

〈論 文〉

4절 링크 기구의 동적 변형 해석(I)

유한 요소 해석 및 수치해

조선휘* · 박종근** · 이 진***

(1992년 1월 30일 접수)

Analysis of Dynamic Deformation of 4-Bar Linkage Mechanism (I) Finite Element Analysis and Numerical Solution

Sun-Whi Cho, Jong-Keun Park and Jin Lee

Key Words: Flexible Linkage Mechanism(유연성 링크기구), Finite Element Method(유한 요소법), Elastic Bearing(탄성베어링), Mode Superposition Method(모우드 중첩법)

Abstract

Analysis of elasto-dynamic deformation of flexible linkage mechanism is conducted using the finite element method. The equations of motion of the system are derived from the static structural problem in which dynamic inertia, gravitational and driving forces are treated as external loads. Linear spring model is included in the formulation of equations of motions to represent the effects of deformation of elastic bearings of revolute joints on the system behavior. A computer program is constructed and applied to analyze a specific crank-lever 4-bar mechanism. The algorithm of the program is as follows. First, the natural frequencies and the mode shapes of the system are calculated by solving the eigenproblem of the mechanism system which can be considered as a static structure by assuming the input shaft (crank shaft) to be fixed at any given configuration of mechanism. And finally, the elasto-dynamic deformation of the whole system is obtained using mode superposition method for the case of constant input speed. The effect of geometric stiffness on the mechanism is included in the program with the axial forces of links obtained through the quasi-static displacement analysis. It is found that the geometric stiffness exerts an important effect upon the elasto-dynamic behavior of the flexible linkage mechanism. Elastic deformation of bearing lowers the natural frequencies of the system, resulting smaller elastic displacement at the mid-point of the links and bigger elastic displacement at the ends of the links than rigid bearing. The above investigation of flexible linkage mechanism shows that the effects of the elastic deformation of bearing on the mechanism should be considered to design the mechanism which satisfies more precisely the purpose and the condition of design.

기 호 설 명

A : 보 요소의 단면적

[B] : 변형율-변위 행렬

[C] : 응력-변형율 행렬

$c, c(t)$: 감쇠 계수

F : 링크의 길이 방향 하중

{f⁰} : 단위 체적 당의 체적 하중

*정회원, 서울대학교 기계설계학과

**정회원, 경남대학교 기계설계학과

***정회원, 경남대학교 기계공학과

- $\{F_c\}$: 기구계의 절점의 집중 하중
 $[H]$: 변위 보간 행렬
 h_1, \dots, h_6 : 형상 함수
 $[H_r]$: 강체운동의 보간 행렬
 I : 보 요소의 단면 2차 모우먼트
 $[K]$: 기구계의 강성 행렬
 $[K^G]$: 기구계의 기하학적 강성 행렬
 $[K^J]$: 회전대우의 강성 행렬
 k_t : 축의 비틀 스프링 상수
 L : 보 요소의 길이
 $[M]$: 기구계의 질량 행렬
 m_1, m_2 : 보 요소의 양단에서의 집중질량
 $\{R\}$: 기구계의 부하 벡터
 $[R]$: 이동 좌표계와 고정 좌표계 사이의 회전 행렬
 $[T^L]$: 이동 좌표계와 고정 좌표계 사이의 링크의 변환 행렬
 $\{U\}$: 기구계의 절점의 일반화된 탄성 변위
 a : 각 가속도
 ζ : 감쇠비
 ρ : 질량 밀도
 ω : 각속도
상첨자
 m : 요소
 L : 링크

1. 서론

지금까지 기구의 운동학적 및 동역학적 해석과 설계에서 기구는 탄성 변형이 없는 강체로 가정되었다. 이러한 가정은 기구 시스템의 고유 진동수에 비해서 기계의 작동 회전수가 현저히 작을 때에는 큰 문제를 야기시키지 않을 것이다. 그러나 기계의 작동 회전수가 높아질수록 링크의 관성력이 증가하여 탄성 변형이 커지고 공진이 발생하는 등의 문제가 야기될 수 있다. 위의 경우와 달리 작동 회전수가 비교적 낮은 경우에도 높은 동작 정밀도가 요구된다면 비록 그 값이 미소하다 하더라도 탄성 변형은 고려되어야 할 것이다. 또한 고부하가 걸리는 기구를 설계할 때에도 기구의 동적 응력을 해석해야 한다. 이 해석에 기초하여 설계를 수정하고 수정된 기구를 다시 해석함으로써 응력이 균일하게 분포하도록 기구의 단면을 최적 설계할 수 있을 것이다.

구조 해석 분야에서 발달한 유한 요소법을 응용하여 링크 기구의 탄성 변형을 해석하고자 한다. 기구계의 탄성변형에 관한 운동방정식은 모우드 중첩법(mode superposition)으로 그 해를 구하였다.

지금까지의 연구동향을 살펴보면 논문에 따라 다소의 차이가 있으나 대부분 지배 방정식을 세우기 위하여 라그랑지의 운동 방정식(Lagrange's equation of motion)을 이용하는 반면 F. W. Liou는 정적 변위 해석에 관한 유한 요소법의 지배 방정식에서 출발하여 달랑베르의 원리(D'Alembert's principle)에 의하여 관성력을 하중의 형태로 취급함으로써 링크 기구의 운동 방정식을 유도하고 있다^(1,2).

연구자에 따라 다양한 해법이 개발되고 있으며 이것을 크게 나누면 푸리에(Fourier) 급수를 이용한 해법⁽³⁻⁸⁾, 진동 모우드(mode)를 이용한 해법⁽⁹⁻¹⁵⁾, 그리고 수치적분법을 이용한 해법^(1,2) 등이 있다.

B. M. Bahgat와 K.D. Willmert는 보 요소를 이용하여 기구의 동적 탄성 변형에 관한 유한 요소법의 지배 방정식을 유도하고 그 해를 구하였다⁽⁵⁾. 그러나 이 단계에서의 해는 준 정적인 해에 가깝다. A. Midha, A.G. Erdman 그리고 D.A. Frohrib는 변위법(displacement method)에 기초를 둔 유한 요소법으로 운동 방정식을 유도하고 그 해를 구하였다⁽¹¹⁾. 특히, 그는 운동 방정식에 강체 운동과 탄성 변형과의 연성항(coupling term)을 포함시켰다.

P.K. Nath와 A. Ghosh는 탄성 변형을 코리올리(Coriolis), 접선 및 법선 가속도의 항으로 표현하고, 기하학적 강성 행렬(geometric stiffness matrix)을 고려한 운동 방정식을 유도하고 그 해를 구하였다⁽⁷⁾. B.S. Thompson과 C.K. Sung은 변분법(calculus of variation)적인 방법으로 운동 방정식을 유도하였다⁽⁶⁾. 특히, 비 선형 항을 운동 방정식에 포함시켰지만 구체적인 해를 구하지는 않았다.

D.A. Turcic과 A. Midha는 연속된 3편의 논문^(13,14,15)에서 지금까지 사용된 보 요소 이외에 4각형 요소를 추가하였고, 3차원으로 일반화시켰으며 반복법(iteration method)을 사용하여 강체 운동과 탄성 변형과의 연성항을 고려하여 해를 구하였다.

그 반면 본 연구에서는 링크를 여러개의 2절점 6자유도의 보 요소로 이상화하고 링크의 운동을 평면 운동으로 한정하며 링크의 지지부의 강성은 무

한대이고 회전 대우 부분의 간극은 없는 것으로 가정하여 링크의 탄성 변형에 관한 운동 방정식을 유도하였다. 즉, 변위법에 기초한 정적 변위 해석에 관한 유한 요소법에서 관성력, 중력 그리고 외력을 외부 부하로 간주하여 동적인 운동 방정식을 유도하였다. 여기에, 회전 대우의 베어링을 선형 스프링으로 이상화하여 유연성 링크의 일부분으로 고려함으로써 베어링의 탄성 변형이 유연성 링크의 동적 변형에 미치는 영향에 대하여 고찰하였다.

베어링의 탄성 변형이 고려된 유연성 링크에 관한 운동 방정식을 모우드 중첩법에 근거를 둔 수치해법⁽¹²⁾으로 그 해를 구하였다.

2. 기구계의 운동 방정식

2.1 링크의 탄성 변위와 운동 방정식

링크를 하나의 연속체라고 생각하면 변위법에 의한 유한 요소 해석에서 정적 변위에 관한 지배 방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$[K^L]\{u^L\} = \{F^L\} \quad (1)$$

링크의 탄성 변위 $\{u\}$ 를 정의하는 방법을 Fig. 1에 나타낸다. 여기서, 강체운동(rigid-body motion)만을 고려할 때의 한 링크의 순간적인 위치가 \overline{AB} 이고, 그 링크를 포함한 기구 전체의 탄성 변형을 고려할 때의 위치가 $\overline{A'B'}$ 이다. 링크에 고정되어서 링크와 같이 움직이는 x - y 좌표계를 이동 좌표계(moving coordinates)라 하며 이 때의 이동 좌표계의 위치는 링크 기구의 강체 운동만을 고려한 위치이다. 그 반면 링크의 고정된 축, 보통 4절 링크 기구에서 크랭크 축을 좌표의 원점으로 하고 움직이지 않는 X - Y 좌표계를 고정 좌표계(fixed coordinates)라 한다.

링크 상의 임의의 점 P 가 기구 전체의 탄성 변형으로 인하여 변위한 것이 $\overline{PP'}$ 이고, 이것을 이동 좌표계로 표현한 것을 $\{u\}$ 라 하고, 고정 좌표계로 표현한 것을 $\{u'\}$ 라고 하면 다음과 같다.

$$\{u'\} = [R]\{u\} \quad (2)$$

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3)$$

즉, 프라임(prime)이 붙은 것은 고정 좌표계로 표현한 것이고, 그것이 없는 것은 이동 좌표계로

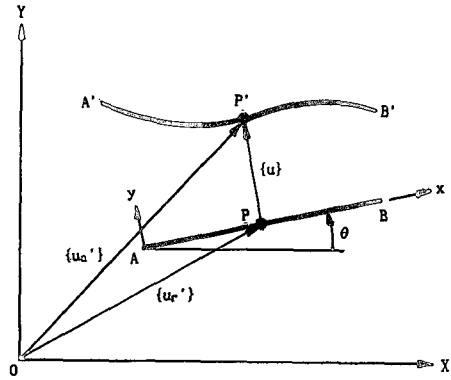


Fig. 1 Elastic displacement $\{u\}$ of point P on rigid link \overline{AB}

표현한 것이다.

Fig. 1에서 $\overline{OP'} = \overline{OP} + \overline{PP'}$ 이므로

$$\{u_a'\} = \{u_r'\} + [R]\{u\} \quad (4)$$

$$\{\dot{u}_a'\} = \{\dot{u}_r'\} + [\dot{R}]\{u\} + [R]\{\dot{u}\} \quad (5)$$

$$\{\ddot{u}_a'\} = \{\ddot{u}_r'\} + [\ddot{R}]\{u\} + 2[\dot{R}]\{\dot{u}\} + [R]\{\ddot{u}\} \quad (6)$$

강체 운동만 고려할 때의 절대 가속도에 대해서도 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\{\ddot{u}_r'\} = [R]\{\ddot{u}_r\} \quad (7)$$

강체 운동만 고려할 때의 가속도에 대한 형태 함수(shape function)는 다음과 같이 정의한다.

$$\{\ddot{u}_r'\} = [Hr]\{\ddot{u}_{rm}\} \quad (8)$$

여기서 어개 글자 m 은 요소의 절점의 자유도에 관한 표현을 의미한다.

따라서 식 (6)은 다음과 같이 된다.

$$\{\ddot{u}_a'\} = [R][Hr]\{\ddot{u}_{rm}\} + [\dot{R}][H]\{u^m\} + 2[\dot{R}][H]\{\dot{u}^m\} + [R][H]\{\ddot{u}^m\} \quad (9)$$

중력과 관성력에 의한 체적 하중(body force)을 이동 좌표계로 표현한 것을 $\{f^b\}$ 라고 하면 다음과 같다.

$$\{f^b\} = \rho[R]^T(\{g'\} - \{\ddot{u}_a'\}) \quad (10)$$

$\{g'\}$ 는 중력 가속도를 고정 좌표계로 표현한 것이다.

따라서 한 링크에 대하여는 다음과 같이 된다.

$$\{F_b^L\} = \{F_g^L\} - \{F_a^L\} \quad (11)$$

여기서,

$$\{F_g^L\} = \sum_m \int_{v^m} \rho [H]^T [R]^T \{g'\} dv \quad (12)$$

$$\{F_a^L\} = \sum_m \int_{v^m} \rho [H]^T [R]^T \{\ddot{u}a'\} dv \quad (13)$$

이동 좌표계로 표현한 중력 가속도를 $\{g\}$ 라고 하면 다음과 같다.

$$\{g\} = [R]^T \{g'\} \quad (14)$$

요소의 절점의 자유도로 표현된 중력 가속도를 $\{g^m\}$ 이라 하면 식 (8)과 같은 형식으로 강체 운동만을 고려할 때의 가속도에 관한 형태 함수를 사용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\{g\} = [H_r] \{g_m\} \quad (15)$$

따라서 식 (12)는 다음과 같다.

$$\{F_g^L\} = [M_r^L] \{g^L\} \quad (16)$$

$$[M_r^L] = \sum_m \int_{v^m} \rho [H]^T [H_r] dv \quad (17)$$

식 (9)를 고려하면 식 (13)은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \{F_a^L\} &= [M_r^L] \{\ddot{u}_r^L\} - (\omega_L)^2 [M^L] \{u^L\} \\ &+ (\alpha_L) [M_a^L] \{u^L\} \\ &+ 2(\omega_L) [M_s^L] \{\dot{u}^L\} + [M^L] \{\ddot{u}^L\} \end{aligned} \quad (18)$$

여기서 ω_L , α_L 는 강체 운동만 고려할 때의 링크의 각 속도와 각 가속도이고 $[M^L]$, $[M_s^L]$ 은 다음과 같이 정의 된다.

$$[M^L] = \sum_m \int_{v^m} \rho [H]^T [H] dv \quad (19)$$

$$[M_s^L] = \sum_m \int_{v^m} \rho [H]^T [I_s] [H] dv \quad (20)$$

$$[I_s] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

식 (11), (16), (18)을 고려하면 식 (1)은 다음과 같이 이동 좌표계로 표현 되는 링크의 탄성 변형에 관한 운동 방정식이 된다.

$$\begin{aligned} [M^L] \{\ddot{u}^L\} &+ 2(\omega_L) [M_s^L] \{\dot{u}^L\} \\ &- (\omega_L)^2 [M^L] \{u^L\} + [K^L] \{u^L\} \\ &+ (\alpha_L) [M_s^L] \{u^L\} = [M_r^L] \{\ddot{g}^L\} \\ &- \{\ddot{u}_r^L\} + \{F_c^L\} \end{aligned} \quad (22)$$

이 식에서 둘째 항 $2(\omega_L) [M_s^L] \{\dot{u}^L\}$ 은 코리올리(Coriolis)의 가속도에 의한 관성력이고, 셋째 항 $-(\omega^L)^2 [M^L] \{u^L\}$ 와 다섯째 항 $(\alpha_L) [M_s^L] \{u^L\}$ 은

구심 가속도와 접선 가속도에 의한 관성력으로서 위의 세 항은 강체 운동과 탄성 변형과의 연관성에 의해서 나타나는 연성항(coupling term)이다. 특히 구심 가속도 항의 질량 행렬은 $[M^L]$ 인데 비하여 접선 가속도와 코리올리 가속도 항의 그것은 $[M_s^L]$ 이다. 이것은 앞의 가속도와 뒤의 두 가속도의 방향이 서로 수직하기 때문이다.

2.2 회전 대우와 입력 축의 강성

각각의 링크는 대우(pair)에 의하여 결합되어 기구 시스템이 구성되므로 기구 전체의 탄성 변형을 고려하기 위해서는 이들 대우의 탄성 변형도 고려해야 한다. 평면 기구의 대우는 크게 미끄럼 대우와 회전 대우로 나눌 수 있고 미끄럼 대우는 조립에서의 틈새(clearance)를 무시하면 접촉 부분이 넓고 접촉 압력이 비교적 작아서 그 탄성 변형을 무시할 수 있다. 그 반면 회전 대우는 조립에서의 틈새를 무시한다 하더라도 접촉 부분의 탄성 변형을 무시하기 어렵다. 따라서 회전 대우 부분의 베어링을 미소 변위에 대하여 등방성 선형 스프링으로 이상화하여 유연성 링크의 일부로서 고려하였다. Fig. 2에 회전 대우의 모델링을 나타낸다. 베어링의 틈새는 무시되었고 두 링크의 끝에서의 선변위가 각각 u_1, u_2 , 그리고 u_4, u_5 이고 각 변위가 각각 u_3, u_6 이다. 만일 접촉 부분의 강성(stiffness)을 무한대로 두면 변위 u_1 과 u_4 , 그리고 u_2 와 u_5 가 같게 된다. 이 그림에서 스프링 강성을 $k/2$ 라고 두면 6개의 변위에 대하여 회전 대우의 강성 행렬은 다음과 같다.

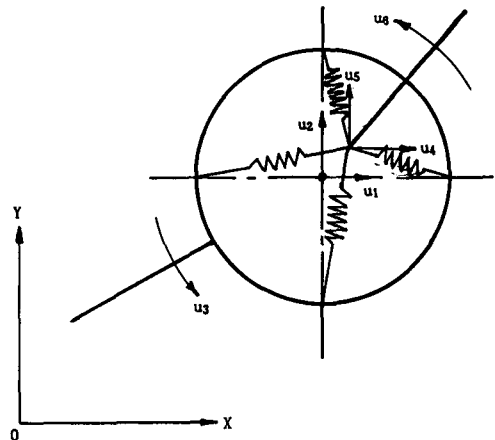


Fig. 2 Modeling of revolute joint

$$[K'] = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & -k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k & 0 & 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & -k & 0 & 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

입력 축의 비틀 스프링 상수를 k_t 라고 두면 기구 시스템의 강성 행렬의 해당 주 대각선 요소에 k_t 를 더해 주면 된다. 또한 회전 대우 부분의 질량은 링크의 끝에서의 집중 질량으로 취급하였다.

2.3 기구계의 구성

식 (22)로 표현되는 링크에 관한 운동 방정식을 적절히 좌표 변환시켜서 전체의 링크에 대해서 합하고 회전 대우의 강성 행렬을 고려하여 전체 시스템을 구성하였다. 일반적인 구조 해석 분야에서는 부분 좌표계(local coordinates)로 표현되는 절점의 변위를 모두 전체 좌표계(global coordinates)로 변환시켜서 시스템을 구성한다. 기구의 동적 해석에서는 Fig. 3에 나타내는 바와 같이 이웃한 링크와 연결되는 절점에서만 고정 좌표계로 변환하고 나머지 링크 내부의 절점의 값은 이동 좌표계를 그대로 사용한다. 이렇게 함으로써 불필요한 좌표 변환을 생략하여 계산 시간을 절약하고 계산오차를 줄인다.

이러한 링크의 변환 행렬을 $[T^L]$ 이라 하면 이것에 의해서 변환된 변위 $\{U\}$ 는 다음과 같다.

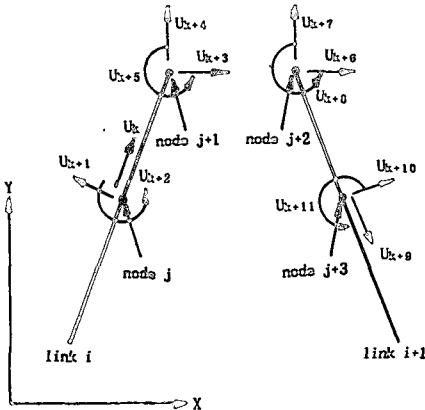


Fig. 3 Nodal displacements and coordinate transformation of revolute joint

$$\{U\} = [T^L]\{u^L\} \quad (24)$$

$$\{u^L\} = [T^L]^T\{U\} \quad (25)$$

$$\{\dot{u}^L\} = [\dot{T}^L]^T\{U\} + [T^L]^T\{\dot{U}\} \quad (26)$$

$$\{\ddot{u}^L\} = [\ddot{T}^L]^T\{U\} + 2[\dot{T}^L]^T\{\dot{U}\} + [T^L]^T\{\ddot{U}\} \quad (27)$$

또한,

$$\{g^L\} = [T^L]^T\{G\} \quad (28)$$

$$\{\ddot{u}_r^L\} = [T^L]^T\{\ddot{U}_r\} \quad (29)$$

여기서, $\{g^L\}$ 와 $\{\ddot{u}_r^L\}$ 은 링크의 절점의 중력 가속도와 링크의 절점의 강제 운동만 고려할 때의 절대 가속도를 이동 좌표계로 표현한 것이고 $\{G\}$ 와 $\{\ddot{U}_r\}$ 은 위의 것을 $[T_L]$ 로 변화시킨, 즉 전체 시스템의 자유도로 표현한 것이다.

식 (22)로 표현되는 링크의 운동 방정식을 기구계의 운동 방정식으로 구성하기 위하여 이 식의 각 항의 앞에 $[T^L]$ 을 곱하여 좌표 변환을 수행하고 모든 링크와 회전대우의 유연성 베어링을 고려하면 다음과 같이 기구계의 운동 방정식이 된다.

$$[M]\{\ddot{U}\} + [K]\{U\} = \{R\} - [C_c]\{\dot{U}\} - [K_c]\{U\} \quad (30)$$

여기서,

$$[M] = \sum_L [T^L][M^L][T^L]^T \quad (31)$$

$$[K] = \sum_L [T^L][K^L][T^L]^T + \sum_j [K^j] \quad (32)$$

$$\{R\} = \sum_L [T^L][M^L][T^L]^T (\{G\} - \{\ddot{u}_r\}) + \{F_c\} \quad (33)$$

$$[C_c] = 2 \sum_L [T^L][M^L][\dot{T}^L]^T + 2 \sum_L (\omega_L) [T^L][M_s^L][T^L]^T \quad (34)$$

$$[K_c] = \sum_L (a_L) [T^L][M_s^L][T^L]^T - \sum_L (\omega_L)^2 [T^L][M^L][T^L]^T + 2 \sum_L \omega_L [T^L][M_s^L][\dot{T}^L]^T + \sum_L [T^L][M^L][\ddot{T}^L]^T \quad (35)$$

$$\{F_c\} = \sum_L [T^L]\{F_c^L\} \quad (36)$$

식 (30)이 기구를 유한 요소로 나눈 절점의 탄성 변위에 관한 운동 방정식이다. 우변의 마지막 두 항이 이동 좌표계로 표현되는 탄성 변형과 이동 좌표계의 운동(기구의 강제 운동)과의 연관성에 의해서 나타나는연성항으로서 $[C_c]$ 와 $[K_c]$ 는 비대칭 행렬이다. 또한, 식 (30)에서 첫째 항을 생략하면

준정적 문제(quasi-static problem)가 된다.

2.4 보 요소를 이용한 해석

본 연구에서는 2절점 6자유도의 보 요소를 사용하였고, 이 경우 요소의 강성 행렬과 질량행렬 등을 참고로 부록에 수록하였으며, 상세한 처리 방법에 대해서는 선행된 연구⁽¹⁷⁾에서 광범하게 검토된 바 있다.

3. 모우드 중첩법에 의한 수치 해법

이 장에서는 식 (30)으로 표현되는 기구계의 운동 방정식을 $\{U\}$ 에 대하여 푸는 기법을 고찰한다. 동적인 구조 해석에서 전체 계의 질량 행렬과 강성 행렬은 보통 시간에 대하여 불변이지만 기구 해석에서는 이것들이 시간에 대하여 변한다. 왜냐하면 한 링크의 질량 행렬과 강성 행렬은 시간에 대하여 불변이지만 링크의 위치와 방향이 시간에 대하여 변하므로 식 (3)으로 표시되는 회전 행렬이 변하기 때문이다. 이와 같은 이유 때문에 동적 구조 해석 분야에서 이용되는 수치 적분법은 발산하기 쉽고 발산하지 않는다 하더라도 그 계산 결과를 믿기 어렵다. 따라서 유연성 기구의 동적 해석 분야에서 사용할 수 있는 수치 해법이 별도로 개발되고 있다. 그 중 하나가 여기서 채택한 기법⁽¹²⁾으로서 모우드 중첩법에 그 개념적 기초를 두고 있으며 이

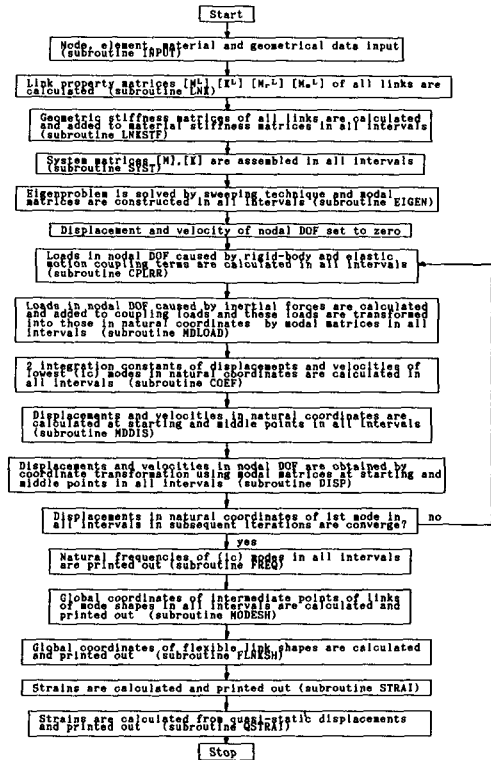


Fig. 4 Flow chart of FEM solution method by mode superposition

해법의 전체 유통도를 Fig. 4에 나타낸다. 자세한 것은 참고문헌⁽¹⁷⁾에 제시된 바 있다.

앞에서 논의한 해법에 따라 응용 빈도가 가장 많

Table 1 Four-bar mechanism parameters

	crank	coupler	lever
cross-sectional area	0.32634 cm ²	0.14406 cm ²	0.14406 cm ²
length	7.85 cm	26.2 cm	24.0 cm
2nd moment of area	1.34 × 10 ⁻³ cm ⁴	1.153 × 10 ⁻⁴ cm ⁴	1.153 × 10 ⁻⁴ cm ⁴

length of fixed link	: 23.8cm
lumped mass of revolute joint of fixed link-crank	: 0.007 kg
crank-coupler	: 0.014 kg
coupler-lever	: 0.0125 kg
lever-fixed link	: 0.007 kg
Young's modulus	: 2.19 × 10 ¹¹ Pa
mass density	: 7.718 g/cm ³
material of link	: stainless steel
spring constant of revolute joint	: 22700 N/m

은 크랭크-레버 4절 기구에 대하여 해석을 수행하였다. 기구계의 고정 좌표계와 이동 좌표계를 정의하는 방법을 Fig. 5에 도시하고, 한 링크를 3개, 즉 전체를 9개의 요소로 나누었을 때의 그것을 Fig. 6에 나타낸다. 크랭크와 연결봉과의 회전 대우 그리고 연결봉과 레버와의 회전 대우에서 변위는 고정 좌표계의 방향에 따르고 고정 링크와 크랭크 및 레버와의 회전 대우 그리고 링크 내부의 절점에서 변위는 이동 좌표계의 방향에 따르도록 하였다. 본 모델의 제원을 Table 1에 나타낸다.

회전 대우 부분의 베어링의 스프링 상수는 22700 N/m을 대입하여 계산을 수행하였으며 이것을 무한대(실제 계산에서 $10^4 \sim 10^5$ 배의 큰 값)로 놓으면 회전 대우 부분의 베어링의 중심과 핀의 중심의 상대 변위는 없는 것이 된다.

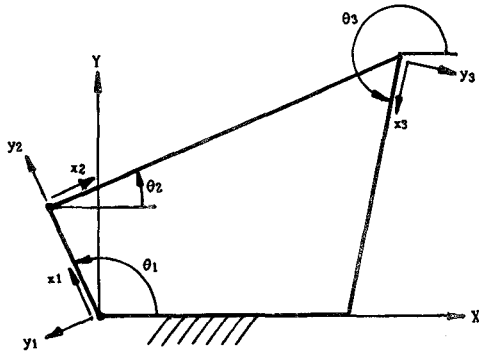


Fig. 5 Definition of moving and fixed coordinates

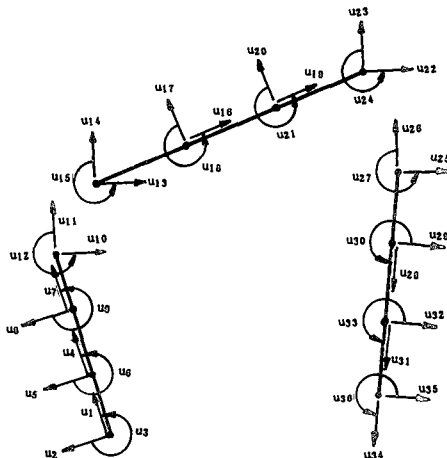


Fig. 6 Displacements of nodal DOF of 4-bar linkage mechanism system of 9 element model

4. 계산 결과 및 고찰

4.1 고유 진동수

해법의 첫 단계가 링크의 임의의 위치에서 입력 축(크랭크 축)을 고정시킴으로써 링크 기구를 순간적인 구조물로 생각하고 고유 진동수와 고유 진동형을 스위핑 기법으로 구하는 것이다. 한 링크를 3개의 요소, 즉 전체를 9개의 요소로 나누고 3개의 링크를 모두 유연성 링크로 간주하며 기하학적 강

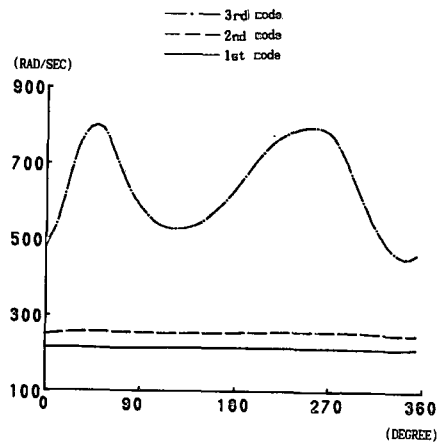


Fig. 7 Natural frequencies of lowest 3 modes vs. crank position

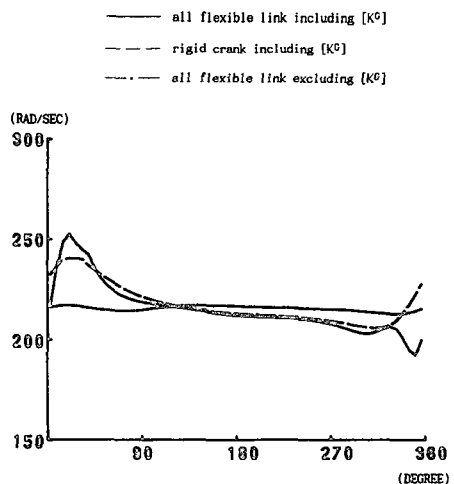


Fig. 8 1st mode natural frequencies vs. crank position, all flexible and including $[K^c]$ (solid line), rigid crank and including $[K^c]$ (broken line), all flexible and excluding $[K^c]$ (chain line)

성을 고려하지 않은 경우, 셋째 모우드까지의 고유진동수의 크랭크의 위치에 따른 변화를 Fig. 7에 나타내었다. 여기서 알 수 있는 바와 같이 첫째와 둘째 모우드의 고유진동수는 큰 변화가 없으나 셋째 것은 변화가 크다. 다음의 고유진동형에 관한 고찰에서 알 수 있지만 셋째 모우드는 크랭크의 변형과 관계가 크다는 사실과 관련이 있을 것으로

생각된다. 이 단계에서는 기하학적 강성을 고려하지 않았으므로 고유진동수는 링크의 속도와 무관하다.

기하학적 강성을 고려하면 링크 기구의 고유진동수가 어떤 변화를 보이는지 그리고 크랭크의 탄성 변형을 무시하면, 즉 크랭크가 강체라고 가정하면 고유진동수가 어떻게 변하는지를 알아본다. 이

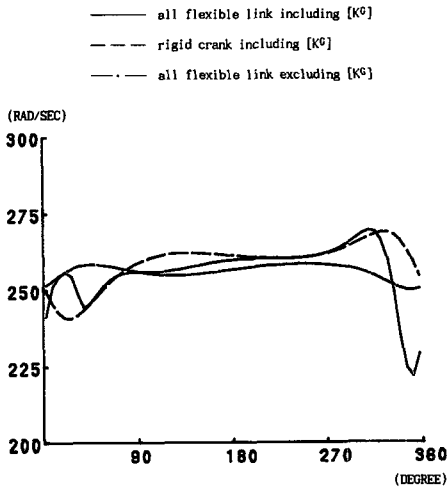


Fig. 9 2nd mode natural frequencies vs. crank position, all flexible and including $[K^C]$ (solid line), rigid crank and including $[K^C]$ (broken line), all flexible and excluding $[K^C]$ (chain line)

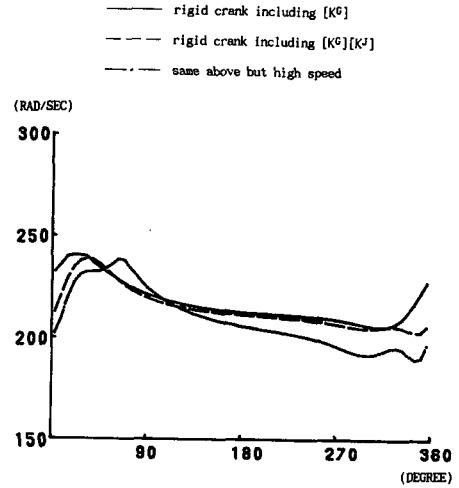


Fig. 11 1st mode natural frequencies vs. crank position, rigid crank and including $[K^C]$ (solid line), rigid crank and including $[K^C][K^J]$ (broken line), same above but high speed (chain line)

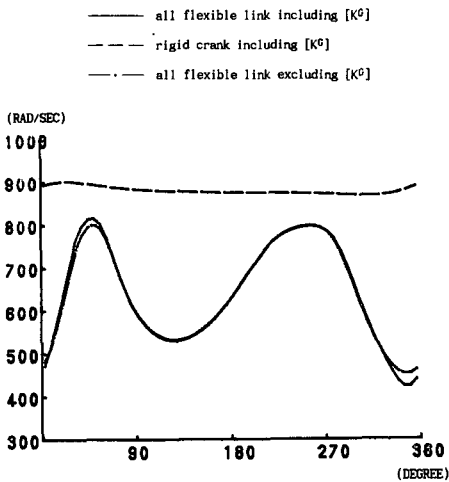


Fig. 10 3rd mode natural frequencies vs. crank position, all flexible and including $[K^C]$ (solid line), rigid crank and including $[K^C]$ (broken line), all flexible and excluding $[K^C]$ (chain line)

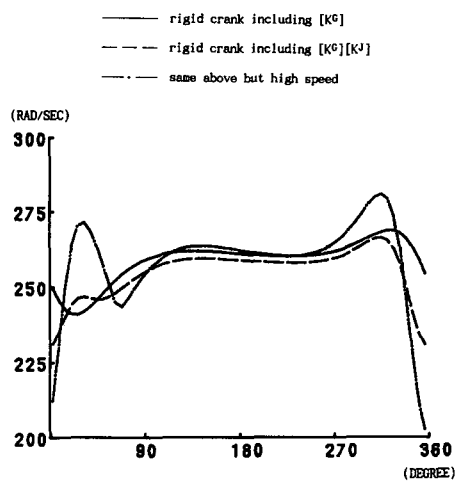


Fig. 12 2nd mode natural frequencies vs. crank position, rigid crank and including $[K^C]$ (solid line), rigid crank and including $[K^C][K^J]$ (broken line), same above but high speed (chain line)

런 경우, 첫째 모우드의 고유 진동수의 변화를 Fig. 8에, 둘째 모우드의 그것을 Fig. 9에, 그리고 셋째 모우드의 그것을 Fig. 10에 나타내었다. 첫째 모우드와 둘째 모우드의 경우, 기하학적 강성을 고려하면(Fig. 8과 Fig. 9의 실선과 파선) 고유 진동수의 변화가 커지고 그 중에서도 크랭크의 탄성 변형을 무시한 경우(Fig. 8와 Fig. 9의 파선) 보다 모든 링크를 유연성 링크로 한 경우(Fig. 8와 Fig. 9의 실선)가 고유 진동수의 변화가 더 크다. 따라서 기하학적 강성은 기구계의 고유 진동수에 큰 영향을 미치는 것을 알 수 있다. 그러나 셋째 모우드의 경우 기하학적 강성은 고유 진동수에 큰 영향을 미치지 않으며 오히려 크랭크의 탄성 변형의 고려 여부가 고유 진동수에 큰 영향을 미친다. 다음의 고유 진동형에 관한 고찰에서 알 수 있지만 셋째 모우드는 크랭크의 탄성 변형과 관계가 크므로 크랭크의 탄성 변형 여부는 셋째 모우드의 고유 진동수에 중대한 영향을 미친다.

본 연구에서 유연성 링크의 일부로서 회전 대우 부분의 베어링의 탄성 변형을 고려하고 있다. 이 베어링의 탄성 변형이 전체 계의 고유 진동수에 어떤 영향을 미치는지, 그리고 구동 속도를 변화시키는 것이 전체 계의 고유 진동수에 어떤 영향을 미치는지를 검토하였다. 첫째 모우드의 고유 진동수의 크랭크의 위치에 따른 변화를 Fig. 11에, 둘째

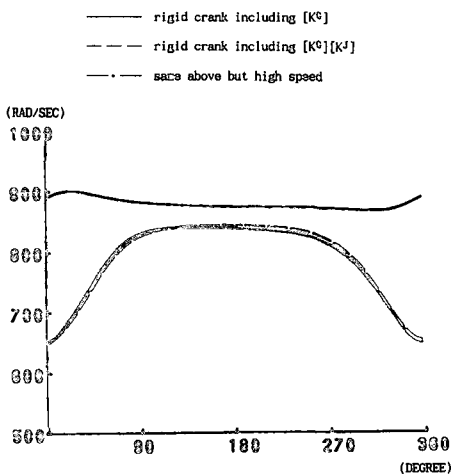


Fig. 13 3rd mode natural frequencies vs. crank position, rigid crank and including $[K^C]$ (solid line), rigid crank and including $[K^C][K^J]$ (broken line), same above but high speed (chain line)

모우드의 그것을 Fig. 12에, 그리고 셋째 모우드의 그것을 Fig. 13에 나타내었다. 이 때 크랭크의 탄성 변형은 무시되었으며 실선과 파선의 경우 크랭크의 각 속도가 30rad/s이고 일점 쇄선의 경우 그것이 45rad/s이다. 세 개의 모우드 전부에서 연결 봉과 레버 사이의 베어링의 유연성이 전체 계의 강성을 감소시켜서 고유 진동수를 낮추고 있다. 또한 기구의 작동 속도를 높이면 링크의 길이 방향의 하중의 변화가 커지고 이 하중의 변화가 기하학적 강성의 변화를 크게하여 고유 진동수를 크게 변화시키고 있음을 알 수 있다. 이러한 특징은 첫째와 둘째 모우드에서 더 두드러진다.

4.2 고유 진동형

기구계의 임의의 위치에서 고유치와 함께 고유벡터가 필요한 갯수 만큼 계산된다. 이 고유벡터는 고유 진동형을 의미하므로 이것을 절점의 변위로 생각하고 형태 함수를 이용하여 링크의 변형된 위치를 고정 좌표계로 계산하여 그림을 그리면 고유 진동형을 알 수 있다. 크랭크의 위치가 27° 일 때, 3개의 링크를 유연성 링크라고 생각할 때의 3개의 고유 진동형을 Fig. 14의 (a), (b), (c)에, 그리고

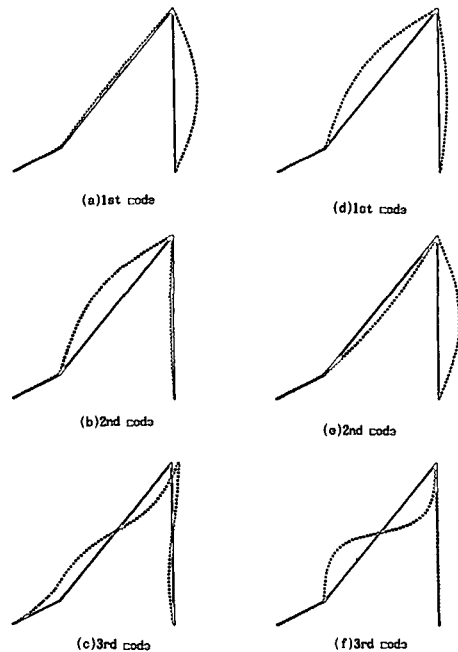


Fig. 14 Lowest 3 mode shapes of 4-bar linkage at crank angle 27°, all flexible links ((a), (b), (c)), rigid crank ((d), (e), (f))

크랭크를 강체라고 생각할 때의 그것을 Fig. 14의 (d), (e), (f)에 나타낸다. 크랭크의 위치가 123°일 때 앞에서와 같은 것을 Fig. 15에 나타낸다. 이 두 그림에서 알 수 있는 바와 같이 크랭크의 유연성 여부가 고유 진동형이 결정되는데 중요한 영향을 미치고 특히 셋째 모드에서 더욱 그렇다. 또한 크랭크의 위치에 따라서 고유 진동형이 크게 차이가 난다. 즉, 3링크가 모두 유연성 링크인 경우,

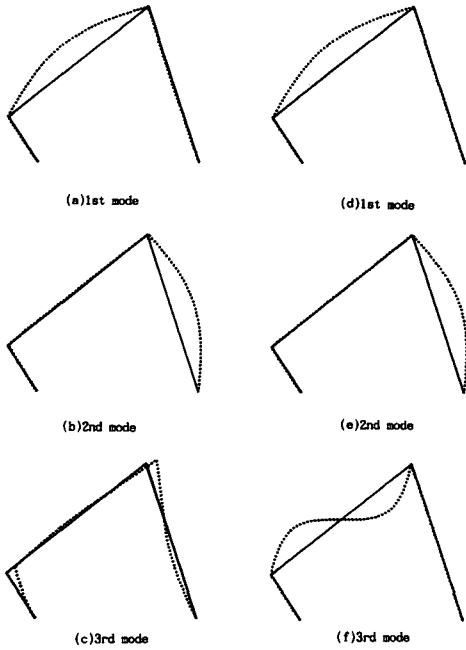


Fig. 15 Lowest 3 mode shapes of 4-bar linkage at crank angle 123°, all flexible links ((a), (b), (c)), rigid crank ((d), (e), (f))

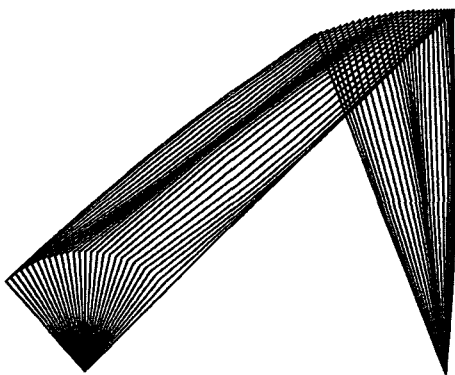


Fig. 16 Flexible link shapes of 4-bar linkage for crank angles of 45°~132° at 3° interval and an input speed of 30rad/s

크랭크의 위치가 27°일 때에 첫째 모우드는 레버, 둘째 모우드는 연결봉의 변형과 관계가 크지만, 크랭크의 위치가 123°일 때는 첫째 모우드는 연결봉, 둘째 모우드는 레버의 변형과 관계가 크다. 그리고

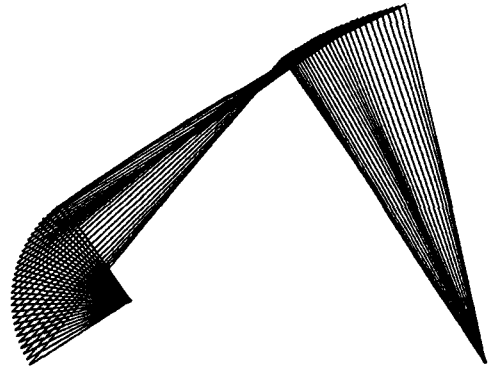


Fig. 17 Flexible link shapes of 4-bar linkage for crank angles of 135°~222° at 3° interval and an input speed of 30rad/s

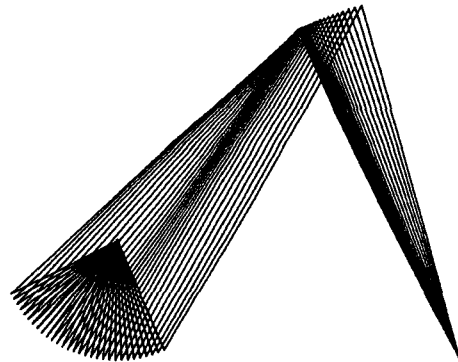


Fig. 18 Flexible link shapes of 4-bar linkage for crank angles of 225°~312° at 3° interval and an input speed of 30rad/s

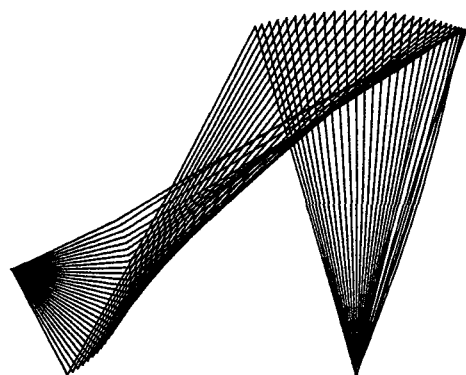


Fig. 19 Flexible link shapes of 4-bar linkage for crank angles of 315°~42° at 3° interval and an input speed of 30rad/s

크랭크가 강제라고 가정될 때 첫째 모우드는 연결봉, 그리고 둘째 모우드는 레버의 탄성 변형과 관계가 크다.

고유 진동형을 그릴 때 탄성 변형의 척도는 시각적으로 그 특징이 잘 드러나도록 임의로 택했다. 즉, 고유벡터를 질량에 대하여 정규화시킨 후 4/1000로 축소한 것을 절점의 탄성 변위로 생각하고 형태 함수를 이용하여 링크의 변형된 형상을 계산하였다. 여기서 베어링의 탄성 변형은 무시되었고 기하학적 강성은 포함되었으며 구동절이 30rad/s로 회전할 때의 해석 결과이다.

4.3 탄성 변위에 의한 기구의 순간 위치
4절 링크 기구의 운동의 한 주기를 60개의 구간

으로 나누고 한 구간의 시작점과 중점에서 탄성 변형을 구했으므로 크랭크가 3° 회전할 때마다 탄성 변형에 의한 링크 기구의 순간적인 위치를 계산하였으며 이것을 그림으로 나타낸다. 크랭크의 각 속도가 30 rad/s이고 세 링크 모두 유연성 링크이며 베어링의 탄성 변형을 무시할 때 크랭크의 회전 각을 90°씩 나누어서 4개의 그림으로 표시하였으며 이것을 Fig. 16, Fig. 17, Fig. 18 그리고 Fig. 19에 나타내었다. 한 링크가 3개의 요소로 구성되고 한 요소의 8개의 등분된 점과 양끝 점에서 변형된 위치가 고정 좌표계로 계산되므로 4절 기구를 그리는 데 28개의 점의 좌표가 계산되는 셈이다.

연결봉과 레버의 변형은 다순 지지 보가 분포 하중을 받을 때의 그것과 유사하며 이것은 앞에서 논

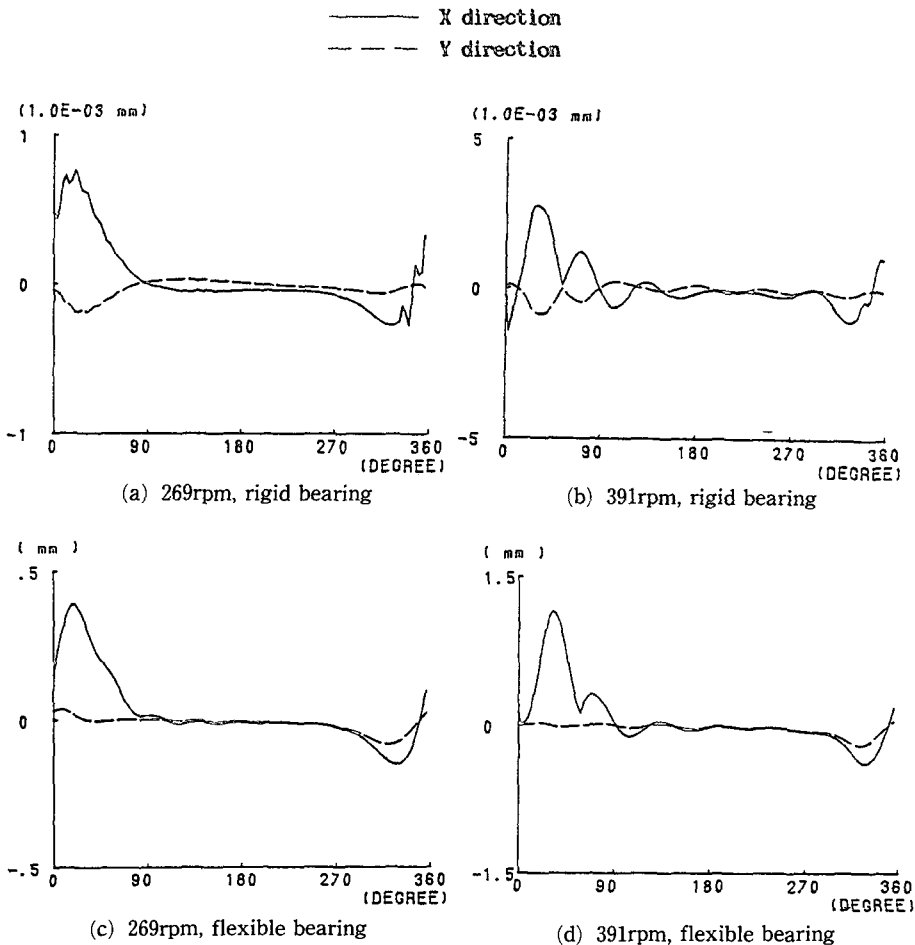


Fig. 20 Elastic displacements at the upper end of the lever vs. crank position in global X and Y directions

의한 고유 진동형에서도 확인할 수 있다. 크랭크는 두께가 두꺼워서 변형량이 미소하고 따라서 그림에서 잘 나타나지 않았다.

기구 전체의 탄성 변형에 의한 레버의 상단(upper end)의 탄성 변위를 크랭크의 위치에 대하여 Fig. 20에 나타내었다. 여기서 크랭크는 강체로 가정되었고 Fig. 20의 (a), (b) 그림이 강성 베어링, (c), (d) 그림이 유연성 베어링을 사용한 경우이며 구동 속도는 269rpm, 391rpm 두 가지이고 실선이 수평(오른쪽이 양), 파선이 수직(위쪽이 양)의 탄성 변위이다. 이 그림에서 알 수 있는 바와 같이 강성 베어링을 사용한 경우 레버의 상단의 탄성 변위는 극히 작다. 그 이유는 링크의 횡 방향의 탄성 변형이 이 점의 변위에 거의 영향을 미치지 않지

때문이라고 판단된다. 그 반면 유연성 베어링을 사용한 경우 이 점의 변위는 상대적으로 매우 크다. 따라서 베어링의 탄성 변형이 이 점의 변위에 매우 큰 영향을 미치는 것을 알 수 있다.

기구 전체의 탄성 변형에 의한 연결봉의 중점의 탄성 변위의 변화를 크랭크의 위치에 따라 Fig. 21에 나타냈다. 여기서 크랭크는 강체로 가정되었고 Fig. 21의 (a), (b) 그림이 강성베어링, (c), (d) 그림이 유연성 베어링을 사용한 경우이며 구동 속도는 269rpm, 391rpm 두 가지이고 실선이 수평 방향(오른쪽이 양), 파선이 수직 방향(위쪽이 양)의 탄성 변위이다. 이 그림에서 알 수 있는 바와 같이 베어링의 탄성 변형 여부는 연결봉의 중점의 탄성 변위에 큰 영향을 미치지 않으며 이런 현상은 Fig.

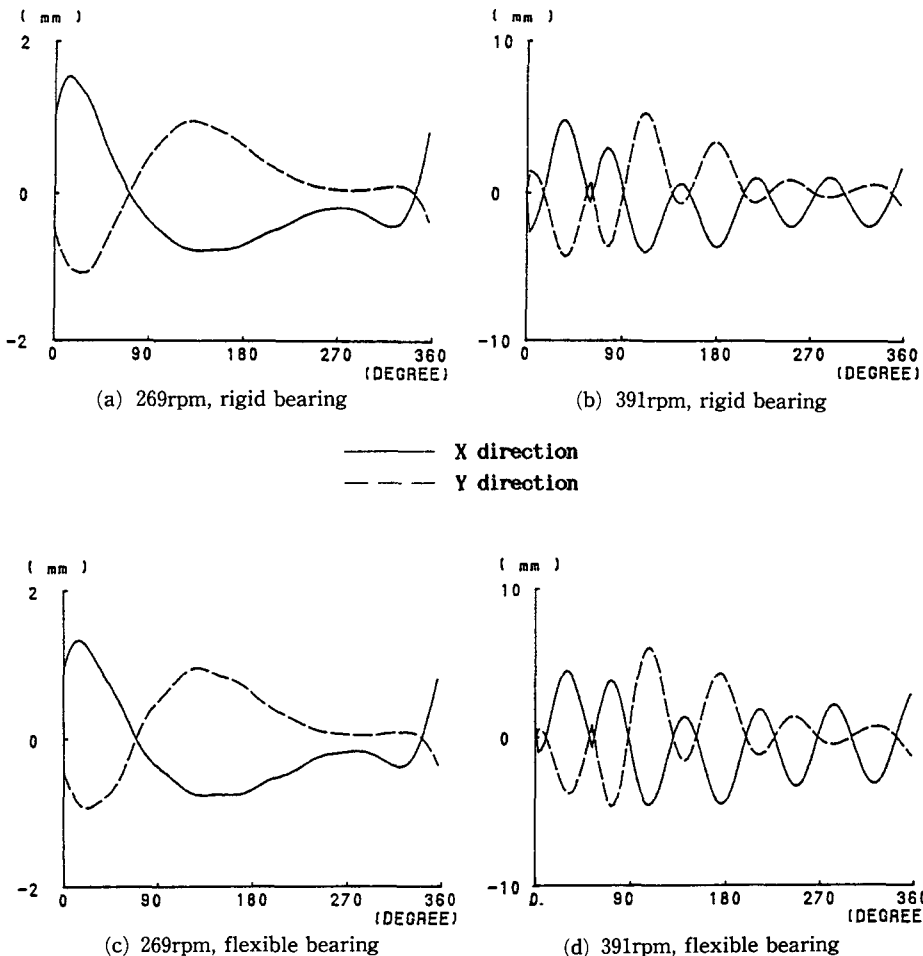


Fig. 21 Elastic displacements at the mid-point of the coupler vs. crank position in global X and Y directions

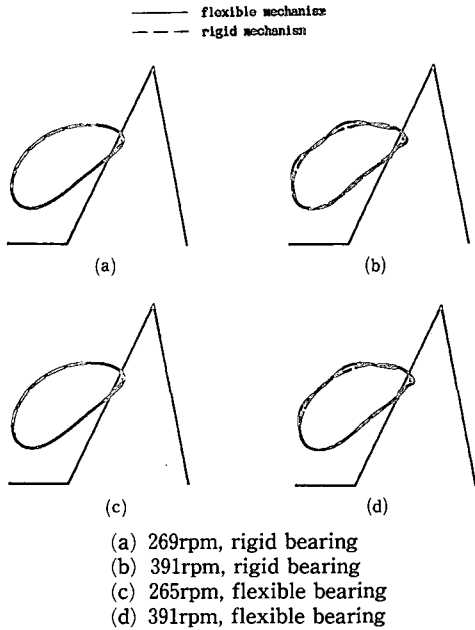


Fig. 22 Paths of the mid-point of the coupler

20에 나타난 레버의 상단에서의 탄성 변위와는 크게 대조를 이룬다.

또한, 비교적 저속인 269rpm에서 연결봉의 중점의 탄성 변위는 구동 속도에 해당하는 진동수 성분만 있고, 고속인 391rpm에서는 그 탄성 변위는 링크의 고유 진동수 성분이 크게 나타나는 진동의 형태를 띤다.

크랭크의 탄성 변형을 무시하고 기구를 269rpm과 391rpm으로 회전시킬 때의 연결봉의 중점의 운동 궤적을 Fig 22에 나타냈다. 실선이 유연성 기구, 파선이 강성 기구의 것이며 유연성 기구의 경우 베어링의 탄성 변형을 고려한 것과 그렇지 않은 것으로 구분하였다. 크랭크의 회전각이 0°일 때의 강성 기구의 위치를 함께 그렸으며 운동이 진행됨에 따라 이 점의 궤적은 반시계 방향으로 진행한다.

5. 결 론

한 링크를 여러개의 2절점 보 요소로 모델링하고 정적 구조 해석에 관한 유한 요소법으로부터 관성력과 중력 그리고 외력을 하중으로 간주하여 링크의 동적 탄성 변형에 관한 운동 방정식을 링크에 부착된 이동 좌표계에 대하여 유도하였다. 회전 대

우 부분의 베어링을 선형 스프링으로 모델링하고 그 질량을 링크의 양단에서의 집중 질량으로 간주하여 유연성 기구 해석에 포함시켰으며 모든 링크와 회전 대우를 결합하여 기구계의 탄성 변형에 관한 유한 요소 지배 방정식을 고정 좌표계에 대하여 유도하였다. 모우드 중첩법을 이용한 수치 해법으로 기구계의 탄성 변형을 구하는 컴퓨터 프로그램을 작성하고, 이 프로그램을 크랭크-레버 4절 기구에 적용하여 구동절이 일정하게 회전할 때 정상 상태의 동적 탄성 변형을 구하였다. 위와 같은 해석을 수행하여 다음의 결론을 얻었다.

(1) 준정적 변위 해석을 통하여 얻어진 길이 방향의 하중을 이용하여 기하학적 강성(비선형 강성)을 계산하고 이것을 재료의 강성에 포함시킨 결과 기하학적 강성이 기구계의 고유 진동수 및 동적 탄성 변형에 매우 큰 영향을 미친다.

(2) 링크 기구의 임의의 회전 위치에서 입력 축을 고정함으로써 링크 기구를 순간적인 구조물로 생각하여 고유 진동형을 수치적인 방법으로 해석한 결과 1차 고유 진동형은 연결봉의 탄성 변형 그리고 2차 고유 진동형은 레버의 탄성 변형 그리고 3차 고유진동형은 크랭크의 탄성 변형과 관계가 컸다.

(3) 베어링의 탄성 변형을 고려하면 이것을 고려하지 않을 때보다 기구계의 고유 진동수가 낮아져서 링크의 끝 부분에서 탄성 변위가 증가하였다.

참고문헌

- (1) Liou, F. W. and Erdmam, A.G. 1989, "Analysis of a High-Speed Flexible Four-Bar Linkage," Part I, Trans. ASME J. Vib. Acous. Str. Rel. Des., Vol. 111, pp. 35~41.
- (2) Liou, F.W. and Erdmam, A.G., 1989, "Analysis of a High-Speed Flexible Four-Bar Linkage," part II, Trans. ASME J. Vib. Acous. Str. Rel. Des., Vol. 111, pp. 42~47.
- (3) Cleghorn, W.L., Fenton R.G. and Tabarrok, B. 1981, "Finite Element Analysis of High-Speed Flexible Mechanisms," Mech. Mach. Theory, Vol. 16, No. 4, pp. 407~424.
- (4) Cleghorn, W.L., Fenton R.G. and Tabarrok, B. 1984, "Steady-State Vibrational Response of High-Speed Flexible Mechanisms," Mech. Mach.

- Theory, Vol. 19, No.4/5, pp. 417~423.
- (5) Bahgat, B. M. and Willmert, K.D. 1976, "Finite element Vibrational Analysis of Planar Mechanisms," Mech. Mach. Theory, Vol.11, pp. 47~71.
- (6) Cleghorn, W.L. and Chao, K.C. 1988, "Kineto-Elastodynamic Modeling of Mechanisms Employing Linearly Tapered Beam Finite Elements," Mech. Mach. Theory, Vol.23, No.5, pp. 333~342.
- (7) Nath, P.K. and Ghosh, A. 1980, "Kineto-Elastodynamic Analysis of Mechanisms by Finite Element Method," Mech. Mach. Theory, Vol.15, pp. 179~197.
- (8) Nath, P.K. and Ghosh, A. 1980, "Steady-State Response of Mechanisms with Elastic Links by Finite Element Methods," Mech. Mach. Theory, Vol. 15, pp. 199~211.
- (9) Bagci, C. and Kalaycioglu, S. 1979, "Elastodynamics of Planer Mechanisms Using Planar Actual Finite Line Elements, Lumped Mass Systems, Matrix-Exponential Method, and the Method of "Critical-Geometry-Kineto-Statics" (CGKES)," Trans. ASME J.Mech. Des., Vol.101, pp. 417~427.
- (10) Kalaycioglu, S. and Bagci, C. 1979, "Determination of the Critical Operation Speeds of Planer Mechanisms by the Finite Element Method Using Planer Actual Line Elements and Lumped Mass Systems," Trans. ASME J. Mech. Des., Vol. 101, pp. 210~223.
- (11) Midha, A. Erdman, A.G. and Frohrib, D.A. 1978, "Finite Element Approach to Mathematical Modeling of High-Speed Elastic Linkages," Mech. Mach. Theory, Vol. 13, pp. 603~618.
- (12) Midha, A., Erdman, A.G. and Frohrib, D.A. 1979, "A Closed-Form Numerical Algorithm for the Periodic Response of High-Speed Elastic Linkages," Trans. ASME J. Mech. Des., Vol. 101, pp. 154~162.
- (13) Turcic, D.A. and Midha, A. 1984, "Generalized Equations of Motion for the Dynamic Analysis of Elastic Mechanism Systems," Trans. ASME J. Dyn. Sys. Meas. cont., Vol.106, pp. 243~248.
- (14) Turcic, D.A. and Midha, A. 1984, "Dynamic Analysis of Elastic Mechanism Systems," Part I, Trans. ASME J. Dyn. Sys. Meas. cont., Vol.106, pp. 255~260.
- (15) Turcic, D.A. and Midha, A. 1984, "Dynamic Analysis of Elastic Mechanism Systems," Part II, Trans. ASME J. Dyn. Sys. Meas. cont., Vol. 106, pp. 255~260.
- (16) Thompson, B.S. and Sung, C.K. 1984, "A Variational Formulation for the Nonlinear Finite Element Analysis of Flexible Linkages," Theory, Implementation and Experimental Results. Trans. ASME J. Mech. Trans. Auto. Des., Vol.106, pp. 482~487.
- (17) 박종근, 1991, "유한 요소법을 이용한 유연성 링크 기구의 동적 해석", 서울대학교 공학박사 학위 논문

부 록

보 요소의 형태 함수와 변위 $\{u\}$ 는 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & h_4 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & h_3 & 0 & h_5 & h_6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

여기서,

$$\begin{aligned} h_1 &= 1 - \frac{x}{L} \\ h_2 &= 3 \left[\frac{L-x}{L} \right]^2 - 2 \left[\frac{L-x}{L} \right]^3 \\ h_3 &= x \left[\frac{L-x}{L} \right]^2 \\ h_4 &= \frac{x}{L} \\ h_5 &= 3 \left[\frac{x}{L} \right]^2 - 2 \left[\frac{x}{L} \right]^3 \\ h_6 &= -(L-x) \left[\frac{x}{L} \right]^2 \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

이 형태 함수를 사용하면 $[K^m]$ 은 다음과 같이 계산된다.

$$[K^m] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} AL^2/I & 0 & 0 & -AL^2/I & 0 & 0 \\ & 12 & 6L & 0 & -12 & 6L \\ & & 4L^2 & 0 & -6L & 2L^2 \\ SYMM. & & & AL^2/I & 0 & 0 \\ & & & & 12 & -6L \\ & & & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (A.3)$$

보 요소에 대하여 기하학적 강성 행렬 $[K_c^m]$ 은 다음과 같다.

$$[K_c^m] = \frac{F}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6/5 & L/10 & 0 & -6/5 & L/10 \\ 0 & L/10 & 2L^2/15 & 0 & -L/10 & -L^2/30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6/5 & -L/10 & 0 & 6/5 & -L/10 \\ 0 & L/10 & -L^2/30 & 0 & -L/10 & 2L^2/15 \end{bmatrix} \quad (A.4)$$

보 요소에 대하여 $[M_r^m]$ 은 다음과 같이 계산된다.

$$[M_r^m] = \rho AL \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 7/20 & 0 & 0 & 3/20 & 0 \\ 0 & L/20 & 0 & 0 & L/30 & 0 \\ 1/6 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 3/20 & 0 & 0 & 7/20 & 0 \\ 0 & -L/30 & 0 & 0 & -L/20 & 0 \end{bmatrix} \quad (A.5)$$

$[M^m]$, $[M_s^m]$ 은 다음과 같다.

$$[M^m] = \rho AL \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 \\ & 13/35 & 11L/210 & 0 & 9/70 & -13L/420 \\ & & L^2/105 & 0 & 13L/420 & -L^2/140 \\ SYMM. & & & 1/3 & 0 & 0 \\ & & & & 13/35 & -11L/210 \\ & & & & & L^2/105 \end{bmatrix} \quad (A.6)$$

$$[M_s^m] = \rho AL \begin{bmatrix} 0 & -7/20 & -L/20 & 0 & -3/20 & L/30 \\ 7/20 & 0 & 0 & 3/20 & 0 & 0 \\ L/20 & 0 & 0 & L/30 & 0 & 0 \\ 0 & -3/20 & -L/30 & 0 & -7/20 & L/20 \\ 3/20 & 0 & 0 & 7/20 & 0 & 0 \\ -L/30 & 0 & 0 & -L/20 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (A.7)$$

보 요소의 양단에 집중 질량 m_1 , m_2 가 존재하는 경우에는 $[M^m]$, $[M_s^m]$, $[M_r^m]$ 에 아래의

$[M^m]_c$, $[M_s^m]_c$, $[M_r^m]_c$ 를 각각 합해 주면 된다.

$$[M^m]_c = [M_r^m]_c = \begin{bmatrix} m_1 & & & & & 0 \\ & m_1 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & m_2 & & \\ & & & & m_2 & \\ 0 & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

또 강제운동에 관한 형태 함수는

$$[H_r] = \begin{bmatrix} 1-x/L & 0 & 0 & x/L & 0 & 0 \\ 0 & 1-x/L & 0 & 0 & x/L & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

로 표시된다.

$$[M_s^m]_c = \begin{bmatrix} 0 & m_1 & & & & 0 \\ m_1 & 0 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 0 & -m_2 & \\ & & & m^2 & 0 & \\ 0 & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$