

〈論 文〉

균열의 충격해석에 대한 Laplace 변환 2차원 경계요소법의 응용

조상봉* · 김태규** · 최선호***

(1991년 11월 4일 접수)

An Application of 2-D BEM with Laplace Transformation to impact Crack Analysis

Sang Bong Cho, Tae Gyu Kim and Sun Ho Choi

Key Words : Boundary Element Method(경계요소법 : BEM), Laplace Transformation(라플라스 변환), Elastodynamics(동탄성), Impact(충격)

Abstract

Analysis of dynamic or impact problems is very important in engineering fields such as airplanes and automobiles. In the present study, two-dimensional elastodynamic BEM program with Laplace transformation is developed to analyze dynamic or impact problems. Accuracy and efficiency of the BEM program are tested by making the comparison of impact analysis of some models with other's published results. The BEM developed is applied to the impact crack problem and the dynamic stress intensity factors of some impact cracks is obtained by the displacement extrapolation method. It is confirmed to be possible to analyze impact problems accurately with only a little elements in simple models. And also it is found to be careful to use the singular element usually using in static crack problems because that the elastodynamic fundamental solution has more sensitive singularity than the static fundamental solution and to determine the boundary conditions in dynamic problems.

1. 서 론

동적 하중(dynamic loading)이나 충격 하중(impact loading)을 받는 자동차, 항공기 또는 각종 구조물들은 정하중하에서는 예기치 못한 경우의 파괴가 일어나며, 이와같은 동적 및 충격문제의 해석은 공학상 중요한 문제이다.

동탄성(elastodynamics) 문제는 Eringen⁽¹⁾ 등에

의한 이론적 해석과 Zukas⁽²⁾ 등의 충격문제에 관한 각종 실험적인 연구가 있으며, 또한 수치해석적인 방법으로는 유한요소법으로 많은 연구가 된 바 있다. 그런데, Manolis^(3,4,5), Ahmad⁽⁶⁾ 등이 경계요소법(BEM)으로 연구한 바 있으나, 응용예가 적으며 정도상의 문제로 인해 아직은 많은 문제점을 안고 있는 실정이다.

동탄성 문제에 대한 경계요소법으로는 Laplace 변환 영역(laplace transform domain) 법과 시간영역(time domain)법이 있으며, Laplace변환 영역법의 특징은 Laplace변환 영역에서 경계적분방정식의 형태가 정적상태의 경계적분방정식과 유사

*정회원, 경남대학교 기계설계학과

**정회원, 영남대학교 기계설계학과 대학원

***정회원, 영남대학교 기계설계학과

한 형태로 표현되므로 정적 경계요소법 프로그램을 그다지 변경하지 않고 동적문제 프로그램을 만들 수 있는 장점이 있다. 그런데, 주파수 영역에서 계산하고 다시 역변환(inverse laplace transform)하여 실제의 시간영역의 해를 구하게 되므로 총시간 구간의 분할수 만큼의 정탄성 문제를 해석해야 하는 꼴이 되므로 계산 시간이 많아지는 단점이 있다.

본 연구에서는 Laplace 변환법에 의한 2차원 동적 문제의 경계요소 프로그램을 작성하고, 간단한 모델을 해석하여 프로그램의 정도 및 그 유용성을 검토하고, 응용문제로 동적하중을 받는 균열문제의 몇 가지 모델에 대하여 변위 외삽법으로 균열의 파괴 역학적 파라미터인 동적응력확대계수(dynamic stress intensity factor)를 구하여 결과를 검토하여 보고자 한다.

2. 기초이론

2.1 동탄성 문제의 경계적분방정식과 기본해
동탄성 문제의 지배미분방정식은 다음과 같다.

$$(C_L^2 - C_T^2) u_{j,ji} + C_T^2 u_{i,jj} + \frac{b_i}{\rho} = \ddot{u}_i \quad (1)$$

여기서, ρ 는 밀도, b_i 는 체적력이다. 그리고, 전 논문을 통하여 첨자 $i, j = x, y$ 를 표시한다. 또한, C_L 는 팽창파(dilatational wave)의 속도, C_T 는 회전파(rotational wave)의 속도이고 식(2)와 같으며, λ 와 μ 는 Lamé의 상수이다.

$$C_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad C_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (2)$$

초기조건(initial condition) 및 경계조건(boundary condition)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

초기조건 :

$$\begin{aligned} u_i(X, t) &= u_i^0(X, t_0) \\ \dot{u}_i(X, t) &= \dot{u}_i^0(X, t_0) \text{ for } t = t_0, \Omega + \Gamma \end{aligned} \quad (3)$$

여기서, u_i 는 임의시간의 변위, u_i^0 는 초기변위, \dot{u}_i^0 는 초기속도이고, t 는 시간, t_0 는 초기시간, X 는 착목점(field point), Γ 는 영역의 전 경계, Ω 는 영역의 내부를 의미한다.

경계조건 :

$$\begin{aligned} u_i(X, t) &= \bar{u}_i(X, t) \text{ for } t > t_0 \text{ on } \Gamma_1 \\ p_i(X, t) &= \sigma_{ij} n_j = \bar{p}_i(X, t) \text{ for } t > t_0 \text{ on } \Gamma_2 \end{aligned}$$

(4)
여기서, u_i 는 변위, p_i 는 표면력, n_j 는 법선방향에 대한 방향여현이다. 그리고 Γ_1 은 변위가 주어진 경계이고, Γ_2 는 표면력이 주어진 경계이다.

식(1)을 Laplace 변환하면 다음과 같이 되며, 이것은 정탄성 문제의 지배미분방정식과 형태가 유사하다.

$$\begin{aligned} (C_L^2 - C_T^2) U_{j,ji} + C_T^2 U_{i,jj} + \frac{B_i}{\rho} \\ - S^2 U_i + S u_i^0 + \dot{u}_i^0 = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

여기서,

$$\begin{aligned} U_i(X, S) &= \int_0^\infty u_i(X, t) e^{-st} dt \\ B_i(X, S) &= \int_0^\infty b_i(X, t) e^{-st} dt \end{aligned} \quad (6)$$

이고, 또, $S = a + i\omega$ 이며 a, ω 는 Laplace 파라미터이다. 경계조건은 Laplace 변환영역에서

$$\begin{aligned} U_i(X, S) &= \bar{U}_i(X, S) \text{ on } \Gamma_1 \\ P_i(X, S) &= \bar{P}_i(X, S) \text{ on } \Gamma_2 \end{aligned} \quad (7)$$

이며, 경계적분방정식⁽³⁾은 식(8)과 같이 되어, 이것 또한 정탄성 문제의 경계적분방정식의 형태와 유사하다.

$$\begin{aligned} C_{ij}(Z) U_j(Z, S) + \int_{\Gamma} P_{ij}^*(Z, X, S) U_j(X, S) d\Gamma \\ = \int_{\Gamma} U_{ij}^*(Z, X, S) P_j(X, S) d\Gamma \\ + \int_{\Omega} U_{ij}^*(Z, X, S) Q_j(X, S) d\Omega \end{aligned} \quad (8)$$

여기서, $Q_j = B_j + \rho(Su_j^0 + \dot{u}_j^0)$ 이며, Z 는 차력점(load point), U_{ij}^*, P_{ij}^* 는 Laplace 변환영역에서의 기본해⁽¹⁾이며, C_{ij} 는 경계의 모양에 의해 정해지는 계수이며 정탄성 문제에서와 같이 강제평행이동 조건을 이용하여 구할 수 있다. 정탄성 문제의 경계적분방정식에서 강제평행이동 조건을 이용하면 C_{ij} 는 유한판과 무한판에서 각각 다음과 같이 주어진다.

$$C_{ij}(Z) = - \int_{\Gamma} T_{ij}(Z, X) d\Gamma, \quad (\text{Finite plate}) \quad (9)$$

$$C_{ij}(Z) = \delta_{ij} - \int_{\Gamma} T_{ij}(Z, X) d\Gamma, \quad (\text{Infinite plate}) \quad (10)$$

여기서, T_{ij} 는 통상의 정탄성 경계요소법에 사용되는 기본해로 Kelvin해의 표면력의 기본해이고, δ_{ij}

는 Kronecker 델타이다.

2차원 동탄성 문제에서 변위의 기본해 U_{ij}^* 는 다음과 같이 주어진다.

$$U_{ij}^*(Z, X, S) = \frac{1}{\alpha\pi\rho C_T^2} (\Psi \delta_{ij} - \chi r_{,i} r_{,j}) \quad (11)$$

여기서, r 는 착력점과 착목점의 거리이고, 2차원 동탄성 문제에서는

$$\begin{aligned} a &= 2 \\ \Psi &= K_0 \left(\frac{Sr}{C_T} \right) + \frac{C_T}{Sr} \left\{ K_1 \left(\frac{Sr}{C_T} \right) - \left(\frac{C_T}{C_L} \right) K_1 \left(\frac{Sr}{C_L} \right) \right\} \\ \chi &= K_2 \left(\frac{Sr}{C_T} \right) - \frac{C_T^2}{C_L^2} K_2 \left(\frac{Sr}{C_L} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

이며, K_0, K_1, K_2 는 제2종 수정 Bessel 함수⁽⁶⁾이다.

또한, 표면력의 기본해 P_{ij}^* 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} P_{ij}^*(Z, X, S) &= \rho \left[(C_L^2 - 2C_T^2) U_{im,n}^* n_j \right. \\ &\quad \left. + C_T^2 (U_{ij,k}^* + U_{ik,j}^*) n_k \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \left(\frac{d\Psi}{dr} - \frac{1}{r}\chi \right) \left(\delta_{ij} \frac{\partial r}{\partial n} + r_{,i} n_j \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{r}\chi (n_j r_{,i} - 2r_{,i} r_{,j} \frac{\partial r}{\partial n} - 2 \frac{\partial \chi}{dr} r_{,i} r_{,j} \frac{\partial r}{\partial n} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{C_L^2}{C_{K2}} - 2 \right) \left(\frac{d\Psi}{dr} - \frac{d\chi}{dr} - \frac{1}{r}\chi \right) r_{,i} n_j \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

2.2 동탄성문제의 적분방정식에서 특이항

먼저, 유한판에 대하여 생각하기로 하고, 식(9)를 식(8)에 대입하면 경계적분방정식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & - \int_{\Gamma} T_{ij}(Z, X) U_j(Z, S) d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma} P_{ij}^*(Z, X, S) U_j(X, S) d\Gamma \\ & = \int_{\Gamma} U_{ij}^*(Z, X, S) P_j(X, S) d\Gamma \\ & + \int_{\Omega} U_{ij}^*(Z, X_i, S) Q_j(X_i, S) d\Omega \end{aligned} \quad (14)$$

식(14)를 특이항으로 분리하면 다음식이 된다.

$$\begin{aligned} & \left[- \int_{\Gamma(z+x)} T_{ij}(Z, X) d\Gamma \right. \\ & \left. + \int_{\Gamma_s(z=x)} (P_{ij}^*(Z, X, S) - T_{ij}(Z, X)) d\Gamma \right] U_j(Z, S) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \int_{\Gamma(z+x)} P_{ij}^*(Z, X, S) U_j(X, S) d\Gamma \\ & = \int_{\Gamma} U_{ij}^*(Z, X, S) P_j(X, S) d\Gamma \\ & + \int_{\Omega} U_{ij}^*(Z, X_i, S) Q_j(X_i, S) d\Omega \end{aligned} \quad (15)$$

여기서, Γ_s 는 특이적분을 요하는 요소 즉, 착력점을 포함하는 요소를 의미하고, 유한판문제에서 동탄성 적분방정식의 특이항을 d_{ij}^d 라 하면 다음과 같다.⁽⁵⁾

$$\begin{aligned} d_{ij}^d &= - \int_{\Gamma(z+x)} T_{ij}(Z, X) d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_s(z=x)} \{ P_{ij}^*(Z, X, S) - T_{ij}(Z, X) \} d\Gamma \\ & = d_{ij}^s + \int_{\Gamma_s(z=x)} \{ P_{ij}^*(Z, X, S) - T_{ij}(Z, X) \} d\Gamma \end{aligned} \quad (16)$$

여기서, d_{ij}^s 는 정탄성문제의 특이항에 해당한다. 같은 방법으로 무한판문제의 특이항은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} d_{ij}^d &= \delta_{ij} - \int_{\Gamma(z+x)} T_{ij}(Z, X) d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_s(z=x)} \{ P_{ij}^*(Z, X, S) - T_{ij}(Z, X) \} d\Gamma \end{aligned} \quad (17)$$

식(16)과 (17)에서 $P_{ij}^*(Z, X, S) - T_{ij}(Z, X)$ 항은 특이성이 없으므로 적분은 특이적분이 아니다.⁽⁶⁾

2.3 Laplace역변환(Durbin의 수치역변환)⁽⁷⁾

Laplace 변환영역의 경계적분방정식의 해를 수치 역변환하는 과정은 Durbin⁽⁷⁾에 의해 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} f(t_j) &= \frac{2e^{a_j t_j}}{T} \left[-\frac{1}{2} \text{Re}\{F(a)\} \right. \\ & \left. + \text{Re}\left\{ \sum_{k=0}^{NSUM-1} F(S_k) \left(\cos k_j \frac{2\pi}{N} + i \sin k_j \frac{2\pi}{N} \right) \right\} \right] \end{aligned} \quad (18)$$

여기서, $t_j = jDt = jT/N$, ($j=0, 1, 2, \dots, N-1$), T 는 관심을 가지고 조사하려는 전 시간구간, N 는 총시간 분할수, L 은 계산정도를 높이기 위한 임의의 정수이고, $NSUM=L \times N$ 으로 Laplace영역(주파수영역)에서 계산해야 할 총 회수이다. 또한,

$$\begin{aligned} S_k &= a + ik \frac{2\pi}{T}, \\ F(S_k) &= \text{Re}\{F(S_k)\} \end{aligned}$$

$$+ iI_m\{F(S_k)\} \quad (19)$$

이고, Re 는 실수부, I_m 는 허수부를 의미한다.

식 (18)에서 $C(j) = e^{aj} \Delta t$, $W = \cos \frac{2\pi}{N} + i \sin \frac{2\pi}{N} = \exp(i \frac{2\pi}{N})$ 라 두면, 여기서, $W^{jk} = W^{j(k+IN)}$, ($l = 0, 1, 2, \dots, L-1$)이기 때문에 식 (18)은 다음과 같이 된다.

$$f(t_j) = \frac{2}{T} C(j) \left[-\frac{1}{2} Re\{F(a)\} + Re\left\{ \sum_{k=0}^{N-1} (A(k) + iB(k)) W^{jk} \right\} \right] \quad (20)$$

여기서,

$$A(k) = \sum_{l=0}^{L-1} Re\left\{ F(a + i(k+lN) \frac{2\pi}{T}) \right\}$$

$$B(k) = \sum_{l=0}^{L-1} Im\left\{ F(a + i(l(R+lN) \frac{2\pi}{T}) \right\} \quad (21)$$

이다.

2.4 2차원문제에서 경계상의 응력계산

2차원문제에서 2차요소의 형상함수 혹은 내삽함수를 사용하면 한 요소내의 좌표, 변위 및 표면력은 다음과 같이 표현된다.

$$x_i(\zeta) = \sum_{j=1}^3 \phi_j(\zeta) x_{ij}$$

$$u_i(\zeta) = \sum_{j=1}^3 \phi_j(\zeta) u_{ij} \quad (22)$$

$$p_i(\zeta) = \sum_{j=1}^3 \phi_j(\zeta) p_{ij}$$

표면력과 응력관계는 다음 관계가 있고,

$$p_i = \sigma_{ij} n_j \quad (23)$$

등방균질재료의 구성방정식은 다음과 같다.

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} u_{l,l} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (24)$$

또한, 경계(Γ)에 대한 변위의 미분은 다음 관계가 있다.

$$\frac{\partial u_i}{\partial \Gamma} = \frac{\partial u_i}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial \Gamma} = \frac{\partial u_i}{\partial \zeta} / \frac{\partial \Gamma}{\partial \zeta} \quad (25)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial \zeta} = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial \zeta} \quad (26)$$

식 (23), (24)과 (25)의 관계를 매트릭스형으로 표시하면

$$\begin{bmatrix} n_1 & 0 & n_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & n_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda - 2\mu & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & -\lambda - 2\mu \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\mu & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -n_2 & 0 & n_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -n_2 & 0 & n_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ u_{1,2} \\ u_{2,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_{1,r} \\ u_{2,r} \end{Bmatrix} \quad (27)$$

이 되고⁽⁶⁾, 식 (27)로부터 경계상의 응력을 구할 수 있다.

3. 수치해석 및 검토

수치해석에 사용한 2차원 Laplace변환 동탄성 경계요소법 프로그램은 2차요소를 사용하고, 표면력의 불연속점은 2중절점을 이용하였다. 그리고, 초기속도, 초기변위 및 체적력이 없는($b_i=0$) 것으로 하였다. Laplace역변환은 Durbin⁷⁾의 알고리즘을 이용하였고, 경계상의 응력도 계산 가능하게 하였다. 또한, 정탄성 문제의 해석도 NSUM=L×N=1일 때로 해석이 가능하다. 그리고, $S=a+i\omega$ 의 a 와 NSUM을 여러가지로 변경하여 계산해 본 결과 $a=6/T$, NSUM=40으로 계산하는 것이 적당한 것으로 생각되어지며 본 연구의 결과는 모두 이와 동일한 조건하에서 계산하였다. 본 논문에서는 밀도 $\rho=0.266 \times 10^{-4} \text{ N} \cdot \text{Sec}^2/\text{Cm}^4$, 영율 $E=0.7056 \times 10^6 \text{ N/Cm}^2$, 포와송 비 $\nu=0.34$ 인 알루미늄 재료에 대해 계산하였다. 또한, 하중 P_0 는 모두 1.0 N/Cm^2 으로 하였고, 사용한 컴퓨터는 PC386(연산처리속도: 33MHz)기종으로 12요소 문제를 계산하는데 걸린 시간은 약 1시간 정도이고 52요소인 경우는 약 15시간이 걸렸다. 균열문제에서 동적응력확대계수는 일반적인 정적상태의 균열 응력장의 식과 같은 형태⁽⁸⁾로 단지 응력확대계수가 시간의 함수로 다음과 같다.

$$\sigma_{ij}(r, \theta, t) = \frac{K_I(t)}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \quad (28)$$

본 연구의 동적응력확대계수에 대한 수치해석결과는 식 (28)의 동적응력확대계수를 변위의삼법을 이용하여 구하였다.

3.1 프로그램의 검증

먼저, 가장 단순한 모델로 무한판내의 반경이 1 Cm인 원공이 충격내압을 받는 경우를 평면응력상

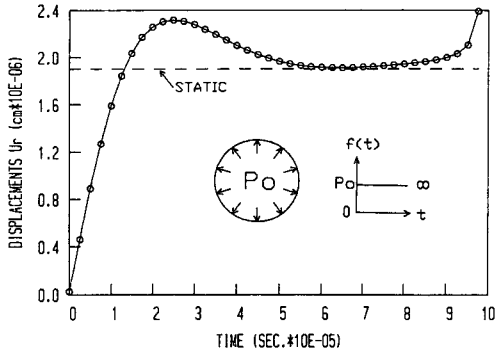


Fig. 1 Boundary radial displacements of the circular hole in the infinite plate subjected to an uniform impact pressure

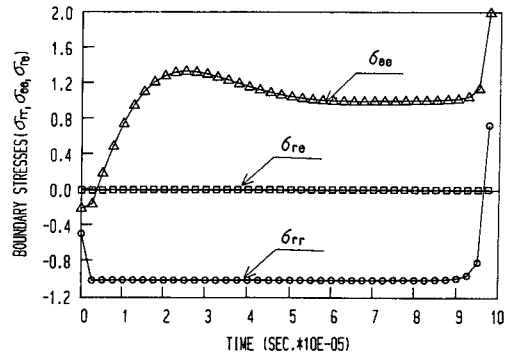


Fig. 2 Boundary stresses of the circular hole in the infinite plate subjected to a uniform impact pressure

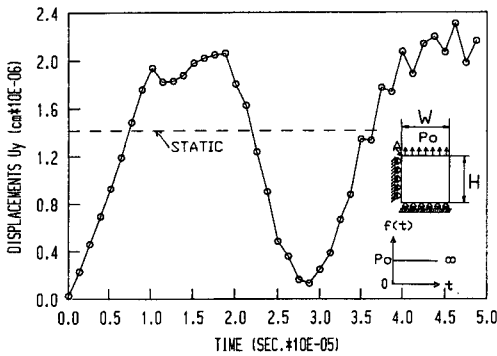


Fig. 3 Displacements of y direction at the point A in a rectangular plate subjected to a uniform impact tension

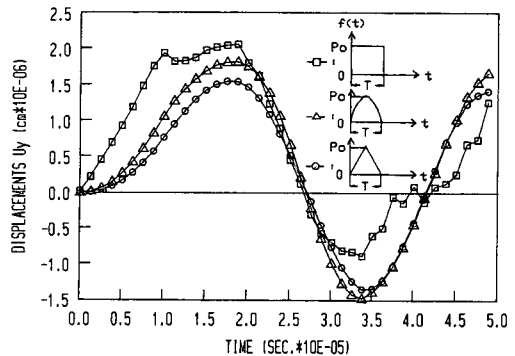


Fig. 4 Displacements of y direction at the point A in a rectangular plate subjected to various impulses

태하에서 해석하였다. Fig. 1은 원공 둘레를 12요소로 분할하여 과도기간 내의 짧은 시간동안의 원공 경계상에 있는 점의 반경방향의 변위 u_r 를 시간(t)에 대해 도시한 것이다. 무한 시간 일정하중 $p_0=1.0 \text{ N/Cm}^2$ 을 가한 경우의 결과로 정적상태의 변위보다 큰 부분이 나타나고 있다. Fig. 2는 같은 조건에서 경계상의 응력을 도시한 것으로 시간 영역법의 경계요소법에 의한 결과⁹⁾와 정성적으로 일치함을 알았다.

또한, 장방형 유한판이 충격인장응력을 받는 경우 대칭성을 고려하여 판의 1/4 ($H=4\text{Cm}, W=2\text{Cm}$)을 평면응력상태하에서 해석하였고, 총 요소를 12요소로 분할하였다. Fig. 3은 무한시간 일정하중을 가한 경우의 결과로 정적상태의 변위보다 큰 부분이 나타나고 있다. 그리고, 총시간 구간 (T)의 끝 부분에서는 오차가 크게 발생하고 있고 정도 개선상 이 문제는 좀더 검토되어야 할 부분으

로 생각되어 진다. Fig. 4는 충격량을 가한 것으로 충격 시간은 일정하게 하고, 형태를 장방형, sine형 및 삼각형의 3가지 형태로 변화시켜 본 결과이며, 형태에 따라 최고변위가 예상되어 지는 것과 같이 언급한 순서의 크기로 나타나고 있음을 보여 주고 있다.

3.2 균열의 충격해석에 응용

앞의 문제보다 응력해석상 어렵다고 생각되어지는 균열의 충격해석 문제에 응용하였다.

먼저, 중앙균열을 가진 판이 무한시간 균열면과 평행한 외부면에서 일정응력의 인장 하중을 받는 경우와 균열부에서 무한시간 일정내압을 받는 경우를 대칭성을 고려하여 판의 1/4 ($H=4\text{Cm}, W=2\text{Cm}, a/W=0.5$)을 총 52요소로 분할하여 평면변형을 상태하에서 해석하였다. Fig. 5, 6은 무한시간 균열면과 평행한 외부면에서 일정응력의 인장하중

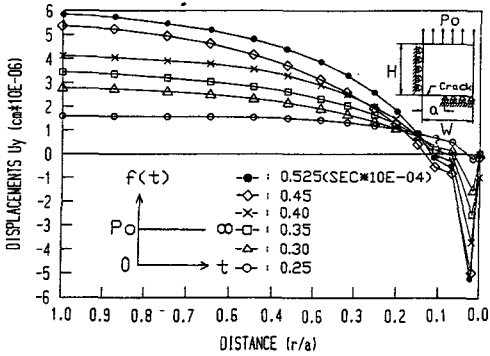


Fig. 5 Displacements of y direction of the crack surface in a plate with a central crack

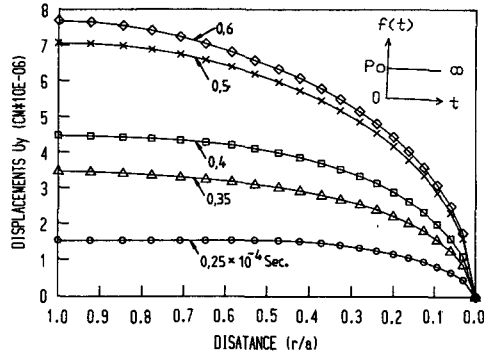


Fig. 6 Displacements of y direction of the crack surface in a plate with a central crack

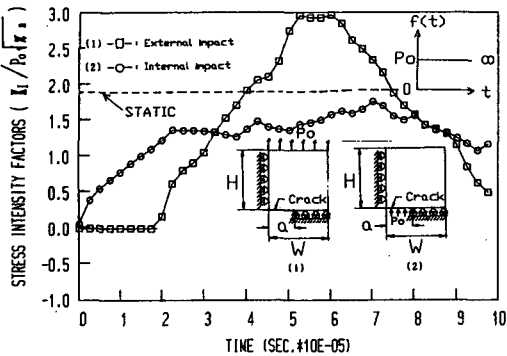


Fig. 7 Nondimensional stress intensity factors of a central crack in a plate subjected to an uniform tension against time

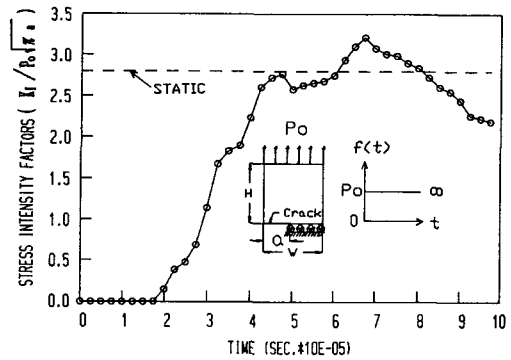


Fig. 8 Nondimensional stress intensity factors of an edge crack in a plate subjected to an uniform tension against time

을 받는 경우에 균열 전체면에서의 y 변위를 시간에 대해 도식한 것이다. Fig. 5는 정적문제에서 통상 사용하는 균열끝에서 특이요소를 사용한 것이고, Fig. 6은 특이요소를 사용하지 않은 결과이다. 그런데, Fig. 5에서 보면 균열 끝부분을 제외하고는 균열의 열림(u_y)가 시간에 따라 커지고 있어 유한차분법 및 유한요소법의 결과⁸⁾와 정성적으로 같은 결과이다. 균열 끝부근에서는 음(-)의 변위가 발생하여 물리적으로 이상한 결과가 나타나고 있다. 특이요소를 사용하지 않고 해석한 결과인 Fig. 6에서는 앞에서 발생한 균열 끝부분에서의 불합리한 결과가 없다. 이는 동탄성문제의 기본해가 특이성이 강한 해로서 특이요소를 사용하면 착력점과 착목점의 거리(r)가 너무 짧아지기 때문에 생기는 오차로 생각되어 진다. Fig. 7은 무한시간 균열면과 평행한 외부면에서 일정응력의 인장하중을 받는 경우(1)와 균열부에서 무한시간 일정내압을 받는 경우(2)의 중앙균열에 대해 변위외삽법을 이

용하여 구한 무차원 응력확대계수를 정적상태의 결과와 동시에 나타내고 있고, $K_0 = p_0 \sqrt{\pi a}$ 의 값으로 무차원화하였다. 초기의 응력확대계수의 형태를 보면 균열 내부압력을 받는 경우는 응력확대계수 값의 변화가 바로 생기고 외부에서 일정응력의 인장하중을 받는 경우는 어느 정도 시간이 경과한 후에 변화가 발생하고 있어 응력파의 전파시간이 걸리므로 생기는 타당한 현상으로 생각할 수 있고, 동적상태의 응력확대계수의 결과가 정적상태의 결과보다 크며 충격효과를 잘 표현하고 있음도 알 수 있다. Fig. 8은 편축균열을 가진 판이 무한시간 일정응력의 인장하중을 받는 경우를 대칭성을 고려하여 판의 $1/2$ ($H=4$ Cm, $W=2$ Cm, $a/W=0.5$)을 총 52 요소로 분할하여 평면변형을 상태하에서 해석하였다. Fig. 8에서 경계조건을 보면 동탄성 문제에서는 x 방향의 변위를 구속시키지 않고 있다. 정탄성 문제에서는 x 방향의 변위를 구속시키지 않으면 풀리지 않는데 동탄성문제는 x 방향의 변위를 구속시

키면 오히려 이상한 결과가 나타난다. 이것에 대한 정확한 원인은 설명할 수 없으나 적어도 경계요소법의 정탄성 문제에서와는 달리 동탄성 문제에서는 경계조건의 선택에 신중을 기해야 할 것으로 생각된다. Fig. 9는 양측균열을 가진 판이 앞의 경우와 같은 무한시간 일정응력의 인장하중을 받는 경우 대칭성을 고려하여 판의 1/4(H=4 Cm, W=2 Cm, a/W=0.5)을 총 52요소로 분할하여 평면변형 상태하에서 해석하였고, 정탄성 응력확대계수와 같이 나타난 것으로 편측균열의 응력확대계수가 큰 값으로 나타났다.

이번에는 내부에 균열을 가진 관(tube)이 내압을 받는 문제를 해석하여 보았다. Fig. 10은 내부에 양측 균열을 가진 관이 충격내압 P_0 를 받는 경우를 대칭성을 고려하여 관의 1/4($R_o=6$ Cm, $R_i=4$ Cm, $a/(R_o-R_i)=0.5$)을 총 52요소로 분할하고 평면변형 상태하에서 해석하여, 동적 무차원 응력확대

계수를 도시킨 것이다. 동적 무차원 응력 확대계수는 정적상태의 응력확대계수 값 $K_0=2P_0R_o^2\sqrt{\pi a}/(R_o^2-R_i^2)$ 으로 무차원화한 것이다. Fig. 11은 내부에 편측 균열을 가진 관을 대칭성을 고려하여 관의 1/2($D_o=12$ Cm, $D_i=8$ Cm, $a/(D_o-D_i)=0.25$)을 총 55요소로 분할하여 동적응력확대계수를 정탄성문제의 결과와 함께 나타낸 것이다. Fig. 11에서도 경계조건을 보면 y방향에 대해 비대칭 문제이므로 동탄성 문제에서는 Fig. 8과 같이 x 방향의 변위는 구속되지 않고 있다. 이 모델에 대해서는 Sladek등⁽¹⁰⁾이 재료와 요소분할을 다르게 하여 계산한 결과가 있으며 정성적으로는 유사하나 Sladek등의 결과는 분할요소가 너무 적어서 정도 상 문제가 있을 것으로 생각되어 진다.

마지막으로 충격실험에 많이 사용되는 균열을 가진 3점굽힘 시험편의 충격문제를 계산하여 보았다. 무한시간 일정응력의 삼각형(L/S=34.095)형상의

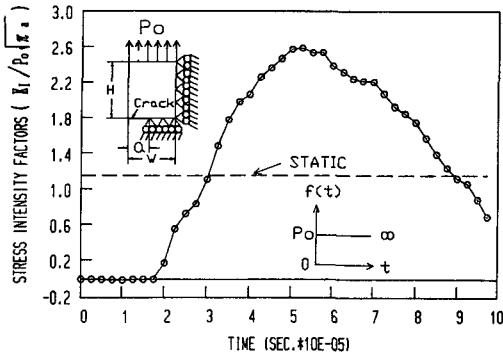


Fig. 9 Nondimensional stress intensity factors of double edge cracks in a plate subjected to an uniform tension against time

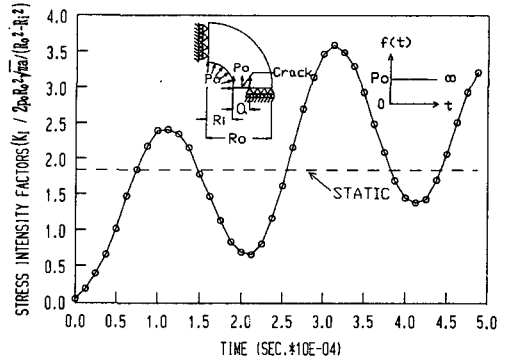


Fig. 10 Nondimensional stress intensity factors of double inner radial cracks in the tube subjected to an uniform impact pressure against time

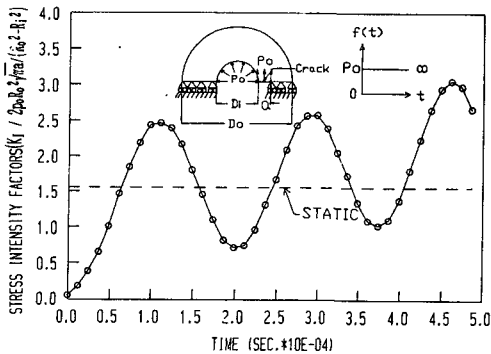


Fig. 11 Nondimensional stress intensity factors of a single inner radial crack in the tube subjected to an uniform impact pressure against time

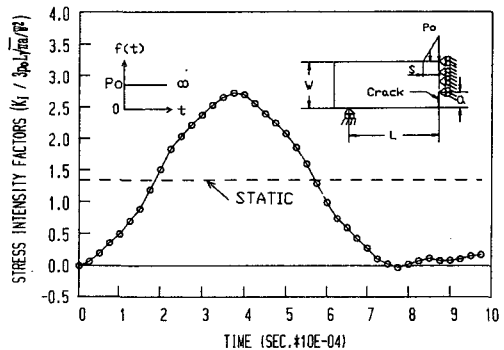


Fig. 12 Nondimensional stress intensity factors of three point bending test specimen with an edge crack subjected to impact load against time

분포하중을 받는 경우를 대칭성을 고려하여 판의 $1/2(L=4\text{ Cm}, W=2\text{ Cm}, a/W=0.5)$ 을 총 55요소로 분할하여 평면변형을 상태하에서 해석하였고, 분포하중의 총합이 $p_0=1.0\text{ N/Cm}^2$ 에 해당하도록 하였다. 동탄성 무차원 응력확대계수는 분포하중의 총합이 시편의 중앙에 집중하중으로 작용할 때의 응력확대계수 값 $K_0=3p_0L\sqrt{\pi a}/W^2$ 으로 무차원화하여 Fig. 12에 도시하였다. 이상의 균열문제의 수치해석에 요하는 계산시간은 52요소 전후의 요소인 경우에는 약 15시간 정도가 걸려, 요소수의 증가와 더불어 계산시간이 급격히 늘었다.

4. 결론

Laplace 변환법에 의한 2차원 동탄성 경계요소법 프로그램을 작성하여 충격하중을 받는 몇 가지의 단순한 모델과 균열 문제에 응용하여 수치해석한 결과에서 결론은 다음과 같다.

(1) 단순한 모델에서는 적은 요소수로도 과도기의 짧은 시간내에서는 정확한 충격해석이 가능함을 유한요소법 등과 같은 다른 방법에 의한 타 연구자의 결과와 각종 물리적 현상의 타당성 등으로 비교 검토한 결과에서 확인할 수 있었다.

(2) 균열문제와 같은 응력해석상 어려운 문제가 되면 분할요소수의 증가와 더불어 계산시간이 많이 걸렸고, 동탄성 문제의 기본해는 정탄성 문제의 기본해보다 특이성이 강하여 정탄성 균열 문제에서 응력확대계수의 해석에 널리 사용되는 특이요소는 동탄성 균열문제 해석에는 사용상 특이요소의 크기가 너무 작아져서 해석정도가 떨어지는 지에 대한 주의를 요한다.

(3) 동탄성 유한판 문제의 응력해석시에는 정탄성 문제와는 달리 경계조건 선택에 신중을 기해야 하며 경계의 응력파의 반사 영향으로 매우 복잡한 변형 및 응력이 발생함을 알 수 있었다.

(4) 균열의 충격문제에 대한 몇가지 모델의 동적 응력확대계수의 자료를 얻었고, 동적 파괴인성치를 구하는 실험등에 본 경계요소법 프로그램의 응용될 것으로 기대된다.

참고문헌

- (1) Eringen, A.C. and Suhubi, E.S., 1975, "Elastodynamics," Vols.1 and 2, Academic Press, New York.
- (2) Zukas, J.A., et al., 1982, "Impact Dynamics," John Wiley & Son.
- (3) Manolis, G.D. and Beskos, D.E., 1981 "Dynamic Stress Concentration Studies by Boundary Integrals and Laplace Transform," Int. J. Numer. Methods Eng., No.17, pp.573-599.
- (4) Manolis, G.D., 1983, "A Comparative Study on Three Boundary Element Method Approaches to Problems in Elastodynamics," Int. J. Numer. Methods Eng., No.19, pp.73~91.
- (5) Manolis, G.D. and Beskos, D.E., 1988, "Boundary Element Methods in Elastodynamics", Academic Division of Unwin Hyman Ltd.
- (6) Ahmad, S., 1986, "Linear and Nonlinear Dynamic Analysis by Boundary Element Method," Ph. D. thesis, State Univ. of New York at Buffalo.
- (7) Durbin, F., 1974, "Numerical Inversion of Laplace Transforms : an Efficient Improvement to Dubner and Abate's Method", Comp. J., Vol.17, No.4, pp.371~376.
- (8) Sih, G.C., 1977, "Mechanics of Fracture 4 : Elastodynamics crack problems", NOORDHOFF International Publishing, PP.249~345.
- (9) 山崎光悦, 森雅弘, 1989, "境界要素法による二次元動弾性問題の直接解法", 日本機械學會論文集(A編), 55卷519號, pp.2259~2265.
- (10) J.Sladek and V.Sladek, 1987, "A Boundary Integral Equation Method for Dynamic Crack Problems," Engng. Frac. Mech., Vol.27, No.3, pp. 269~277.