finite element method

(thickness strain)의 변화에 대하여 본 이론에 의한 결과를 실험치 및 유한요소 해석 결과와 비교하여 보여주는 그림이다. 이 그림에서 본 이론에 의한 결과가 유한요소 해석 결과와 함께 실험치보다 약간 높게 계산되었으나 전반적인 경향은 비교적 잘 일치함을 알 수 있다. 축비가 작을수록 같은 극점의 높이에 대하여 두께 변형률이 커지고 있음을 알 수 있다.

Fig. 11은 직사각형 격막의 정수압 벌징에서 중앙점에서의 장축방향 및 단축 방향의 주변형률의 비를 실험 및 유한요소 해석결과와 함께 비교하여 보여주고있는 그림으로 실험치와 이론치가 대체로 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 또한 이 그림은 직사각형 판재의 정수압 벌징에서 같은 축비에 대하여 극점의 주변형률의 비는 거의 일정함을 보여 주고 있다. 따라서, 타원형 판재의 정수압 벌징에서와 마찬가지로, 축비를 다양하게 바꿈으로써 평면변형과 등2축변형 사이의 2축변형(biaxial strain)에 대한 변형거동을 효과적으로 고찰할 수 있음을 알 수 있다.

Fig. 12의 (a)와 (b)는 직사각형 격막의 정수압 벌징에서 축비가 1.0인 경우 즉, 정사각형 격막의 정수압 벌징에 대하여 극점(pole)에서의 두께 변형률이 -0.1일 때 ($\epsilon_{tc} = -0.1$)일 때, y-축 및 대각

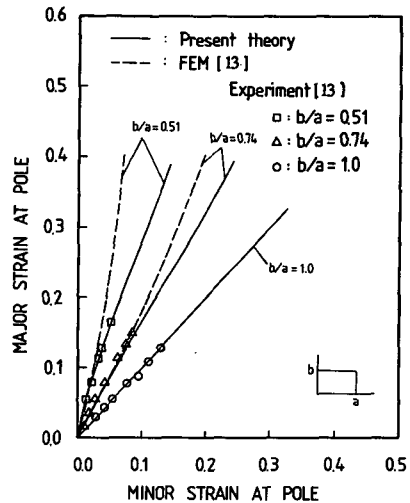


Fig. 11 Relationship between the major strain and the minor strain at pole for the hydrostatic bulging of a rectangular diaphragm with various aspect ratios. : Comparison of the present theory with the related experiment and the finite element method

선 방향(diagonal direction)에서 센터에서의 거리에 따르는 변형률의 분포를 나타낸 그림이다. 각각의 그림은 본 이론에 의한 결과를 유한요소 해석

결과 및 기존의 실험치와 비교하여 보여주고 있으며 전반적으로 실험치와 이론치가 대체로 일치하고 있다.

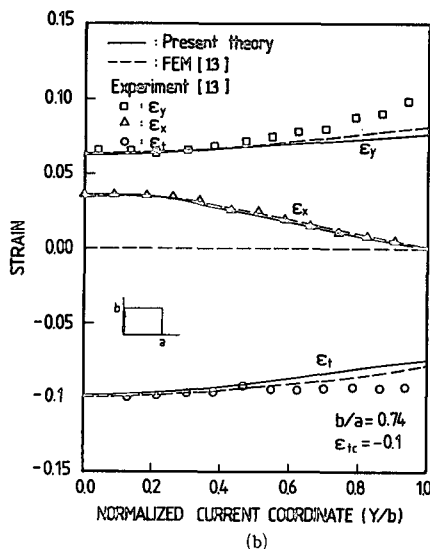
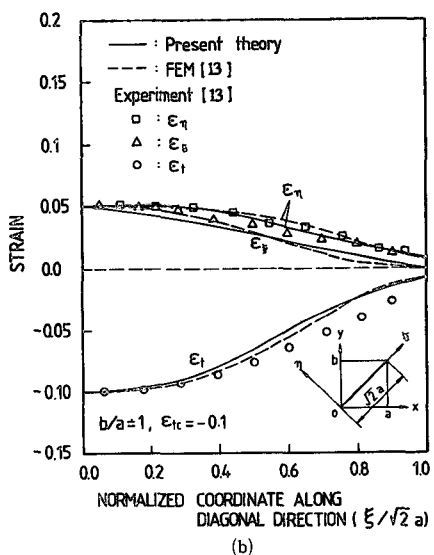
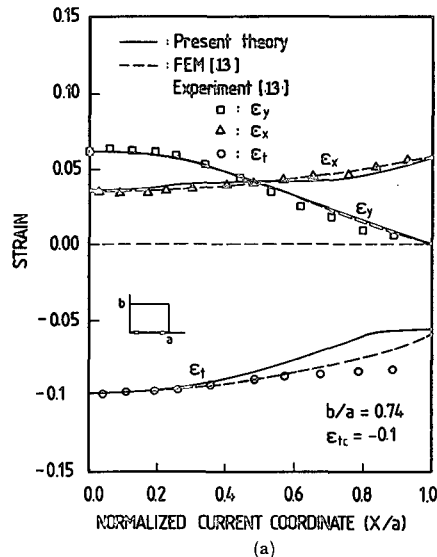
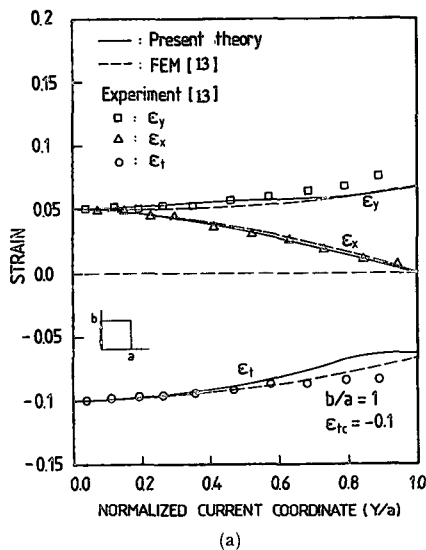


Fig. 12 (a) Strain distribution along the y-axis for the hydrostatic bulging of a square diaphragm ($b/a=1$) when the polar thickness strain is -0.1 : Comparison of the present theory with the related experiment and the finite element method

(b) Strain distribution along the diagonal direction of the hydrostatic bulging of a square diaphragm ($b/a=1$) when the polar thickness strain is -0.1 : Comparison of the present theory with the related experiment and the finite element method

Fig. 13 (a) Strain distribution along the major axis of the hydrostatic bulging of a rectangular diaphragm ($b/a=0.74$) when the polar thickness strain is -0.1 : Comparison of the present theory with the related experiment and the finite element method

(b) Strain distribution along the minor axis of the hydrostatic bulging of a rectangular diaphragm ($b/a=0.74$) when the polar thickness strain is -0.1 : Comparison of the present theory with the related experiment and the finite element method

Fig. 13과 Fig. 14는 직사각형 격막의 정수압 벌징에서 축비가 0.74인 경우 극점의 두께방향 변형률이 -0.1 및 -0.2 일 때 장축 및 단축방향에서의

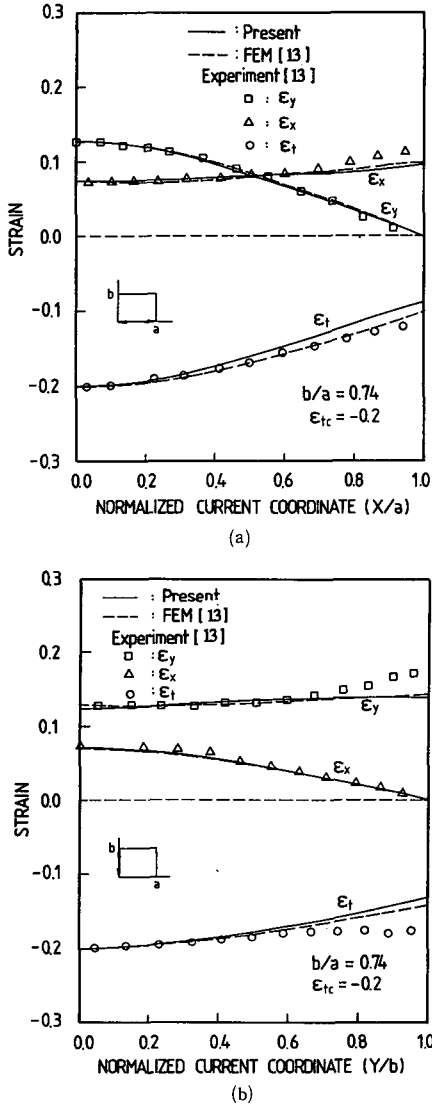


Fig. 14 (a) Strain distribution along the major-axis of the hydrostatic bulging of a rectangular diaphragm ($b/a=0.74$) when the polar thickness strain is -0.2 : Comparison of the present theory with the related experiment and the finite element method
(b) Strain distribution along the minor-axis of the hydrostatic bulging of a rectangular diaphragm ($b/a=0.74$) when the polar thickness strain is -0.2 : Comparison of the present theory with the related experiment and the finite element method

중양점의 거리에 따르는 변형률의 분포를 보여주는 그림으로 본 이론에 의한 결과를 실험치 및 유한요소 해석 결과와 비교하여 보여준다. 다이와의 경계 근처를 제외한 대부분의 영역에서 본 이론에 의한 두께 방향 변형률이 실험치 및 유한요소 해석 결과와 함께 잘 일치하고 있다. 다이와의 경계부분에서 차이가 나는 원인 중의 하나로 외곽 경계 즉, 다이와의 접촉부분에서의 고정조건을 한지로 가정한 점을 생각할 수 있다.

5. 결 론

3차원 박판성형에서 곡면의 기하학적 형상을 효과적으로 표현할 수 있는 스윙곡면을 적용하여 직사각형 격막의 정수압벌징을 해석하였으며 계산결과로부터 기하학적 형상이 효과적으로 표현되었음을 알았다.

미분을 통하지 않고 공정중의 변위장의 변화로부터 직접 주변형률 증분을 계산하였으며, 변형률분포 및 압력곡선에 대하여 본 이론에 의한 결과를 실험결과 및 탄소성 유한요소해석 결과와 비교하여 좋은 일치를 보였으며 이로부터 본 이론으로 직사각형 격막의 정수압 벌징을 효과적으로 해석할 수 있음을 보였다.

3차원 형상을 위한 디프 드로잉과 같이 복잡한 공정에 대해서는 전체 변형영역을 몇개의 작은 영역으로 분할하여 각 영역에서의 기하학적 형상을 스윙곡면으로 표현하고 이들을 조합하면 전체 영역에 해당하는 복합곡면을 구성할 수 있으며 에너지법을 이용하여 이를 해석하고자 할 때 이를 적용하면 효과적일 것이다.

참고문헌

- (1) Tirosh, J., Yosifon, Y., Eshel, R. and Betser, A. A., 1977, "Hydroforming Process for Uniform Wall Thickness Products," J. Engng. Ind., Trans. ASME, Vol.99, pp. 685~690.
- (2) Noh, T.S. and Yang, D.Y., 1987, "An Analysis of Hydroforming of Regular Polygonal Boxes," Int.J.Mech.Sci., Vol.29, pp. 139~148.
- (3) Yang, D.Y. and Noh, T.S., 1990 "An Analysis of Hydroforming of Longitudinally Curved Boxes with Regular Polygonal Cross-Section,"

- Int. J. Mech. Sci., Vol.32, pp. 877~890.
- (4) Yang, D.Y. and Noh, T.S., 1988, "An Analysis of Axisymmetric Hydrostatic Bulging by the Upper-Bound Method," Int. J.Mech. Sci., Vol.30, pp. 43~49.
- (5) Lee, H.S. and Yang, D.Y., 1991, "An Analysis of Hemispherical Punch Stretching by the Energy Method," Int. J.Mech. Sci., Vol.33, pp. 435~447.
- (6) Lee, H.S. and Yang, D.Y., 1991, "Analysis of the Hydrostatic Bulging of an Elliptic Diaphragm by the Energy Method," submitted to J. Mater. Proc. Tech.
- (7) Duncan, J.L. and Johnson, W., 1967, "The Ultimate Strength of Rectangular Diaphragms," Int. J.Mech. Sci., Vol.9, pp. 681~696.
- (8) Duncan, J.L. and Johnson, W., 1968, "Plastic Deformation and Failure of Thin Square Diaphragms," Int. J.Mech. Sci., Vol.10, pp. 157~168.
- (9) Yousif, M.I., Duncan, J.L. and Johnson, W., 1970, "Plastic Deformation and Failure of Thin Elliptical Diaphragms," Int. J.Mech. Sci., Vol.12, pp. 959~972.
- (10) Ilahi, M.F., Parnar, A. and Mellor, P.B., 1981, "Hydrostatic Bulging of a Circular Aluminium Diaphragm," Int. J.Mech. Sci., Vol.23, pp. 221~227.
- (11) Iseki, H., Jimma, T. and Murota, T., 1974, "Finite Element Analysis of the Hydrostatic Bulging of a Sheet Metal(part 1)," Bulletin of JSME, Vol.17, pp. 1240~1247.
- (12) Iseki, H., Jimma, T. and Murota, T., 1977, "finite Element Analysis of the Hydrostatic Bulging of a Sheet Metal(part2)," Bulletin of JSME, Vol.20, pp. 285~291.
- (13) Yang, D.Y. and Kim, Y.J., 1987, "Analysis of Hydrostatic Bulging of Anisotropic Rectangular Diaphragms by the Rigid-Plastic Finite Element Method, J.Engng. Ind., Trans. ASME, Vol. 109, pp. 148~154.
- (14) 정완진, 양동열, 한규택, 백남주, 김용진, 1988, "강소성 유한 요소법을 이용한 타원벌지시험의 이론 및 실험적 연구", 대한기계학회 논문집, 제12권, pp. 397~408.
- (15) Shim, H.B. and Yang, D.Y., 1990, "An Elastic-Plastic Finite Element Analysis on Hydrostatic Bulging of Rectangular Diaphragms by Using Layered Degenerated Shell Elements," Int. J.Mech. Sci., Vol.32, pp. 49~64.
- (16) Choi, B.K., 1991, "Surface Modelling for CAD/CAM," ELSEVIER
- (17) Wang, N.M., 1984, "A Rigid Plastic Rate-Sensitive Finite Element Method for Modeling Sheet Metal Forming Processes, Numerical Analysis of Forming Processes," edited by J.F.T. Pittman, O.C. Zienkiewicz, R.D. Wood and J.M. Alexander, John Willey & Sons, pp. 117~164