

〈論 文〉

회전 외팔보의 굽힘 진동해석

유 흥 희*

(1991년 11월 19일 접수)

Bending Vibration of Rotating Cantilever Beams

H.H. Yoo

Key Words : Bending Vibration(굽힘진동), Rotating Cantilever Beams(회전외팔보), Hybrid Deformation Variable Modeling (복합 변형변수를 이용한 모델링), Stiffness Variation(강성변화), Critical Angular Speed(임계 각속도), Critical Hub Radius Ratio(임계 축 반경비)

Abstract

When cantilever beams rotate about axes perpendicular to the undeformed beam's longitudinal axis, their bending stiffnesses change due to the stretching caused by centrifugal inertia forces. Such phenomena result in variations of natural frequencies and mode shapes associated with constant speed rotational motions of the beams. These variations are important in many practical applications such as helicopter blades, turbomachines, and space structures. This paper presents the formulation of a set of linear equations governing the lateral motion of rotating cantilever beams. These equations can be used to provide accurate predictions of the variations of natural frequencies and mode shapes due to rotation. This technique is simpler and more consistent than other conventional techniques which are commonly used in the literature.

1. 서 론

회전하는 외팔보 형태를 가진 공학적 예제는 터빈 블레이드, 헬리콥터 회전익, 그리고 인공위성의 안테나 등에서 발견할 수 있다. 이러한 예제들의 작동 성능은 그들의 동적 특성과 밀접히 연관되어 있으므로 그것을 파악하는 일은 긴요한 일이라 할 수 있다.

회전하는 외팔보의 동적특성은 고정되어 있는 외팔보의 그것과는 다르다. 회전 운동은 원심력을 발생시켜 외팔보의 강성변화를 가져오고 이는 다시 고유진동 특성 변화로 연계된다. 따라서 이러한 진동 특성 변화를 예측하기 위한 이론적 정립이 필요

하게 된다.

회전하는 외팔보의 진동특성 연구는 일찍부터 시작되었다. 알려진 바에 따르면 이에 관한 연구는 1920년대 초 영국의 학자 Southwell에 의해 개척되었으며⁽¹⁾ 그후 Liebers⁽²⁾와 Theodorsen⁽³⁾과 같은 사람들에 의해 계승되었다. 이들 연구에서는, 현재 까지 많이 쓰이고 있는 소위 Southwell 방정식을 Rayleigh Energy Theorem에 의거하여, 회전하는 외팔보의 총 운동에너지는 탄성에너지와 원심운동에 의한 운동에너지의 합이라는 관계로부터 유도하였다. 1950년대에 들어와 헬리콥터의 블레이드 진동에 관한 연구가 활발해 지면서 초기의 연구와는 달리 운동을 지배하는 편미분 방정식을 직접 유도하여 이로부터 Ritz 방법을 통해 Southwell 방정식의 상수값을 구하는 연구가 진행되었으며 참고문

*정회원, 한국항공우주연구소

현(4~6)은 현재까지도 자주 인용되어지고 있다. 1960년대와 70년대를 거치며 전산기의 눈부신 발전과 이에따른 수치해석법의 발전에 따라 종래의 해석적 방법에서 벗어나 수치적인 방법으로 문제의 해결에 접근하려는 연구결과들이^(7,8) 나타나게 되었다. 이러한 연구들은 근본적으로 회전에 의한 원심력을 우선 구한후 이를 다시 보의 비선형 변위율에 근거한 탄성에너지 형태에 대입함으로써 탄성에너지 형태를 정방형화하여 강성항을 구하는 방법을 사용하고 있다. 이러한 방법은 유도과정이 복잡하고 일관성이 부족하여 일반 엔지니어들이 쉽게 이해하고 사용하는데 어려움을 갖는 단점을 가지고 있다.

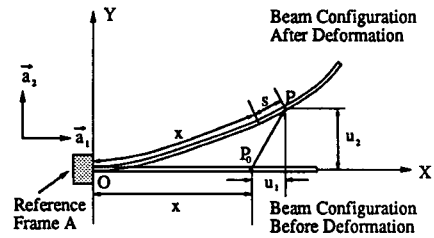
본 논문은 기존의 방식들의 단점들을 극복할 수 있고 회전하는 외팔보의 굽힘 진동 특성을 효과적으로 정확하게 예측할 수 있는 일관성 있고 간명한 방법을 제시하는 것을 목적으로 한다. 참고문헌(9~11)에서는 회전하는 외팔보의 선형 운동방정식을 복합 변형변수를 이용하여 구하고 있는데 이러한 동적모델링은 참고문헌(4~8)에서와 같은 불필요한 원심력의 내재적 대입과정을 통한 2단계 운동방정식 유도를 피할 수 있어 과정의 일관성과 간명성을 제공할 수 있음을 보였다. 본 연구에서는 이들 연구 결과에 근거하여 진동해석을 위한 방법을 제공하고 결과를 도출 분석 비교하는 것을 그 내용으로 한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 서론에 이어 2장에서는 회전하는 외팔보의 동적특성을 대표할 운동방정식을 구하는 과정을 보이고, 이에 근거한 무차원 진동 방정식의 유도과정과 모드해석 Formulation 과정을 보여준다. 3장에서는 2장에서 유도된 Formulation에 근거하여 해석을 실시하여 결과를 보이고 이를 토의하였다. 마지막 장인 결론 부분에서는 논문 전체내용을 요약하고 중점을 강조하였다.

2. 진동방정식 유도

2.1 운동방정식

이 절에서는 복합변형 변수를 이용한 동적 모델링에 의한 운동방정식 유도과정을 간략히 소개하기로 한다. 이에 관한 상세한 내용은 참고문헌(11)을 참조할 수 있다. 본 연구에서는 과정의 간명성을 유지하고 외팔보의 회전에 의한 관성력효과와



A generic point P_0 goes to P after deformation.

Fig. 1 Configuration of a cantilever beam

그에 의한 진동 특성 변화에 초점을 맞추기 위해 다음의 가정들을 전제하였다. 첫째, 외팔보의 단면은 일정하고 대칭이며 재질은 균질(homogeneous)하고 등방성(isotropic)이다. 둘째, 전단 효과와 회전 관성효과(rotary inertia effect)는 고려하지 않았다. 셋째, 해석은 회전 평면내의 굽힘방향으로만 실시하고 회전평면의 수직방향이나 비틀림 방향으로서는 실시하지 않았다. 이러한 가정들은 거의 어려움 없이 해제시킬 수 있고 앞으로 추가 연구되어질 수 있는 부분들이다.

Fig. 1은 회전 외팔보의 탄성변위들의 의미와 기준 좌표계를 나타내고 있다. \vec{a}_1 과 \vec{a}_2 는 기준계(reference frame) A에 부착된 단위 벡터들을 나타내며, 외팔보의 변형전 임의의 질점(Generic Point) P_0 는 변형후 P의 위치로 움직인다. u_1 과 u_2 는 P점의 \vec{a}_1 과 \vec{a}_2 방향 직교 탄성변위를 각각 나타낸다. 변형전 0점으로부터 x 만큼 떨어진 P_0 는 변형 후 $x+s$ 의 길이를 갖는 P의 위치로 이동하게 되며, 따라서 s 는 늘어난 길이를 나타낸다. 기준계 A의 각속도와 점 0의 속도를 각각 $\vec{\omega}^A$ 와 \vec{v}^0 로 표시하고 이들을 스칼라 양들을 사용하여 단위벡터 \vec{a}_1 , \vec{a}_2 그리고 \vec{a}_3 에 관해 표시하면

$$\vec{\omega}^A = \omega_3 \vec{a}_3 \quad \vec{v}^0 = v_1 \vec{a}_1 + v_2 \vec{a}_2 \quad (1)$$

여기서 \vec{a}_3 는 \vec{a}_1 , \vec{a}_2 와 오른손 법칙에 따라 직교를 이루는 단위 벡터이다. 질점 P의 속도를 \vec{v}^P 로 표시하면

$$\vec{v}^P = [v_1 + \dot{u}_1 - \omega_3 u_2] \vec{a}_1 + [v_2 + \dot{u}_2 + \omega_3(x + u_1)] \vec{a}_2 \quad (2)$$

여기서 변수 위에 있는 $(\dot{\cdot})$ 점은 시간에 관한 미분을 나타낸다. 복합 변형변수를 이용한 동적 모델링에서는 u_1 대신에 s 를, u_2 와 함께, 다음과 같이 근사화(approximation) 한다.

$$s(x, t) = \sum_{j=1}^{\mu_1} \phi_{1j}(x) q_{1j}(t)$$

$$u_2(x, t) = \sum_{j=1}^{\mu_2} \phi_{2j}(x) q_{2j}(t) \quad (3)$$

여기서 ϕ_{1j} 와 ϕ_{2j} 는 s 와 u_2 를 위한 가상모드 (assumed modes) 들이고, q_{1j} 와 q_{2j} 는 s 와 u_2 를 위한 일반화좌표 (generalized coordinates)이며, μ_1 과 μ_2 는 q_{1j} 와 q_{2j} 의 갯수이다. u_1 대신 s 를 근사화하므로 식 (2)에 나타난 u_1 및 그의 시간에 관한 미분값은 모두 s 와 u_2 로 표시 되어야 하므로, u_1 과 s 및 u_2 사이의 관계식이 필요하며 그것은 다음과 같다(참고문헌 (12) 참조).

$$x + s = \int_0^x \left[\left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial \sigma} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial \sigma} \right)^2 \right]^{1/2} d\sigma \quad (4)$$

Kane의 방법을⁽¹³⁾ 따른 운동방정식 형태는

$$\int_0^L \rho \left(\frac{\partial \dot{v}^p}{\partial \dot{q}_i} \right) \cdot \frac{d\dot{v}^p}{dt} dx + \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (i=1, \dots, \mu) \quad (5)$$

여기서 ρ 와 L 은 보의 단위 길이당 질량과 길이를 각각 의미하며 q_i 는 q_{1i} 와 q_{2i} 로 이루어지며 μ 는 일반화좌표의 총 갯수로 μ_1 과 μ_2 의 합이다. 또한 U 는 보의 탄성 에너지로 다음과 같이 표시된다.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EA \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (6)$$

여기서 E 는 영의계수, A 는 보의 단면적, I 는 보의 2차 면적 모멘트를 나타낸다. 회전 외팔보의 운동방정식은 이상의 과정을 종합하여 다음과 같이 유도될 수 있다.

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\mu_1} \left[\left(\int_0^L \rho \phi_{1i} \phi_{1j} dx \right) \dot{q}_{1j} - \omega_3^2 \left(\int_0^L \rho \phi_{1i} \phi_{1j} dx \right) q_{1j} \right. \\ & \left. + \left(\int_0^L EA \phi_{1i,x} \phi_{1j,x} dx \right) q_{1j} \right] \\ & - \sum_{j=1}^{\mu_2} \left[2\omega_3 \left(\int_0^L \rho \phi_{1i} \phi_{2j} dx \right) \dot{q}_{2j} \right. \\ & \left. + \dot{\omega}_3 \left(\int_0^L \rho \phi_{1i} \phi_{2j} dx \right) q_{2j} \right] \\ & = \omega_3^2 \int_0^L \rho x \phi_{1i} dx - (\dot{v}_1 - \omega_3 v_2) \\ & \int_0^L \rho \phi_{1i} dx \quad (i=1, \dots, \mu_1) \quad (7) \\ & \sum_{j=1}^{\mu_2} \left[\left(\int_0^L \rho \phi_{2i} \phi_{2j} dx \right) \dot{q}_{2j} - \omega_3^2 \left(\int_0^L \rho \phi_{2i} \phi_{2j} dx \right) q_{2j} \right. \\ & \left. + \left(\int_0^L EI_{zz} \phi_{2i,xx} \phi_{2j,xx} dx \right) q_{2j} \right] \\ & - \sum_{j=1}^{\mu_2} \left[\left(\dot{v}_1 - \omega_3 v_2 \right) \left(\int_0^L \rho (L-x) \phi_{2i,x} \phi_{2j,x} dx \right) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left. - \omega_3^2 \left(\int_0^L \frac{\rho}{2} (L^2 - x^2) \phi_{2i,x} \phi_{2j,x} dx \right) \right] \dot{q}_{2j} \\ & + \sum_{j=1}^{\mu_1} \left[2\omega_3 \left(\int_0^L \rho \phi_{2i} \phi_{1j} dx \right) \dot{q}_{1j} \right. \\ & \left. + \dot{\omega}_3 \left(\int_0^L \rho \phi_{2i} \phi_{1j} dx \right) q_{1j} \right] \\ & = -\dot{\omega}_3 \int_0^L \rho x \phi_{2i} dx - (\dot{v}_2 + \omega_3 v_1) \\ & \int_0^L \rho \phi_{2i} dx \quad (i=1, \dots, \mu_2) \quad (8) \end{aligned}$$

여기서 $\phi_{1i,x}$ 와 $\phi_{2i,x}$ 는 ϕ_{1i} 와 ϕ_{2i} 의 x 에 관한 미분을 각각 나타내며, $\phi_{2i,xx}$ 는 x 에 관해 두번 미분한 경우를 나타낸다.

2.2 진동방정식

회전 외팔보의 경우 인장방향 모드에 의한 진동수는 굽힘모드에 의한 진동수에 비해 훨씬 높다. 따라서, 이 두 방향 모드들은 서로 거의 간섭 효과를 가지지 않는다는 가정하에, 식 (8)만을 사용하여 굽힘 진동해석을 실시한다.

Fig. 2에서 반경이 r 이고 회전각속도 Ω 인 축에 부착된 외팔보의 경우 기준점 0의 속도벡터의 \vec{a}_1 과 \vec{a}_2 방향 스칼라 구성요소들은 다음과 같다.

$$v_1 = 0 \quad v_2 = r\Omega \quad (9)$$

인장방향 운동에 의한 간섭효과를 무시하는 가정과 식 (9)를 이용하여, 회전각속도가 일정한 정상상태 (Steady State)에 관해 식 (8)을 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\mu_2} \left[\left(\int_0^L \rho \phi_{2i} \phi_{2j} dx \right) \dot{q}_{2j} \right. \\ & \left. + \left(\int_0^L EI_{zz} \phi_{2i,xx} \phi_{2j,xx} dx \right) q_{2j} \right. \\ & \left. + \Omega^2 \left\{ - \int_0^L \rho \phi_{2i} \phi_{2j} dx \right. \right. \\ & \left. \left. + r \int_0^L \rho (L-x) \phi_{2i,x} \phi_{2j,x} dx \right\} \right] \end{aligned}$$

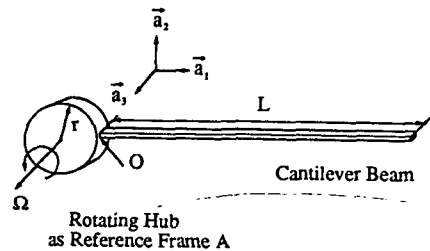


Fig. 2 Cantilever beam attached to a rotating hub

$$+ \int_0^L \frac{\rho}{2} (L^2 - x^2) \phi_{2i,x} \phi_{2j,x} dx \Big\} q_{2j} = 0$$

$$(i=1, \dots, \mu_2) \tag{10}$$

식 (10)을 무차원화된 진동방정식으로 변환시키기 위해 다음과 같은 무차원 변수들을 정의한다.

$$\tau \triangleq \frac{t}{T}$$

$$x \triangleq \frac{x}{L} \tag{11}$$

$$\vartheta_j \triangleq \frac{q_{2j}}{L}$$

여기서

$$T = \left(\frac{\rho L^4}{EI} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{12}$$

식 (11, 12)를 이용하면 식 (10)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sum_{j=1}^{\mu_2} \left[\int_0^1 \phi_{2i} \phi_{2j} dx \ddot{\vartheta}_j + \int_0^1 \phi_{2j,xx} \phi_{2i,xx} dx \vartheta_j \right. \\ \left. + \hat{\omega}^2 \left\{ - \int_0^1 \phi_{2i} \phi_{2j} dx + \delta \int_0^1 (1-x) \phi_{2i,x} \phi_{2j,x} dx \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x^2) \phi_{2i,x} \phi_{2j,x} dx \right\} \vartheta_j \right] = 0$$

$$(i=1, \dots, \mu_2) \tag{13}$$

여기서 ϕ_{2i} 는 ϕ_{2i} 와 동일한 함수값을 가지나 x 의 함수이며, 점 (\cdot)은 이제 τ 에 관한 미분을 나타낸다. 또한

$$\delta \triangleq \frac{r}{L} \quad \omega \triangleq T \Omega \tag{14}$$

식 (13)으로부터, 운동 방정식 강성항 변화에 관련된, 축반경의 (δ) 증가와 회전 각속도의 ($\hat{\omega}$) 증가에 의한 영향을 무차원화된 형태로 살펴볼 수 있다.

식 (13)으로부터 ϑ_j 들이 조화함수 (harmonic function)라는 가정으로부터, ϑ_j 로 이루어진 Column 벡터 $\underline{\vartheta}$ 는, 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\underline{\vartheta} = e^{j\omega\tau} \underline{\xi} \tag{15}$$

여기서 ω 는 고유진동수에 T 를 곱한 무차원 변수이며 $\underline{\xi}$ 는 각 모드형상을 대표하는 Column 벡터이다. 식 (15)를 이용하여 식 (13)을 정리하면,

$$\omega^2 M \underline{\xi} = K \underline{\xi} \tag{16}$$

여기서 M 과 K 는 크기를 ($\mu_2 \times \mu_2$) 갖는 정방 행렬 (square matrices) 들로 그 요소들은 다음과 같이

표시된다.

$$M_{ij} = \int_0^1 \phi_{2i} \phi_{2j} dx \tag{17}$$

$$K_{ij} = \int_0^1 \phi_{2i,xx} \phi_{2j,xx} dx \\ + 2 \left\{ - \int_0^1 \phi_{2i} \phi_{2j} dx + \delta \int_0^1 (1-x) \phi_{2i,x} \phi_{2j,x} dx \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x^2) \phi_{2i,x} \phi_{2j,x} dx \right\} \tag{18}$$

3. 해석결과

3.1 해석결과 설명

본 논문에서는 회전이 없는 외팔보의 굽힘 진동 특성함수 (eigenfunctions) 들을 가상 모드 (assumed modes)로 사용하여 해석을 수행하였다. Table 1은 보의 각속도가 매우 빠른 경우 모드수의 증가에 따른 고유진동수들의 수렴현상을 ($\hat{\omega}=100$ 일 때) 보여주고 있다. 표에서, 모드수의 증가에 따라 고유진동수들이 신속히 수렴에 도달하는 것을 볼 수 있으며 모드수가 9개 일때와 10개 일때는 서로 0.1% 정도의 오차를 보여주고 있다. 본 논문에서는 이를 해의 충분한 수렴으로 간주하여, 이후의 결과를 얻기 위해 모두 10개의 모드들을 이용하여 수치해석을 수행하였다.

Fig. 3은 고유진동수가 회전각속도에 따라 변화되는 것을 보여주며, 가장 낮은 세개의 고유진동

Table 1 Natural frequency convergence ($\delta=1$, $\hat{\omega}=100$)

Modes No.	First Freq.	Second Freq.	Third Freq.
1	132.87	*****	*****
2	129.12	377.78	*****
3	126.39	375.48	651.43
4	125.32	365.25	632.12
5	124.52	365.23	602.92
6	124.06	362.76	600.98
7	123.69	362.62	592.96
8	123.43	361.66	592.79
9	123.22	361.50	589.90
10	123.06	361.03	589.90

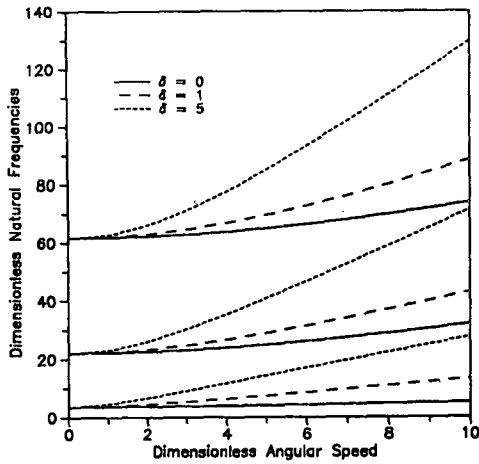


Fig. 3 Natural frequency variation vs. angular speed

수가 나타나 있다. 여기서 보듯이 고유진동수는 외팔보의 각속도가 증가할수록 증가하며, 축반경의 증가는 이러한 증가율을 가속시킨다. 이러한 현상은 직관적으로 예측될 수 있는 것이다.

3.2 이전 연구 결과와의 비교

본 절에서는 본 논문에서 소개한 방법에 의해 구해진 수치해석 결과들의 정확성과 신뢰성을 검증하기 위해 참고문헌(6, 7)에 의한 결과들을 인용한다. 참고문헌(6)은 Southwell 방정식에 의한 결과들을, 참고문헌(7)은 유한요소법에 근거하여 구해진 결과들을 제공하고 있다. Table 2와 3은 회전 속도 및 반경의 증가에 따른 첫번째 및 두번째 고유 진동수의 변화를 보여 주고 있는데, 회전 속도가 낮은 영역에서는 세가지 방법들이 적은 상대적 오차를 보이고 있으며 회전속도가 커짐에 따라 오차가 증가함을 볼 수 있다. 그러나 본 논문의 결과는 비교적 최근 발표된 참고문헌(7)의 결과와 거의 일치하는 것을 보여 주고 있으며, 높은 회전속도와 ($\omega=50$) 큰 축반경($\delta=5$) 하에서도 0.3% 이내의 편차를 보이고 있어, 그 정확성 및 신뢰성을 입증하고 있다.

3.3 임계 각속도와 임계 축 반경비

회전시 외팔보의 각속도와 고유진동수가 만일 일치한다면 이는 공진현상을 야기하게 되며, 본 논문에서는 이 각속도를 임계 각속도(critical angular speed)라 부르기로 한다. Fig. 4는 $\delta=0$ 일때 첫째

Table 2 Comparison of the first natural frequency

	$\omega=2$	$\omega=10$	$\omega=50$
Present Work $\delta=0$	3.61	5.05	10.76
Reference (7)	3.61	5.05	10.48
Reference (6)	3.61	5.45	21.09
Present Work $\delta=1$	4.40	13.26	61.83
Reference (7)	4.40	13.26	61.64
Reference (6)	4.39	13.62	65.88
Present Work $\delta=5$	6.65	27.74	136.03
Reference (7)	6.65	27.73	135.65
Reference (6)	6.65	28.44	141.14

Table 3 Comparison of the second natural frequency

	$\omega=2$	$\omega=10$	$\omega=50$
Present Work $\delta=0$	22.53	32.12	116.34
Reference (7)	22.53	32.12	116.20
Reference (6)	22.52	31.99	118.05
Present Work $\delta=1$	23.28	43.23	182.28
Reference (7)	23.28	43.23	181.94
Reference (6)	23.27	43.44	188.45
Present Work $\delta=5$	26.07	71.41	332.83
Reference (7)	26.07	71.39	332.03
Reference (6)	26.07	73.07	349.03

고유진동수가 회전 각속도와 일치하는 점을 나타내고 있다. 이 그림은 또한 $\delta=1$ 일 경우나 $\delta=5$ 일 경우 이러한 임계 각속도가 존재 할 수 없음을 동시에 보여 주고 있다. 따라서 어느값 이상의 δ 에서는 임계 각속도가 존재하지 않음을 추론할 수 있으며 이 값을 임계 축 반경 비(critical hub radius ratio)라 부르기로 한다.

Table 4에는 본 방법에 의해 구해진 δ 의 변화에 따른 임계 각속도와 Southwell 방정식에 의한 결과를 비교하고 있다. 작은 값의 δ 에서는 두 결과가 적은 오차로 가까운 값을 가지나 δ 값의 증가에

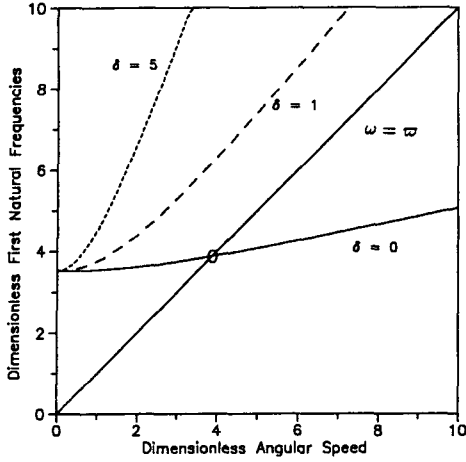


Fig. 4 Critical angular speed vs. hub radius ratio

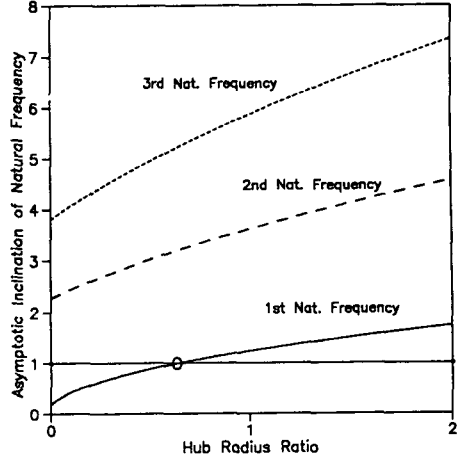


Fig. 5 Asymptotic inclination vs. hub radius ratio

따라 오차가 증가하는 것을 보여주고 있다. 임계 축 반경비를 구하기 위해서는 다음의 방법을 사용할 수 있다. 앞에서 언급되었듯이 임계 각속도가 존재하기 위해서는 고유진동수가 회전각속도와 일치해야 하므로 그래프상에서 $w = \hat{\omega}$ 가 되는 직선이 Fig. 3에 나타난 선들과 만나야 한다. 이것이 가능하기 위해서는 $\hat{\omega}$ 가 큰 값이 될 때 그림 3에 나타난 선들의 점근선의 증가 기울기가 1보다 작아야 한다. 식 (18)에서 $\hat{\omega}$ 가 ∞ 로 갈 때 우편항들 중 첫째 항은 다른항들에 비해 무시할 수 있게 되며 식 (16)은 다음과 같이 정리될 수 있다.

$$\lambda^2 M \xi = \tilde{K} \xi \tag{19}$$

여기서

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{ij} &\triangleq - \int_0^1 \psi_{2i} \psi_{2j} dx \\ &+ \delta \int_0^1 (1-x) \psi_{2i,x} \psi_{2j,x} dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x^2) \psi_{2i,x} \psi_{2j,x} dx \end{aligned} \tag{20}$$

$$\lambda \triangleq \frac{w}{\hat{\omega}} \tag{21}$$

위에서 λ 는 Fig. 3에서 $\hat{\omega}$ 가 ∞ 로 갈 때 점근선의 기울기를 나타낸다. λ 의 정의로부터, $\lambda=1$ 일 때 $w = \hat{\omega}$ 가 되므로 식 (19)로부터 $\lambda=1$ 이 되는 δ 값을 구하면 임계 축 반경비를 구할 수 있다

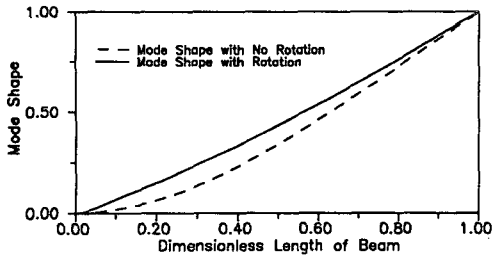
Fig. 5는 δ 의 증가에 따른 λ 의 변화를 (점근선의 기울기) 가장 낮은 세개의 고유 진동수에 대해 나타내고 있다. 정확히 $\delta=0.6554$ 일때 첫째 고유진동수에 해당하는 λ 값은 1이 되며 따라서 임계 축 반경비는 0.6554이다. 그러나 두번째와 세번째의 고유진동수에 해당하는 λ 값들은 항상 1보다 그 값이 크므로 임계 축 반경비가 존재하지 않음을 알 수 있다.

Table 4 Critical angular speed vs. hub radius ratio

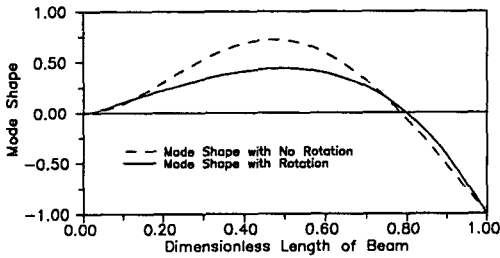
δ	Present ($\hat{\omega}_{cr}$)	Southwell ($\hat{\omega}_{cr}$)	Error (%)
0.0	3.8774	3.8663	0.29
0.1	4.2934	4.2916	0.04
0.2	4.8687	4.8975	0.59
0.3	5.7298	5.8633	2.33
0.4	7.1891	7.7884	8.34
0.5	10.2827	16.0483	56.07
0.6	22.0696	*****	*****

3.4 회전에 의한 모드 변화

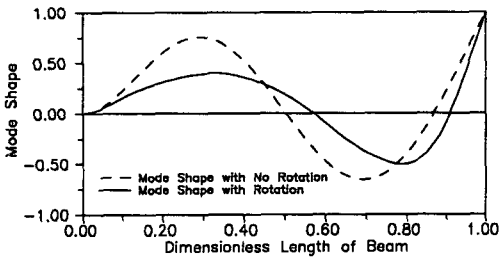
모드의 형태 특히 절점 (Nodes)이나 반절점 (Antinodes)의 위치는 진동제어를 목적으로 하는 경우 상당한 중요성을 가질 수 있다. Fig. 6에는 $=100$, $\delta=1$ 일 때 세번째 모드까지의 회전에 의한 모드 형태와 절점 위치 변화를 보여 주고 있다. 두번째 모드의 경우 절점의 위치는 보 전체길이의 2%까지 바깥으로 이동하고 있으며 세번째 모드의



(a) First mode shape variation



(b) Second mode shape variation



(c) Third mode shape variation

Fig. 6 Variations of first three mode shapes

경우는 뿌리 부분에서 본 첫째 절점과 둘째 절점이 각각 7%와 4% 바깥으로 이동하는 위치 변화를 보여주고 있다. 이러한 변화들은 회전관성에 의해 모드 형태가 바깥방향으로 인장되는 현상이라 판단되어진다.

4. 결론

회전하는 외팔보의 진동특성을 예측하기 위한 진동 방정식이 유도되었으며 이를 근간으로 해석 결과를 도출하였다. 해석 결과는 회전 속도의 증가에 따른 외팔보의 진동수 증가를 보여주었고 축 반경의 증가에 따라 이 현상이 가속화되는 것을 보여 주었다. 한편 기존의 수치해석 결과들과의 비교연구는

본 논문에서 제시된 방법의 신뢰성과 정확성을 확인시켜 주었다. 본 연구에서는 또한 회전 각속도와 고유 진동수가 일치하는 임계 각속도와 임계 축 반경비의 존재를 정량적으로 도출하였으며 회전에 따른 모드형태의 변화를 조사하여 고속회전시 절점 위치의 상당한 변화를 확인하였다. 본 논문에서 제시한 방법은 기존의 방법들에 비해 유도과정의 일관성과 최종 진동방정식의 간명성을 그 장점으로 한다. 따라서 관련분야의 현장 엔지니어가 쉽게 이해하고 응용하여 쓸 수 있을 것으로 판단된다.

참고문헌

- (1) Southwell, R. and Gough, F., 1921, "The Free Transverse Vibration of Airscrew Blades," British A.R.C. Reports and Memoranda No. 766.
- (2) Liebers, F., 1930, "Contribution to the Theory of Propeller Vibrations," NACA TM No. 568.
- (3) Theodorsen, T., 1935, "Propeller Vibrations and the Effect of Centrifugal Force," NACA TN No. 516.
- (4) Schilhansl, M., 1958, "Bending Frequency of a Rotating Cantilever Beam," J. of Appl. Mech. Trans. Am. Soc. Mech. Engrs, 25, pp. 28~30.
- (5) Carnegie, W., 1959, "Vibrations of Rotating Cantilever Blading : Theoretical Approaches to the Frequency Problem Based on Energy Methods," J. Mech. Engng Sci., 1, pp. 235~240.
- (6) Yntema, R., 1955, "Simplified Procedures and Charts for the Rapid Estimation of Bending Frequencies of Rotating Beams," NACA 3459.
- (7) Putter, S. and Manor, H., 1978, "Natural Frequencies of Radial Rotating Beams," J. Sound and Vibration, 56, pp. 175~185.
- (8) Bhat, R., 1986, "Transverse Vibrations of a Rotating Uniform Cantilever Beam with Tip Mass as Predicted by Using Beam Characteristic Orthogonal Polynomials in the Rayleigh-Ritz Method," J. Sound and Vibration, 105(2), pp. 199~210.
- (9) Kane, T., Ryan, R. and Banerjee, A., 1987, "Dynamics of Cantilever Beam Attached to a Moving Base," J. Guidance, Control, and Dynamics, 10, pp. 139~151.

- (10) Ryan, R. and Yoo, H., 1989, "Element-specific Modal Formulations for Large Displacement Multibody Dynamics," Third Annual NASA/DOD CSI Technology Conference, San Diego, California.
- (11) 유흥회, 1991, "회전 구조물의 복합 변형변수를 이용한 선형 동적 모델링", 한국항공우주학회지, 제19권, 제3호, pp. 32~39.
- (12) Eisenhart, L., 1947, An Introduction to Differential Geometry, Princeton University Press.
- (13) Kane, T. and Levinson, D., 1985, Dynamics : Theory and Applications, McGraw-Hill Book Co., New York, N.Y.