

〈論 文〉

전기유압 속도제어 시스템의 궤환 선형화 및 이에 대한 디지털 상태 궤환 제어의 구현

김영준* · 장효환**

(1991년 11월 6일 접수)

Feedback Linearization of an Electro-Hydraulic Velocity Control System and the Implementation of the Digital State Feedback Controller

Young Jun Kim and Hyo Whan Chang

Key Words : Nonlinear Transformation(비선형 변환), Feedback Linearization(궤환 선형화), State Feedback Control(상태 궤환 제어), State Estimator(상태 추정기), Global Transformation(전체적 변환), Brunovsky Canonical Form(Brunovsky 표준형)

Abstract

In this paper the feedback linearization of the valve-controlled nonlinear hydraulic velocity control system and the implementation of the digital state feedback controller is studied. The C^∞ nonlinear transformation to the electro-hydraulic velocity control system, which transforms nonlinear system to linear equivalent one, is obtained. It is shown that this transformation is global one. The digital controller to this linearized model is obtained by using the one-step ahead state estimator and implemented to real plant. The proposed implementation method is easier than the other proposed methods and it is possible to control in real time. The experiment and simulation study show that the implementation of the digital state feedback controller based on the feedback linearized model is successful.

기 호 설 명

$(ad^h F, G)$: 연속적 Lie 괄호(successive Lie bracket)

B_m, B_0, B_1, B_2 : 모터의 점성 감쇠계수

C_{tm}, C_0, C_1 : 총 누설계수

C_v : 유량계수

C^∞ : 해석적(analytic or smooth)

D_m : 모터의 밀어적힘 용적

$[F, G]$: Lie 괄호

h : 샘플링 시간

I : 토크모터의 구동전류

J_t : 모터와 부하의 총 관성 모멘트

$J(x)$: 변환 T 의 Jacobian 행렬

K : 상태 궤환 이득

K_{ce} : 총 유량 압력 계수(= $K_c + C_{tm}$)

K_v : 서어보밸브 이득

K_{vc} : VCCS 이득

L : 상태 추정기 이득

P_L : 부하 압력

P_S : 공급 압력

*정회원, 국방과학연구소

**정회원, 고려대학교 기계공학과

- Q_L : 부하유량
- R : 기준 입력
- R^n : n 차원 벡터 공간
- $sp\{\cdot\}$: 스패น (span)
- T : C^∞ 비선형 변환
- V_i : 총 압축체적
- x_v : 서어보 밸브의 변위
- x_1, x_2, x_3, u : 비선형 전기유압 속도제어 시스템의 상태변수 및 입력변수
- Z, z_1, z_2, z_3, v : 케환선형화된 등가선형 시스템의 상태변수 및 입력변수
- y, y_f : 시스템 출력변수
- β_e : 유효 체적 탄성계수
- Δ_i : J^X 의 leading principal minor
- θ_m : 모터의 작변위
- τ_v : 서어보 밸브의 시상수

1. 서 론

전기유압 서어보장치는 빠른 응답속도와 외력에 대한 큰 강성, 높은 정밀도등의 장점으로 인하여 자동화의 요소로서 여러 분야에서 널리 응용이 되고 있으며, 이중 속도제어용 전기유압 서어보장치를 “전기유압 속도제어 시스템”이라고 부른다. 가장 널리 사용되고 있는 전기유압 속도제어 시스템은 서어보밸브로 유압모터의 속도를 제어하는 전기유압 속도제어 시스템이며, 이 시스템은 서어보밸브의 오리피스에서의 비선형 유량 특성뿐 아니라 유압 모터에서도 비선형 손실계수를 가지고 있다.^(1~4) 이러한 비선형 전기유압 속도제어 시스템을 선형화하기 위하여 사용해 왔던 기존의 방법은 유압 모우터의 손실계수(총 누설계수, 모터의 점성 감쇠계수)들을 상수로 가정하고, 서어보밸브의 비선형 오리피스 방정식만을 Taylor 급수전개로 전개하여 1차식까지 사용하는 방법이다.^(1,2) 그러나 이 선형화 방법에 의한 시스템 모델에 근거해 설계된 제어기로 전기유압 속도제어 시스템을 제어할 경우, 선형화한 점 근처에서는 어느정도의 정확도를 갖는 제어를 할 수 있으나, 작동점이 선형화한 점에서 벗어나는 경우 모델링 오차로 인한 제어오차가 커지게 되므로, 요구속도의 변화에 따라 제어오차가 발생하게 된다. 따라서 넓은 작동범위에서도 상당한 정확도를 가질 수 있는 새로운 선형화 방법이 필요하다. 이러한 새로운 선형화 방법중의

하나로서 최근 비선형 변환(nonlinear transformation)에 의한 케환 선형화(feedback linearization) 방법이 출현하여 많은 연구가 진행되고 있다. 이는 상태 공간상에서 미분 기하학을 이용하여, 비선형 시스템이 선형시스템과 같은 거동을 갖도록 좌표축 변환(coordinate transformation)과 상태 케환(state feedback)을 이용하는 방법으로서 Krener,⁽⁵⁾ Brockett⁽⁶⁾의 연구로 체계화된 후, Jakubczyk와 Respondek⁽⁷⁾, Su⁽⁸⁾등에 의하여 이러한 비선형 변환이 국소적(local)으로 존재할 수 있는 필요 충분 조건이 구해졌고, Hunt, Su와 Meyer⁽⁹⁾, Cheng, Tarn과 Isidori⁽¹⁰⁾등에 의해 전체적 변환(global transformation)의 조건에 관하여 연구가 진행 되었다. 또한 최근 마이크로프로세서 기술의 급진적 발달에 따라 이러한 비선형 제어를 디지털 제어로 실현하려는 연구가 시도되고 있으며, 케환 선형화 방법에 의해 연속 비선형 시스템의 비선형 부분을 상쇄하기 위하여는 연속적인 케환이 필요하게 되나 디지털 제어에서는 샘플링 시간 동안 상수 케환만이 가능하기 때문에 근사적 방법으로서는 다중 샘플링(multi-rate sampling) 방법,⁽¹¹⁾ 근사화의 차수를 높이는 방법⁽¹²⁾ 등이 제안되었다. 그러나 연산량이 많아지거나 까다로운 필요충분조건들이 추가 되므로 실제 디지털 제어기로 실현하기에는 적합치 못하므로 추가적인 연구가 필요하다.

본 연구의 목적은 비선형 변환에 의한 케환 선형화 방법으로 전기유압 속도제어 시스템을 선형화하며, 케환 선형화 모델에 근거한 디지털 상태 케환 제어기를 구현하는 것이다.

본 연구에 사용된 전기유압 속도제어 시스템은 기본적으로 토크모터로 구동되는 유압 서어보밸브, 유압모우터, 속도검출 케환회로, 유압 동력 장치로 구성 되었으며, 고려된 비선형요소는 서어보 밸브 오리피스에서의 비선형 유량 특성과, 유압모우터의 총누설계수와 점성감쇠계수에서의 비선형 특성이다. 비선형 변환에 의한 케환 선형화 방법을 사용하기 위하여 전기유압 속도제어 시스템이 전체적 변환(global transformation)의 필요 충분 조건을 만족함을 보였고, 비선형 시스템을 등가 선형 시스템으로 변환하기 위한 비선형 변환을 구하였으며, 이 비선형 변환에 의해 구해진 등가선형 시스템이 모든 작동 범위에서 원래의 비선형 전기유압 속도제어 시스템과 동일한 거동을 갖음을 증명하였다. 구해진 등가 선형 시스템에 근거하여 상태 케환 제

여기를 디지털 제어기로 실현하였으며, 이를 위하여 본 연구에서는 일단앞섬 상태추정기(one-step ahead state estimator)를 사용하는 방법을 제안하였다. 이 방법은 비선형 시스템을 케환 선형화하여 등가 선형모델을 구한 후, 이 등가 선형 모델에 일단앞섬 상태추정기를 구성하여 디지털 제어를 실현하는 방법으로서, 계측할 수 없는 상태를 추정할 수 있을 뿐 아니라, 선형시스템에 대한 상태 추정기이므로 다음 단계의 상태를 비교적 정확하게 추정할 수 있어서 케환 선형화시 요구되는 연속적인 상태 케환에 근사시킬 수 있고, 직접 케환 선형화된 등가 선형 모델의 상태를 추정할 수 있으므로, 변환시의 연산량도 줄일 수 있다. 이로서 Grizzle⁽¹¹⁾이나 Lee⁽¹²⁾의 방법보다 간단하게 케환 선형화에 의한 디지털 상태 제어를 구현할 수 있었다.

케환 선형화 방법에 의해 구한 등가선형 시스템에 근거한 디지털 상태케환 제어기의 응답 특성을 고찰하기 위하여 시뮬레이션과 실험을 병행하여 수행하였다. 기존 선형화 방법에 의한 선형 모델과 비교하기 위하여 Taylor식 선형화 모델에 근거한 디지털 상태 케환 제어의 응답 특성을 비교 하였으며, Taylor식 선형화 모델에 대한 적분기를 갖는 디지털 상태 케환 제어의 응답 특성도 비교하였다. 사용한 제어기는 IBM PC/AT 호환기종이며, 제어 알고리즘은 실시간 제어와 연산의 편의를 위하여 C 언어와 어블리 언어를 혼합하여 작성하였으며, 샘플링 시간은 연산시간을 고려하여 5 ms로 고정하였다. 기준입력은 계단입력을 사용하였고, 외부 부하는 토크부하를 사용하였다.

2. 전기·유압 속도제어 시스템의해석

본 연구에서 사용한 전기유압 속도제어 시스템의 도시적 표현이 Fig. 1에 나타나있다. 전기유압 속

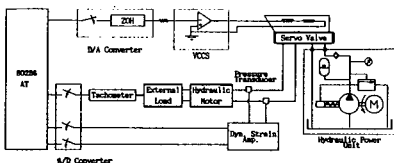


Fig. 1 Schematic of a microcomputer-based electro-hydraulic velocity control system

도제어 시스템의 수학적 모델링은 다음과 같다. 서어보밸브에서 입력전류 i 와 밸브스푸울의 변위 x_v 와의 관계는 식(1)과 같이 1차 함수로 가정하였다.⁽¹³⁾

$$\tau_v \frac{dx_v}{dt} + x_v = K_v i \quad (1)$$

서어보밸브의 유량방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다. 여기서 가정에 큰 무리없이 밸브 스푸울의 변위를 $x_v \geq 0$ 으로 가정하였다.

$$Q_L = C_v x_v \sqrt{P_s - P_L} \quad (2)$$

유압모우터의 실내(chamber)에서의 연속방정식과 토크에 관한 운동방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.⁽²⁾

$$Q_L = D_m \frac{d\theta_m}{dt} + C_{tm} P_L + \frac{V_t}{4\beta_e} \frac{dP_L}{dt} \quad (3)$$

$$P_L D_m = J_t \frac{d^2\theta_m}{dt^2} + B_m \frac{d\theta_m}{dt} + T_L \quad (4)$$

이상의 식(3)과 (4)에서 유압 모우터의 총 누설 계수 C_{tm} 과 모터의 점성 감쇠계수 B_m 가 상수로 가정되었으나, 최근 McCandlish와 Dorey,⁽³⁾ Pacey⁽⁴⁾ 등은 이러한 손실계수들이 상수가 아님을 실험을 통하여 보였다. 따라서 본 논문에서는 이 손실계수들에 대한 실험결과를 근거로 하여, 다음과 같이 모터 회전속도와 부하압력에 대한 비선형 변수인 모델을 구하였다.

$$B_m = B_0 + B_1 \frac{d\theta_m}{dt} + B_2 \left(\frac{d\theta_m}{dt} \right)^2 \quad (5)$$

$$C_{tm} = (C_0 + C_1 \frac{d\theta_m}{dt}) P_L^{n-1} \quad (6)$$

여기서 B_0, B_1, C_0, C_1, n 은 Table 1에 나타나 있다. 따라서 식(3)과 (4)는 다음과 같이 된다.

$$Q_L = D_m \frac{d\theta_m}{dt} + (C_0 + C_1 \frac{d\theta_m}{dt}) P_L^n + \frac{V_t}{4\beta_e} \frac{dP_L}{dt} \quad (7)$$

$$P_L D_m = J_t \frac{d^2\theta_m}{dt^2} + B_0 \frac{d\theta_m}{dt} + B_1 \left(\frac{d\theta_m}{dt} \right)^2 + B_2 \left(\frac{d\theta_m}{dt} \right)^3 + T_L \quad (8)$$

그러므로 전기유압 속도제어 시스템의 비선형 모델은 다음과 같은 상태공간 방정식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{B_0}{J_t}x_1 - \frac{B_1}{J_t}x_1^2 - \frac{B_2}{J_t}x_1^3 - \frac{D_m}{J_t}x_2 - \frac{T_L}{J_t} \\ -\frac{4\beta_e}{V_t}D_m x_1 - \frac{4\beta_e}{V_t}(C_0 + C_1 x_1)x_2^n + \frac{4\beta_e}{V_t}C_v K_v \sqrt{P_s - x_2} x_3 \\ -\frac{1}{\tau_v}x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K_{vc}}{\tau_v} \end{bmatrix} u \quad (9)$$

여기서 $x_1 = \theta_m$, $x_2 = P_L$, $x_3 = x_v/K_v$, $u = e_i$ 이며 계수의 복잡함을 피하기 위하여 일반화된 표현을 사용하면 식(9)는 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{111}x_1^2 + a_{112}x_1^3 + a_{12}x_2 + a_{13}T_L \\ a_{21}x_1 + (a_{22} + a_{221}x_1)x_2^n + a_{23}\sqrt{P_s - x_2}x_3 \\ a_{33}x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \end{bmatrix} u = \mathbf{F} + \mathbf{G} \cdot u \quad (10)$$

여기서 a_{11} , a_{111} , ..., b_3 는 시스템 상수로서, 각각 식(9)에 대응되는 상수이다.

3. 전기·유압 속도제어 시스템의 궤환 선형화

비선형변환에 필요한 수학적인 정의는 부록에 기술되어 있으며, 본절에서는 전기유압 속도제어 시스템이 전체적(global) 변환이 가능하기 위한 필요충분조건⁽⁹⁾인 가제어성 행렬(controllability matrix)의 비특이(nonsingular)조건, 집합 $\{\mathbf{G}, [\mathbf{F}, \mathbf{G}]\}$ 의 involutive 조건, 변환 \mathbf{T} 의 Jacobian의 R^n 에서의 비율조건(ratio condition)들을 만족함을 보이고, 전기유압 속도제어 시스템에 대한 비선형변환을 구하여, 모든 작동점에서 비선형 비스텝과 동가 선형시스템을 구한다.

(1) 가제어성 행렬의 비특이(nonsingular) 조건
비선형 시스템(10)은 3차 이므로 가제어성 행렬은 다음과 같다.⁽⁹⁾

$$\{\mathbf{G}, [\mathbf{F}, \mathbf{G}], (ad^2\mathbf{F}, \mathbf{G})\} \quad (11)$$

또한

$$\mathbf{G} = [0 \ 0 \ b_3]^T \quad (12)$$

$$[\mathbf{F}, \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 0 \\ -a_{23} b_3 \sqrt{P_s - x_2} \\ -b_3 a_{33} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$(ad^2\mathbf{F}, \mathbf{G}) = [\mathbf{F}, [\mathbf{F}, \mathbf{G}]]$$

$$= \frac{\partial[\mathbf{F}, \mathbf{G}]}{\partial x} \mathbf{F} - \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} [\mathbf{F}, \mathbf{G}]$$

$$= \begin{bmatrix} a_{12} \ a_{23} \ b_3 \ \sqrt{P_s - x_2} \\ -a_{23} b_3 \ \sqrt{P_s - x_2} \left[\frac{n(a_{22} + a_{221}x_1)x_2^{n-1} - a_{33}}{2(P_s - x_2)} + \frac{a_{21}x_1 + (a_{22} + a_{221}x_1)x_2^n}{2(P_s - x_2)} \right] \\ -a_{33}^2 b_3 \end{bmatrix} \quad (14)$$

여기서 T 는 전치(transpose)이다.

그러므로 $P_s > x_2$ 인 모든 경우에 다음의 조건을 만족하게 된다.

$$\text{rank}\{\mathbf{G}, [\mathbf{F}, \mathbf{G}], (ad^2\mathbf{F}, \mathbf{G})\} = 3 \quad (15)$$

여기서 $P_s < x_2$ 일 조건은 공급압력이 부하압력보다 크다는 조건이므로 유압 시스템 설계시 기본적으로 만족되는 조건이다. 그러므로 가제어성 행렬은 모든 작동범위에서 비특이이다.

(2) 집합 $\{\mathbf{G}, [\mathbf{F}, \mathbf{G}]\}$ 의 involutive 조건

전기 유압 속도제어 시스템(10)에서의 집합 $\{\mathbf{G}, [\mathbf{F}, \mathbf{G}]\}$ 는 각 $x \in R^3$ 에 대하여 2차원이다. 또한

$$[\mathbf{G}, [\mathbf{F}, \mathbf{G}]] = \frac{\partial[\mathbf{F}, \mathbf{G}]}{\partial x} \mathbf{G} - \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x} [\mathbf{F}, \mathbf{G}] = [0 \ 0 \ 0]^T \quad (16)$$

따라서 $\text{rank}\{\mathbf{G}, [\mathbf{F}, \mathbf{G}], [\mathbf{G}, [\mathbf{F}, \mathbf{G}]]\} = 2$ 이므로 집합 $\{\mathbf{G}, [\mathbf{F}, \mathbf{G}]\}$ 는 involutive이다. 그러므로 부록의 정리 3의 i), ii)의 조건을 만족하므로 일단 국소변환 존재조건(condition of existence of local transformation)이 성립된다.⁽⁶⁾

그러므로 전기유압 속도제어 시스템의 비선형 변환 $T = T(z_1, z_2, z_3, z_4)$ 는 식 (A.12), (A.13)의 편미분 방정식을 풀음으로써 구할 수 있으며 그 결과는 다음과 같다.

$$z_i = x_i \tag{17}$$

$$z_2 = \dot{z}_1 = a_{11}x_1 + a_{111}x_1^2 + a_{112}x_1^3 + a_{12}x_2 + a_{13}T_L \tag{18}$$

$$z_3 = \dot{z}_2 = (a_{11}^2 + a_{12}a_{21})x_1 + 3a_{11}a_{111}x_1^2 + 2(a_{111}^2 + 2a_{11}a_{112})x_1^3 + 5a_{111}a_{112}x_1^4 + 3a_{112}^2x_1^5 + 2a_{111}a_{12}x_1x_2 + 3a_{112}a_{12}x_1^2x_2 + a_{11}a_{12}x_2 + a_{12}(a_{22} + a_{221}x_1)x_2^n + a_{12}a_{23}\sqrt{P_s - x_2}x_3 + a_{13}(a_{11} + 2a_{111}x_1 + 3a_{112}x_1^2)T_L \tag{19}$$

$$z_4 = \dot{z}_3 = v = a_{11}(a_{11}^2 + 2a_{12}a_{21})x_1 + a_{111}(7a_{11}^2 + 3a_{12}a_{21})x_1^2 + (13a_{11}^2a_{12} + 12a_{11}a_{111}^2 + 4a_{112}a_{12}a_{21})x_1^3 + a_{111}(38a_{11}a_{112} + 6a_{111}^2)x_1^4 + a_{112}(27a_{11}a_{112} + 26a_{111}^2)x_1^5 + 35a_{111}a_{112}^2x_1^6 + 15a_{112}x_1^7$$

$$+ a_{12} \left[\begin{matrix} a_{11}^2 + a_{12}a_{21} + 8a_{11}a_{111}x_1 + (18a_{11}a_{112} + 8a_{111}^2)x_1^2 + 28a_{111}a_{112}x_1^3 + 21a_{112}^2x_1^4 \end{matrix} \right] x_2$$

$$+ 2a_{12}^2(a_{111} + 3a_{112}x_1)x_2^2 + na_{12}a_{21}(a_{22} + a_{221}x_1)x_1x_2^{n-1}$$

$$+ a_{12} \left[\begin{matrix} a_{11}a_{22} + 2(a_{111}a_{22} + a_{11}a_{221})x_1 + 3(a_{112}a_{22} + a_{111}a_{221})x_1^2 + 4a_{112}a_{221}x_1^3 \end{matrix} \right] x_2^n$$

$$+ a_{12}^2a_{221}x_2^{n+1} + na_{12}(a_{22} + a_{221}x_1)^2x_2^{2n-1}$$

$$+ a_{12}a_{23}\sqrt{P_s - x_2} \left[\begin{matrix} a_{11} + a_{33} + 2a_{111}x_1 + 3a_{112}x_1^2 \\ n(a_{22} + a_{221}x_1)x_2^{n-1} \end{matrix} \right] x_3$$

$$- \frac{a_{12}a_{23}}{2\sqrt{P_s - x_2}} [a_{21}x_1 + (a_{22} + a_{221}x_1)x_2^n + 3a_{23}\sqrt{P_s - x_2}x_3] x_3$$

$$+ a_{13} \left[\begin{matrix} a_{11}^2 + a_{12}a_{21} + 8a_{11}a_{111}x_1 + 4a_{111}a_{12}x_2 \\ + (18a_{11}a_{112} + 8a_{111}^2)x_1^2 + 12a_{112}a_{12}x_1x_2 \\ + 28a_{111}a_{112}x_1^3 + 21a_{112}^2x_1^4 + a_{12}a_{221}x_2^n \\ + (2a_{111} + 6a_{112}x_1)a_{13}T_L \end{matrix} \right] T_L$$

$$+ a_{12}a_{23}b_3\sqrt{P_s - x_2} u \tag{20}$$

그러므로 비선형 전기유압 속도제어 시스템 (10)에 식 (17) ~ (20)의 비선형 변환을 적용하면 다음과

같은 선형 시스템을 얻을 수 있다. 여기서 $Z = TX$ 이다.

$$\dot{Z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} Z + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v = AZ + Bv \tag{21}$$

$$y_r = [1 \ 0 \ 0] Z = DZ$$

(3) 변환 T 의 Jacobian의 R^n 에서의 비율조건 (ratio condition)

식 (17) ~ (20)로부터 변환 T 의 Jacobian은 다음 식과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & 0 \\ \gamma_3 & \gamma_4 & \gamma_5 \end{bmatrix} \tag{22}$$

여기서

$$\gamma_1 = a_{12} + 2a_{111}x_1 + 3a_{112}x_1^2$$

$$\gamma_2 = a_{12}$$

$$\gamma_3 = (a_{11}^2 + a_{12}a_{21}) + 6a_{11}a_{111}x_1 + 6(a_{111}^2 + 2a_{11}a_{112})x_1^2 + 20a_{111}a_{112}x_1^3 + 15a_{112}^2x_1^4 + a_{12}(2a_{111} + 6a_{112}x_1)x_2 + a_{12}a_{221}x_2^n + (2a_{111} + 6a_{112}x_1)a_{13}T_L$$

$$\gamma_4 = a_{12}(a_{11} + 2a_{111}x_1 + 3a_{112}x_1^2) + na_{12}(a_{22} + a_{221}x_1)x_2^{n-1} - a_{12}a_{23}x_3 / (2\sqrt{P_s - x_2})$$

$$\gamma_5 = a_{12}a_{23}\sqrt{P_s - x_2}$$

따라서 식 (22)의 주선도 소행렬 (leading principal minor)은 다음의 관계식을 만족한다.

$$|\Delta_1| = 1 \geq \epsilon \tag{23}$$

$$\left| \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \right| = a_{12} \geq \epsilon \tag{24}$$

$$\left| \frac{\Delta_3}{\Delta_1} \right| = a_{12}a_{23}\sqrt{P_s - x_2} \tag{25}$$

여기서 식 (25)는 $P_s > x_2$ 인 경우에 한하여 ϵ 보다 크게 되며, $P_s > x_2$ 조건은 기본적으로 만족되는 조건이므로, 전기유압 속도제어 시스템의 비선형 변환 T 는 비율조건을 만족한다.

따라서 비선형 변환 T 는 R^3 에서 R^3 으로의 일대일 대응이고, 또한 국소변환 존재조건을 만족하므로, 정리 3으로 부터, 전기유압 속도제어 시스템 (10)은 전체적 케환 등가 시스템이다. 즉 구해진

등가 선형 시스템은 모든 작동범위에서 비선형 전기유압 속도제어 시스템과 같은 거동을 갖는다.

전기유압 속도제어 시스템을 제어하기 위한 제어 입력은 식(20)으로 부터 다음과 같이 구할 수 있다.

(4) 전기유압 속도제어 시스템의 제어 입력

$$\begin{aligned}
 &v - a_{11}(a_{11}^2 + 2a_{12}a_{21})x_1 - a_{111}(7a_{11}^2 + 3a_{12}a_{21})x_1^2 - (13a_{11}^2a_{12} + 12a_{11}a_{111}^2 + 4a_{112}a_{12}a_{21})x_1^3 - a_{1111} \\
 &(38a_{11}a_{112} + 6a_{111}^2)x_1^4 - a_{112}(27a_{11}a_{112} + 26a_{111}^2)x_1^5 - 35a_{111}a_{112}^2x_1^6 - 15a_{112}^3x_1^7 - a_{12}[a_{11}^2 + a_{12}a_{21} + 8a_{11}a_{111}x_1 + \\
 &(18a_{11}a_{112} + 8a_{111}^2)x_1^2 + 28a_{111}a_{112}x_1^3 + 21a_{112}^2x_1^4]x_2 - 2a_{12}^2(a_{111} + 3a_{112}x_1)x_2^2 - na_{12}a_{21}(a_{22} + a_{221}x_1)x_1x_2^{n-1} - a_{12} \\
 &[a_{11}a_{22} + 2(a_{111}a_{22} + a_{11}a_{221})x_1 + 3(a_{112}a_{22} + a_{111}a_{221})x_1^2 + 4a_{112}a_{221}x_1^3]x_2^n - a_{12}^2a_{221}x_2^{n+1} - na_{12}(a_{22} + a_{221}x_1)^2x_2^{2n-1} \\
 &- a_{12}a_{23}\sqrt{P_s - x_2}[a_{11} + a_{33} + 2a_{111}x_1 + 3a_{112}x_1^2 + n(a_{22} + a_{221}x_1)x_2^{n-1}]x_3 + \frac{a_{12}a_{23}}{2\sqrt{P_s - x_2}}[a_{21}x_1 + (a_{22} + a_{221}x_1)x_2^n + \\
 &a_{23}\sqrt{P_s - x_2}x_3]x_3 - a_{13}[a_{11}^2 + a_{12}a_{21} + 8a_{11}a_{111}x_1 + 4a_{111}a_{12}x_2 + (18a_{11}a_{112} + 8a_{111}^2)x_1^2 + 12a_{112}a_{12}x_1x_2 + \\
 &28a_{111}a_{112}x_1^3 + 21a_{112}^2x_1^4 + a_{12}a_{221}x_2^n + (2a_{111} + 6a_{112}x_1)a_{13}TL]TL \\
 u = & \frac{\dots}{a_{12}a_{23}b_3\sqrt{P_s - x_2}} \tag{26}
 \end{aligned}$$

여기서 식(26)의 v 는 선형 상태 케환 제어 입력으로서 일반적으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$v(k) = -KZ(k) + Nr(k) \tag{27}$$

여기서 K 는 상태 케환 이득, N 은 상수, $r(k)$ 는 기준입력이다.

$$\begin{aligned}
 \gamma &= \int_0^h \exp(At) dt \quad B = [h^3/6 \quad h^2/2 \quad h]^T \\
 H &= D = [1 \quad 0 \quad 0] \\
 h &= \text{샘플링 시간}
 \end{aligned}$$

시스템 (29)의 가관측성 행렬⁽⁹⁾ O 의 차수는 다음과 같다.

4. 상태 케환 제어

본 장에서는 케환 선형화된 등가 선형 모델에 일단 앞섬 상태 추정기를 사용하여 디지털 상태케환 제어를 설계하는 과정, 즉 요구되는 동특성으로부터 상태 케환 이득과 상태 추정기 이득을 구하는 과정에 대하여 기술한다. 3장에서 구한 연속시간 등가 선형 모델(21)은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \dot{Z} &= AZ + Bv \\
 y_f &= DZ
 \end{aligned} \tag{28}$$

여기서 A, B, D 는 식(21)과 같으며 Z 는 케환 선형화된 상태, v 는 제어 입력, y_f 는 시스템 출력이다. 시스템 (28)은 샘플링 시간 h 의 이산시간 시스템으로 변환하면 다음 식(29)와 같다.

$$\begin{aligned}
 Z(k+1) &= \Phi Z(k) + \Gamma v(k) \\
 y_f(k) &= HZ(k)
 \end{aligned} \tag{29}$$

여기서

$$\Phi = \exp(Ah) = \begin{bmatrix} 1 & h & h^2/2 \\ 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank } O = \text{rank} \begin{bmatrix} H \\ H \Phi \\ H \Phi^2 \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & h & h^2/2 \\ 1 & 2h & 2h^2 \end{bmatrix} = 3 \tag{30}$$

그러므로 가관측성이다. 따라서 식(29)에 다음 식(31)의 일단앞섬 상태 추정기를 구성할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \hat{Z}(k+1) &= \Phi \hat{Z}(k) + \Gamma v(k) + \Gamma v(k) \\
 &+ L[y_f(k) - H\hat{Z}(k)]
 \end{aligned} \tag{31}$$

여기서 $\hat{Z}(k)$ 는 추정된 상태이며, L 은 상태 추정기 이득이다. 따라서 제어입력은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$v(k) = -K\hat{Z}(k) + Nr(k) \tag{32}$$

여기서 K 는 상태 케환 이득, N 은 상수, $r(k)$ 는 기준입력이다. 그러므로

$$\begin{aligned}
 \hat{Z}(k+1) &= [\Phi - \Gamma K - LH] \hat{Z}(k) + Ly_f(k) \\
 &+ \Gamma Nr(k)
 \end{aligned} \tag{33}$$

식(26)과 식(32), 식(33)으로 부터

$$\begin{bmatrix} Z(k+1) \\ \hat{Z}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma K \\ LH & \Phi - \Gamma K - LH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z(k) \\ \hat{Z}(k) \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \Gamma \\ \Gamma \end{bmatrix} Nr(k) \quad (34)$$

$$y_f(k) = HZ(k) \quad (35)$$

따라서 전체 시스템의 동특성은 다음식에 의해 결정된다.

$$\det \begin{bmatrix} qI - \Phi & -\Gamma K \\ -LH & qI - \Phi + \Gamma K + LH \end{bmatrix} \\ = \det(qI - \Phi + \Gamma K) \cdot \det(qI - \Phi + LH) \quad (36)$$

식(36)에서 보는 바와 같이 전체 시스템의 동특성은 $\det(qI - \Phi + \Gamma K)$ 와 $\det(qI - \Phi + LH)$ 의 곱에 의하여 정해지므로, 상태 추정기 이득 K 와 상태 제환 제어기 이득 L 은 각각 독립적으로 결정할 수 있으며, 상태 제환 이득 K 를 변화시킴으로써 극점의 위치를 변경하여 원하는 동특성을 얻을 수 있다. 원하는 동특성을 얻기 위한 극점선정 방법은 여러방법이 있으나 본 연구에서는 일반적으로 많이 사용하고 있는 ITAE 기준(Integral of Time multiplied Absolute Error criterion)을 이용하여 요구되는 응답특성을 갖도록 극점을 선정하였다. ITAE 기준은 성능지수 $\int_0^{\infty} |e(t)| dt$ 를 최소로 하는 최적 시스템을 구하는 기준으로, 절점 주파수가 ω 인 3차 시스템의 경우 다음 식과 같다.⁽¹⁴⁾

$$G(s) = \frac{\omega^3}{s^3 + 1.75\omega s^2 + 2.15\omega^2 s + \omega^3} \quad (37)$$

따라서 식(37)의 특성 방정식을 샘플링 시간 h 의 경우의 이산치 시스템으로 변환하면 다음과 같은 특성 방정식을 구할 수 있다.

$$q^3 + p_1 q^2 + p_2 q + p_3 = 0 \quad (38)$$

$$\text{여기서 } p_1 = -e^{-0.7081\omega h} + 2e^{-0.521\omega h} \cos(1.068\omega h) \\ p_2 = e^{-20.521\omega h} + 2e^{-1.2291\omega h} \cos(1.068\omega h) \\ p_3 = -e^{-1.7501\omega h}$$

이며 q 는 지연 연산자(delay operator), w 는 ITAE 절점 주파수, h 는 샘플링 시간이다. 또한

$$\det(qI - \Phi + \Gamma K) = \\ = q^3 + \left(\frac{h^3}{6}k_1 + \frac{h^2}{2}k_2 + hk_3 - 3\right)q^2 \\ + \left(\frac{2}{3}h_3k_1 - 2hk_3 + 3\right)q + \frac{h^3}{6}k_1$$

$$- \frac{h^2}{2}k_2 + hk_3 - 1 \quad (39)$$

따라서 식(38)과 (39)의 각 계수를 비교하면 다음의 상태 추정기 이득을 구할 수 있다.

$$k_1 = \frac{1}{h_3}(1 + p_1 + p_2 + p_3) \quad (40)$$

$$k_2 = \frac{1}{h^2}[2 + p_1 - p_3] \quad (41)$$

$$k_3 = \frac{1}{h} \left[\frac{p_1}{3} - \frac{p_2}{6} + \frac{p_3}{3} + \frac{11}{6} \right] \quad (42)$$

상태 추정기 이득 L 을 구하는 방법은 다음과 같다.

$$\det[qI - \Phi + LH] = \\ = q^3 + (1-3)q^2 + (-21_1 + h1_2 \\ + \frac{h^2}{2} \cdot 1_3 + 3)q + (1 - h1_2 + \frac{h^2}{2} \cdot 1_3 - 1) \quad (43)$$

설계하려는 상태 추정기의 동특성도 w_1 의 절점 주파수를 갖는 ITAE 기준으로 선정할 경우 다음과 같다.

$$q^3 + e_1 q^2 + e_2 q + e_3 = 0 \quad (44)$$

$$\text{여기서 } e_1 = -e^{-0.7081w_1 h} + 2e^{-0.521w_1 h} \cos(1.068w_1 h) \\ e_2 = e^{-20.521w_1 h} + 2e^{-1.2291w_1 h} \cos(1.068w_1 h) \\ e_3 = -e^{-1.7501w_1 h}$$

이며 w_1 은 ITAE 절점 주파수, h 는 샘플링 시간이다. 따라서 식(43)과 (44)로부터 다음의 상태 추정기 이득을 얻을 수 있다.

$$1_1 = e_1 + 3 \quad (45)$$

$$1_2 = [3e_1 + e_2 - e_3 + 5]/2h \quad (46)$$

$$1_3 = [1 + e_1 + e_2 + e_3]/h^2 \quad (47)$$

따라서 전체 시스템의 전달함수를 구하면 다음식과 같다.

$$\frac{y_f}{r} = H(qI - \Phi + \Gamma K)^{-1} \Gamma N \quad (48)$$

식(48)에서 보는 바와 같이 상태 추정기에 사용한 시스템 모델이 정확하다고 하면 시스템의 동특성은 상태 추정기 이득 L 에 관계없이 상태 제환 이득 K 만의 함수임을 알 수 있다. 즉 $\det(qI - \Phi + \Gamma K)$ 에 의해서만 동특성이 결정되게 된다.⁽¹⁵⁾ 또한 상태 추정기의 이득 L 을 크게 선정하면 추정오차의 수렴속도는 빨라지는 반면 잡음(noise) 증폭 등의 문제가 존재하므로, 일반적으로 상태 제환 이득 K

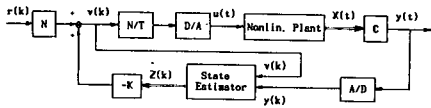


Fig. 2 Block diagram of the digital state feedback controlled nonlinear electro-hydraulic velocity control system with a one-step ahead state estimator (based on the feedback linearized model)

에 의해 결정된 전체 시스템의 극점의 2~4배, 자음이 많은 경우는 1/2배 정도로 선정하게 되나,⁽¹⁴⁾ 본 연구의 경우 타코미터의 잡음과 연속 시간 시스템에 대한 궤환 선형화에 의한 제어를 이산 시간 시스템으로 실현하였을 때의 오차등이 잡음으로 작용하여 상태 추정기의 이득의 크기가 제한되게 되었으므로, 상태 추정기의 극점을 상태 궤환에 의해 결정된 전체 시스템 극점의 1/5로 선정하였다. 이는 식(48)에서 보는 것처럼 식(33)이 안정하도록

K, L 을 선정하고 시스템과 상태 추정기의 초기 조건이 같다고 가정할 경우 상태 추정기 이득 L 에 관계없이 상태 궤환 이득 K 만으로 원하는 동특성을 얻을 수 있기 때문이다. 또한 상수 N 은 전체 시스템의 이득이 1이 되도록 선정하면 되므로 식(48)로부터

$$N = \frac{1}{H(1 - \Phi + \Gamma K)^{-1} \Gamma} = k_1 \quad (49)$$

따라서 ITAE 기준을 사용하였을 경우 N 은 다음과 같다.

$$N = w^3 \quad (50)$$

이상의 궤환 선형화된 제어기로 전기유압 속도제어 시스템을 제어하려면, 상태 궤환 제어 입력 v 를 비선형 시스템의 제어 입력 u 로 변환해 주어야 한다. 이는 식(26)으로 주어지나 이를 직접 상태 추정기(31)에서 추정된 상태를 사용할 수 있도록 변환하면 다음 식(51)과 같다.

$$u = \frac{v + a_{12}a_{21}a_{33} \bar{z}_1 + (a_{11}a_{33} - a_{12}a_{21} + 2a_{111}a_{33} \bar{z}_1) \bar{z}_2 + 3a_{112} \bar{z}_1^2 \bar{z}_2 - (2a_{111} + 6a_{112} \bar{z}_1) \bar{z}_2^2 - (a_{11} + a_{33} + 2a_{111} \bar{z}_1 + 3a_{112} \bar{z}_1^2) \bar{z}_3 + a_{12} [a_{33} (a_{22} + a_{221} \bar{z}_1) - a_{221} \bar{z}_2] \bar{X}_2^n - n (a_{22} + a_{221} \bar{z}_1) [(a_{11} + 2a_{111} \bar{z}_1 + 3a_{112} \bar{z}_1^2) \bar{z}_2 - \bar{z}_3] \bar{X}_2^{n-1} + \frac{[\bar{z}_3 - (a_{11} + 2a_{111} \bar{z}_1 + 3a_{112} \bar{z}_1^2) \bar{z}_2]}{2a_{12} (P_s - \bar{X}_2)} [\bar{z}_3 - (a_{11} + 2a_{111} \bar{z}_1 + 3a_{112} \bar{z}_1^2) \bar{z}_2 - a_{12}a_{21} \bar{z}_1 - a_{12} (a_{22} + a_{221} \bar{z}_1) \bar{X}_2^n]}{a_{12}a_{23}b_3 \sqrt{P_s - \bar{X}_2}} \quad (51)$$

여기서 $\bar{X}_2 = \bar{z}_2 - a_{11} \bar{z}_1 - a_{111} \bar{z}_1^2 - a_{112} \bar{z}_1^3 - a_{13} T_L$ 식(26)과 (51)를 비교해 볼때 연산량의 현저한 감소를 볼 수 있다. 또한 전기유압 속도제어 시스템의 출력 $y(t)$ 는 궤환 선형화된 등가 선형 시스템의 출력 $y_f(t)$ 와 동일하므로, 일단 앞섬 상태 추정기(31)은 직접 $y(t)$ 만 궤환 함으로써 한 단계 앞선 각 상태들을 추정할 수 있다. 따라서 디지털 제어시 전체 시스템의 블록선도는 Fig. 2로 나타낼 수 있다.

5. 실험 및 시뮬레이션

3장에서 '구한 궤환 선형화된 선형시스템의 응답 특성을 고찰하기 위하여 4장에서 구한 디지털 상태 궤환 제어기를 사용하여 시뮬레이션과 실험을 실시하였다. 본 장에서는 본 실험에 사용한 실험장치의 구성과 실험방법, 실험 내용, 시뮬레이션등에 대해

여 기술한다.

5.1 실험 장치

Fig. 3은 전기유압 속도제어 시스템을 비선형 변환에 의한 상태궤환 디지털 제어기를 사용하여 제어하기 위한 실험장치의 개략도이다.

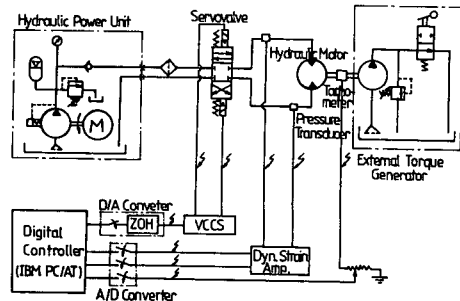


Fig. 3 Hydraulic circuit of the experimental Rig

실험장치는 축압기(accumulator)와 가변 용량형 압력보상 피스톤 펌프로 구성된 유압 동력장치(hydraulic power unit), MOOG Series 62의 서어보밸브, 내접 치차형(gerotor type)의 유압모터, 타코미터(tacho meter)에 의한 속도검출 제환 회로, IBM 호환기종 AT와 A/D D/A 변환기로 구성된 디지털 제어기, 전압으로 출력되는 제어 신호를 서어보밸브의 토크모터를 구동하기 위한 전류로 변환시켜주는 VCCS(voltage controlled current source)과, 시스템에 부하를 걸어 주기 위한 부하 장치등으로 구성되어 있으며 이 부하장치는 유압펌프 및 릴리프 밸브, 방향전환밸브로 구성되어 있다.

유압 동력원으로 사용한 유압펌프는 가변 용량형 압력 보상형 피스톤 펌프이며 본 연구에서는 작동 압력으로 70 bar를 사용하였고, 이때의 송출유량은 $2.02 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ 이다. 서어보밸브는 MOOG Series 62 서어보밸브로서 정격 유량은 70 bar에서 $1.57 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ 이다. 유압모터는 내접 치차형 기어 모터인 덴마크 Danfoss사의 OMM 12.5 모터를 사용하였다. 모터의 밀어젖힘 용적은 $2.0531 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{rad}$ 이고 최대속도는 160 rad/s이다. 유압 모터의 회전속도를 측정하기 위하여 사용한 타코미터는 SINGER DC 타코미터로써 이득이 100 rad/s 당 19.86 volt dc이나 제어기의 A/D 변환기의 입력 범위가 최대 $\pm 5 \text{ volt}$ 이므로 저항을 사용하여 0.0594 volt/(rad/s)가 되도록 조정하였다. 이 타코미터는 10rad/s 이상의 속도에서 실제 출력의 3% 이내의 리플(ripple)을 가진다고 사양에 명시되어 있으나 실제 약 5%의 리플이 존재하였다. 본 연구에서 디지털 제어기로 사용한 컴퓨터는 80287 NDP가 장착된 IBM PC/AT이다. 16비트 80286 마이크로프로세서를 CPU로 내장하고 있으며 클럭 주파수는 12MHz이다. 제어 입력의 계산은 실시간 연산과 연산의 편의를 위하여 C 언어와 80286 어셈블리 언어를 결합하여 사용하였다. 제어기의 샘플링 시간은 연산 시간을 고려해 5ms로 고정하여 사용하였는데 시스템의 요구응답이 10 Hz 이하이므로 충분히 타당성이 있다고 본다. A/D 및 D/A 변환기는 14비트의 해상도(resolution)를 가지고 있는 PC LabCard series의 PCL-714를 사용하였으며, $-5 \sim +5 \text{ V}$ 의 입출력 범위를 사용하였으므로 1 LSB당 변환 전압은 0.6104mV이다. A/D 변환시간은 약 40 μsec , D/A 변환시간은 약 30 μsec 가 소

요된다. 실험결과와 정리를 위하여 디지털 필터를 사용하였다. 실험결과에서 타코미터의 리플로 인하여 실제 데이터가 손상되어 보이므로 실험은 필터 없이 실시한 후 실험 결과만을 무위상지연(zero phase shift) 디지털 필터⁽¹⁷⁾를 사용하여 데이터 처리하였다. 본 연구의 경우 신호 주파수가 10 Hz 미만이고 잡음 주파수는 약 50에서 200 Hz 정도이므로 절점 주파수를 20 Hz로 정하였으며 10차 Butterworth 필터를 사용하여 결과를 처리하였다.

5.2 실험에 의한 시스템 상수 결정

Wilson은 유압모터의 유량손실이 부하압력에 비례하고 토크손실도 모우터 회전속도에 비례한다고 가정하였으나,^(1,2) D. McCandlish등^(3,4)이 유량손실과 토크손실이 부하 압력과 회전속도의 비선형 함수임을 밝혔다. 본 절에서는 이에 대한 근거와 정확한 계수 선정을 위하여 B_m 과 C_{tm} 을 측정하였고 그 실험 결과로서 근사식을 유도하여 각 계수를 구하였다.

(1) 모터 점성 감쇠 계수, B_m

본 연구에 사용한 유압모터는 내접기어형 기어모터이다. 모터의 점성 감쇠 계수 B_m 을 직접 측정할 수 없으므로 식(4)를 이용하여 부하압력 P_L 과 모터 회전속도를 측정하여 B_m 을 계산하였으며 이 결과가 Fig. 4에 나타나 있다. 그림에서 작은 원으로 표시된 점이 실험 결과이며 실선은 근사화된 결과이다. 이로서 B_m 이 상수가 아니고, 회전속도의 변화에 따라 비선형적으로 변화하고 있으며, 대략 2차 함수 정도로 근사화될 수 있음을 알 수 있다. 본 연구에서는 이 실험 결과를 최소 평균 자승법(least mean square)에 의해 2차 함수로 근사화하여 다음의 근사식을 얻었다.

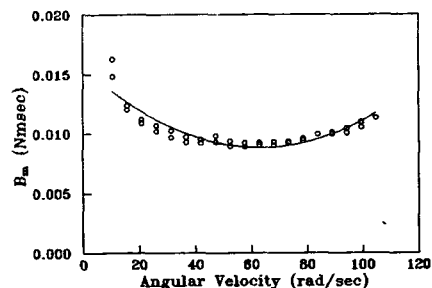


Fig. 4 Experimental characteristic of a viscous damping coefficient of an OMM 12.5 gear motor

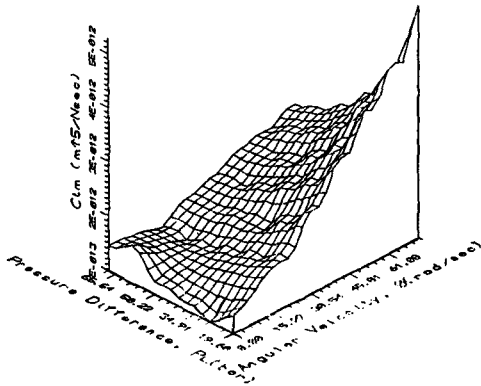


Fig. 5 Experimental characteristic of a total leakage coefficient of a OMM 12.5 gear motor

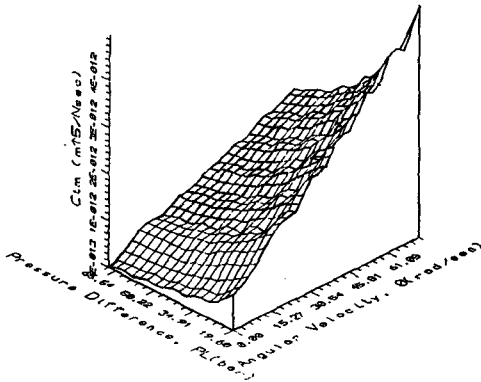


Fig. 6 Curve fitting result for Eq.(53)

$$B_m = 8.113 \times 10^{-7} \dot{\theta}_m^2 - 7.561 \times 10^{-5} \dot{\theta}_m + 0.01 \quad (52)$$

이 마찰에 의한 토크손실은 $T_c = 0.117 \text{ Nm}$ 이다.

(2) 총누설 계수, C_{tm}

부하압력과 회전속도에 대한 C_{tm} 의 측정 실험 결과를 Fig. 5에 나타내었고, 그에 대한 근사식의 결과를 Fig. 6에 나타내었다. 측정 결과를 근사화 하기 위하여, 각 $\dot{\theta}_m$ 에 대한 P_L 과 C_{tr} 에 대한 관계식을 구하여 P_L 의 지수치의 평균값을 택하여 P_L 의 지수를 결정한 후, 그 지수를 사용하여 나머지 계수값을 $\dot{\theta}_m$ 에 대하여 1차식으로 근사화 하여 다음 식을 얻었다.

$$C_{tm} = (C_0 + C_1 \dot{\theta}_m) (P_L)^{-0.7} \quad (53)$$

여기서 $C_0 = 2.24 \times 10^{-8} [m^5(N/m^2)^{0.7}/(N \cdot \text{sec})]$, $C_1 = 1.34 \times 10^{-9} [m^5(N/m^2)^{0.7}/N]$ 이다. 이외의 여러 측정 실험과 제작처에서 제공한 사양들로부터

Table 1 Values of System Parameters

Parameter	Values	
B_m	0.0103	$N \cdot n \cdot \text{sec}$
B_{m0}	0.003	$N \cdot m \cdot \text{sec}$
B_{m1}	6.46×10^{-5}	$N \cdot m \cdot \text{sec}^2$
B_0	0.01	$N \cdot m \cdot \text{sec}$
B_1	-7.56×10^{-5}	$N \cdot m \cdot \text{sec}^2$
B_2	8.11×10^{-7}	$N \cdot M \cdot \text{sec}^3$
C_{tm}	1.59×10^{-13}	$m^5/(n \cdot \text{sec})$
C_{tm0}	7.69×10^{-13}	$m^5/(N \cdot \text{sec})$
C_{tm1}	2.91×10^{-14}	m^5/N
C_0	2.24×10^{-8}	$m^5(N/m^2)^{1-n}/(N \cdot \text{sec})$
C_1	1.34×10^{-29}	$m^5(N/m^2)^{1-n}/N$
$C_0 K_v$	1.521×10^{-9}	$m^3(mA \cdot \text{sec} \cdot \sqrt{N/m^2})$
D_m	1.958×10^{-6}	m^3/rad
J_t	1.08×10^{-3}	$N \cdot m \cdot \text{sec}^2$
K_T	4.1586×10^{-13}	volt/rpm
K_{vc}	8.	mA/volt
n	0.3	
V_t	8.1×10^{-5}	m^3
β_e	690.	$M \cdot N/m^2$
τ_v	0.24	sec

본 연구에 사용한 시스템 상수들을 구한 결과는 Table 1에 나타나 있다.

5.3 실험

케환 선형화 방법과 기존의 선형화 방법에 의한 모델에 근거한 디지털 상태 케환 제어의 응답 특성을 비교 고찰하기 위하여 케환 선형화한 모델에 대한 디지털 상태 케환 제어와, Taylor식 선형화 모델에 대한 디지털 상태 케환 제어, Taylor식 선형화 모델에 대해 적분기를 사용한 디지털 상태 케환 제어의 3가지 경우에 대하여 실험을 실시하여 비교하였다. 이때 Taylor식 선형모델을 상태 케환 제어할 때에도 시간 지연 문제와 각 상태를 다 알기 어려운 점등을 고려하여 일단 앞섬 상태 추정기를 사용하였고, 극점선정도 ITAE 기준으로 선정하여 동일한 조건에서 비교하였다.

1단 앞섬 상태 추정기의 초기조건은 0 점을 사용하였으며, 상태 케환 이득은 전체 시스템의 동특성이 절점 주파수 50 rad/s 인 ITAE 기준의 경우와 같도록 선정하였으며, 1단 앞섬 상태 추정기 이득

은 ITAE 기준에서 절점 주파수가 5 rad/s인 경우와 같아지도록 선정하였다. 기준입력으로는 계단입력을 사용하였으며 기준입력 $R=10, 30, 50$ rad/s인 경우와 외부토크 $T_L=0, 5, 10$ Nm의 경우를 실험하였다. 데이터의 획득은 실시간 제어에 지장을 주지 않기 위하여, A/D 변환기로 읽은 회전속도와 부하압력, 연산된 제어입력과 각 상태값들을 일단 처리 속도가 빠른 RAM(random access memory)에 저장하였다가 제어가 끝난 후에 보조 기억장치로 옮기는 방법을 사용하였다.

5.4 시뮬레이션

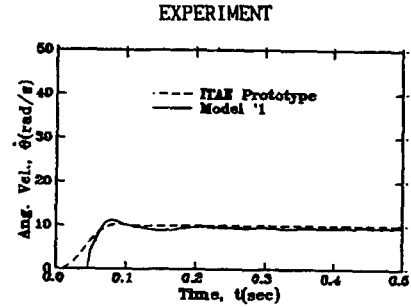
시뮬레이션을 실시한 목적은 실제 산업 일반에서 사용되고 있는 전기 유압 장치들보다, 본 연구에 사용한 실험 장치가 작동 범위가 작으므로, 실제로 사용하고 있는 비선형성이 큰 범위에서의 실험을 실시할 수 없었으므로 실험의 범위보다 넓은 작동 범위에서의 응답특성을 고찰하기 위함이다. 시뮬레이션에 사용한 전기유압 속도제어 시스템은 식(10)의 비선형모델이며, 시뮬레이션에 사용한 디지털 제어기들은 실험의 경우와 동일한 3종류의 제어기이다. 시뮬레이션의 타당성을 보이기 위하여 실험과 동일한 경우를 시뮬레이션하였고, 실험 범위를 벗어난 경우에 대하여도 시뮬레이션 하였다. 따라서 응답특성을 고찰하기 위하여 사용한 기준입력은 계단입력으로서 각각 10, 30, 50 rad/s와 150 rad/s의 경우를 사용하였다. 외부토크에 대한 응답특성도 고찰하기 위하여 1초에서 가해져서 1.5초에 제거 되는 5Nm와 10Nm의 사각과 형태의 외부토크를 사용하였다. 연속시간 시스템을 디지털 제어하는 모델을 시뮬레이션하기 위하여 디지털 제어기의 샘플링 시간을 실험과 동일하게 0.005 초로 고정하였으며, 연속 시간 전기유압 속도제어시스템(9)의 시뮬레이션은 4차 Runge-Kutta 적분방법을 사용하여 0.0001초의 적분간격으로 적분하였다.

6. 결과 및 고찰

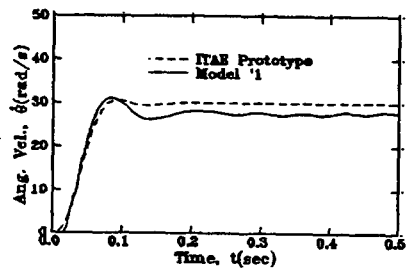
전기유압 속도제어 시스템을 케환 선형화한 모델에 대한 디지털 상태 케환 제어의 응답특성을 고찰하기 위하여 실험과 시뮬레이션을 실시하였다. 혼동을 피하기 위하여 다음의 약칭을 사용한다. 모델 #1=Taylor식 선형화 모델, 모델#2=케환 선형화 모델.

6.1 Taylor식 선형화 모델에 대한 디지털 상태 케환 제어의 응답 특성

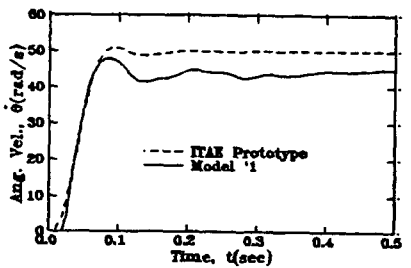
Fig. 7의 (a), (b), (c)는 서어보 밸브의 중립점



a) Ref. Inp. = 10 rad/s

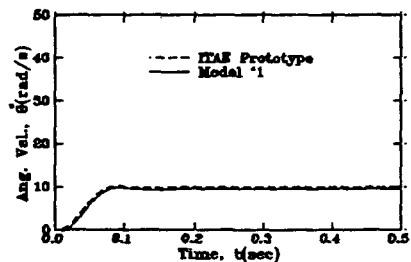


b) Ref. Inp. = 30 rad/s

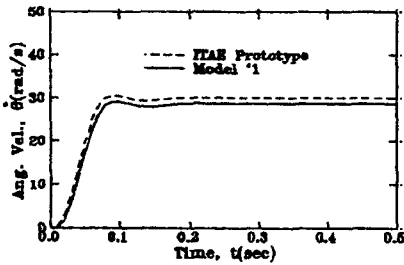


c) Ref. Inp. = 50 rad/s

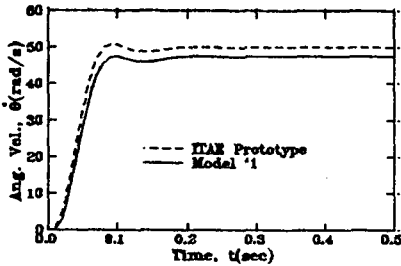
SIMULATION



d) Ref. Inp. = 10 rad/s



e) Ref. Inp. = 30 rad/s



f) Ref. Inp. = 50 rad/s

Fig. 7 Step Responses of State Feedback Controller Based on the Taylor Linearized Model (Model #1, $T_L=0$ Nm)

에서 선형화한 Taylor식 선형화 모델(모델 #1)에 근거해 설계된 디지털 상태 폐환 제어기로 비선형 전기유압 속도제어 시스템을 제어한 경우의 과도 응답 특성으로서 실험 결과이며, (d), (e), (f)는 각각 (a), (b), (c)에 대응하는 시뮬레이션 결과이다. 기준입력이 10, 30, 50 rad/s이고 외부토크는 0Nm인 무부하이다. Fig. 7에서 점선은 ITAE 기준에 대한 과도 응답으로서 절점 주파수가 $w=50$ rad/s인 경우이다. Fig. 7에서 보는 바와 같이 실험 및 시뮬레이션 결과가 약간의 정상 상태 오차의 차이는 존재하나 거의 같은 경향을 보여주며, 모델 #1에 근거해 설계한 상태 폐환 제어기로 전기유압 속도제어 시스템을 제어할 경우, 작동점이 선형화점에서 벗어날 수록 정상 상태 오차가 커짐을 보여주고 있다. Fig. 8은 외부 부하에 대한 응답 특성으로서, 기준 입력이 20 rad/s이고 외부 토크가 각각 5, 10 Nm인 경우의 실험 및 시뮬레이션 결과이다. 외부 부하 장치에서 토크가 생성되는 특성은 점선으로 나타나 있다. Fig. 8에서 보는 바와 같이 외부 토크가 가해지면 정상 상태 오차가

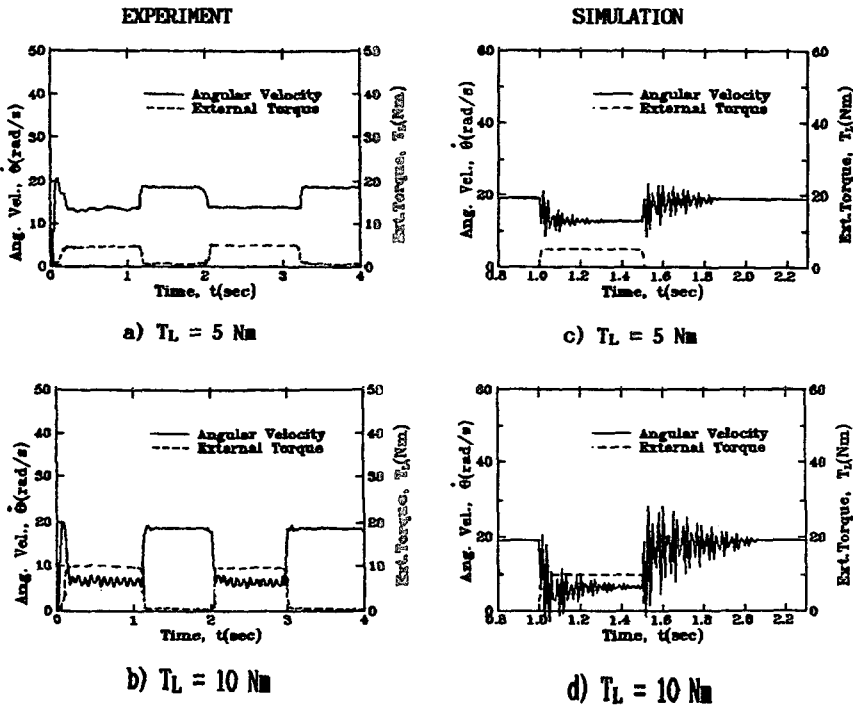


Fig. 8 Step responses of state feedback controller based on the Taylor linearized model (model #1, Ref. Inp.=20rad/s)

존재 하게되며 정상 상태 오차의 크기는 외부 토크의 크기에 비례함을 볼 수 있다. 또한 응답 초기(0~0.2초)의 오우버 슈우트처럼 보이는 부분은, 외부부하 생성장치의 특성이 어느 속도 이상 회전 이 된 후 에야 부하 토크가 발생되기 때문에 나타나는 결과로서, 외부 부하 장치가 완벽하게 4과 파형의 토크를 생성할 경우 이러한 현상은 제거 되어 응답초기 부터 정상 상태 오차가 존재하게 될 것이다. 따라서 Fig. 8에서 보는 바와 같이 외부부하에 대한 제어가 전혀 실행되지 못하고 정상 상태 오차가 존재함을 보여주고 있다. 이러한 정상상태

오차를 제거하기 위해서는 제어기에 적분기의 도입 이 필요하다. Fig. 9는 Fig. 7의 모델 #1에 적분기를 갖는 디지털 상태 제한 제어기를 구성하여 전기 유압 속도제어 시스템을 제어한 과도 응답 특성이며 (a), (b), (c)는 실험 결과로서 무부하에서 기준입력이 10, 30, 50 rad/s인 경우이며 (d), (e), (f)는 (a), (b), (c)에 대응하는 시뮬레이션 결과이다. 적분기를 도입하여 정상 상태 오차를 제거하기는 하였으나 기준 속도가 커짐에 따라, 즉 작동점이 선형화한 점에서 멀어질 수록 과도 응답성능이 저하되고 있음을 볼 수 있다. 시뮬레이션의 응답특

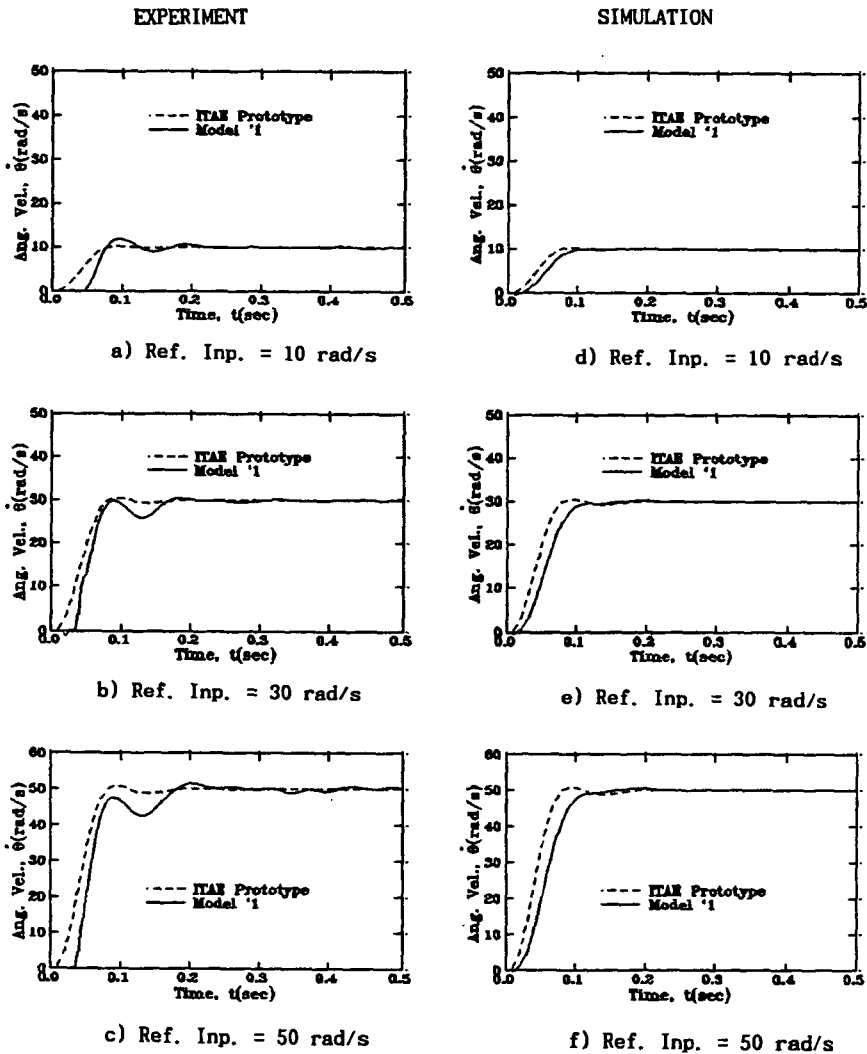


Fig. 9 Step responses of state feedback controller with a integrator based on the taylor linearized model(model #1, $T_L=0$ Nm)

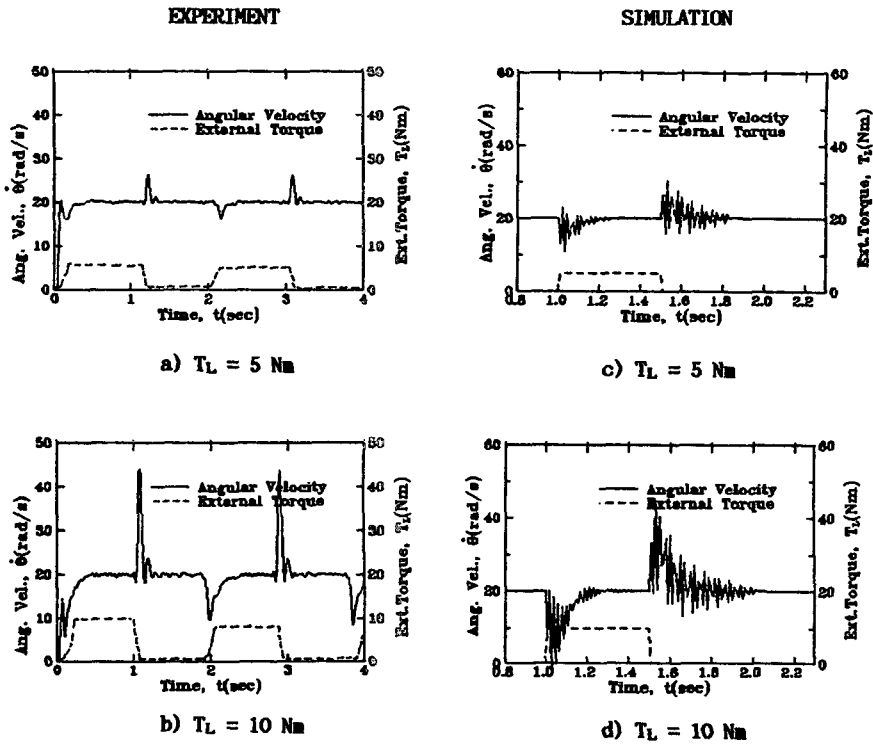


Fig. 10 Step responses of state feedback controller with an integrator based on the Taylor linearized model (model #1, Ref. Inp.=20rad/s)

성 결과도 실험 결과와 비교할 때, 초기 과도 상태의 응답 특성의 차이외에는 거의 일치함을 보여 주고 있다. Fig. 10은 적분기를 갖는 디지털 상태 궤환 제어기를 사용한 경우의 외부 부하에 대한 응답 특성으로서, 기준 입력이 20 rad/s인 경우에 외부 토크가 각각 5, 10 Nm인 경우의 실험 및 시뮬레이션 결과이다. 적분기가 있는 상태 궤환 제어기, 외부 토크가 가해지거나 제거된 경우 순간적인 피크가 존재하나 곧 감소되어 정상 상태 오차가 없어짐을 볼 수 있다. 그러나 외부 토크가 커지게 되면(Fig. 10의 (b)와 (d)의 경우) 피크가 감소되는 속도가 느려짐을 보여준다. 이는 외부토크가 커질수록 시스템의 비선형성이 커지는데, 즉 작동점이 선형화점에서 멀어지는데 이를 단지 적분기로서 보상하고 있으므로 지연 현상이 발생된다고 생각된다.

따라서 Taylor식 선형화 방법으로 전기유압 속도제어 시스템을 선형화한 모델에 대하여 설계된 상태 궤환 제어기로는, 적분기를 도입하여 정상 상태 오차는 제거할 수는 있으나, 모델링 되지 않은

시스템의 비선형 요소와 선형화 오차등으로 인하여 원하는 등특성을 정확하게 부여할 수 없다.

6.2 궤환 선형화 모델에 대한 디지털 상태 궤환 제어

Fig. 11의 (a), (b), (c)는 모델 #2(비선형 오리피스 방정식과 비선형 손실 계수들을 갖는 비선형 모델)을 궤환 선형화한 등가 선형 모델에 대한 상태 궤환 제어기를 1단 앞섬 상태 추정기를 갖는 디지털 상태 궤환 제어기로 실현하여 비선형 전기유압 속도제어 시스템을 제어한 경우의 과도 응답 특성으로서 실험 결과이며, (d), (e), (f)는 각각 (a), (b), (c)에 대응하는 시뮬레이션 결과이다. 그림에서 보는 바와 같이 실험 및 시뮬레이션 결과가 약간의 과도 상태에서의 차이외에는 거의 잘 일치함을 보여주며, 과도응답에서의 약간의 차이는 모델링 오차 때문으로 생각된다. 실험 및 시뮬레이션 결과 모두 기준 입력의 변화에 관계없이, 즉 작동점 변화에 관계없이 기준입력을 잘 추종함을 볼 수 있다. Fig. 12은 외부 부하에 대한 응답 특성으로

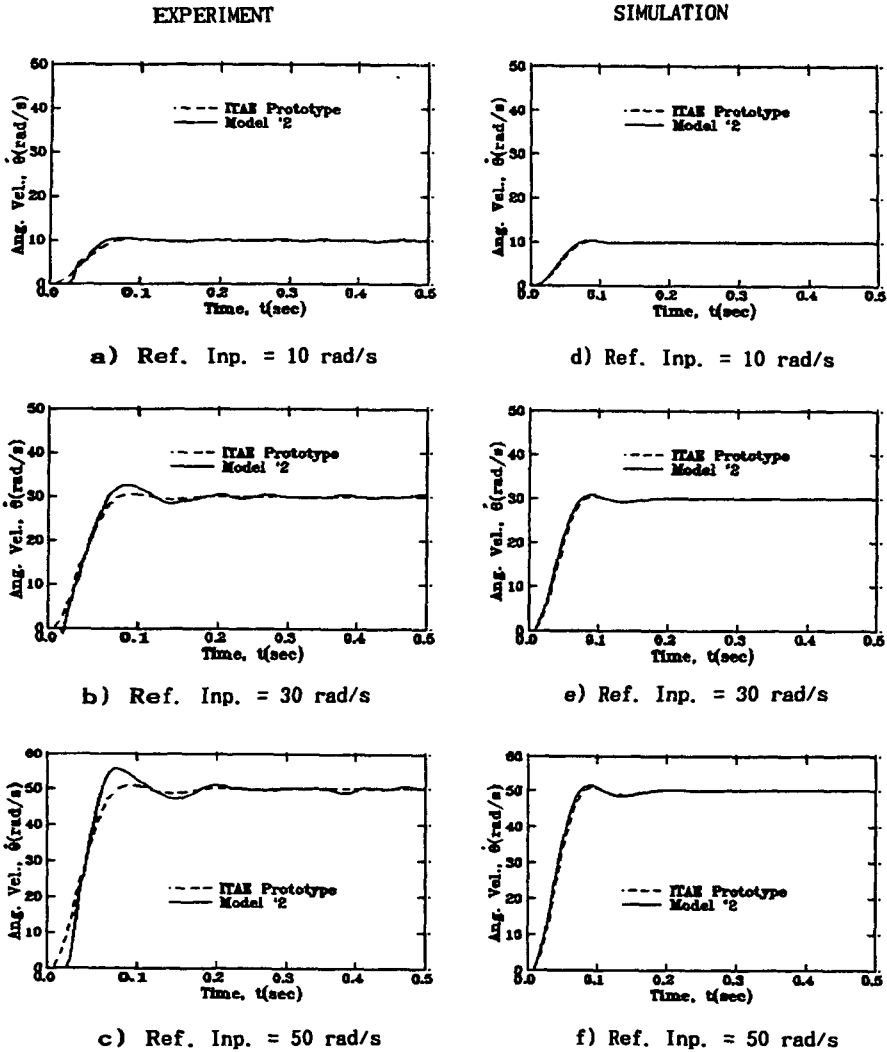


Fig. 11 Step responses of state feedback controller based on the feedback linearized model (model #2, $T_L=0$ Nm)

서, 기준 입력이 20 rad/s이고 외부 토크가 각각 5, 10 Nm인 경우의 실험 및 시뮬레이션 결과이다. Fig. 12에서 보는 바와 같이 외부 토크가 가해졌을 때, 순간적인 피크는 존재하나 곧 감소되며, 정상 상태 오차없이 기준 입력을 잘 추종함을 보여준다. 외부 부하를 모델링에 포함시켜 제어할 수 있으므로 적분기가 없어도 정상 상태 오차가 발생하지 않는다.

따라서 계환 선형화 모델에 대한 상태 계환 제어는 넓은 작동 범위, 즉 비선형성의 변화가 발생하는 회전 속도의 변화나 부하 압력의 변화에도 불구

하고 원하는 ITAE 기준의 동특성을 잘 할당할 수 있음을 볼 수 있다.

6.3 각 모델의 응답 특성 비교 고찰

실험장치의 사용한계로 인하여 상용화된 작업조건 까지 실험할 수가 없었으므로 시뮬레이션 상에서 이 제한을 없애고 응답을 고찰 하였다. 적분기가 없는 Taylor식 선형 모델은 비교의 의미가 없으므로, 적분기가 있는 Taylor식 선형 모델(모델 #1)과 비선형 손실계수를 갖는 비선형 모델에 대한 계환 선형화 모델(모델 #2)의 응답 특성을 비교

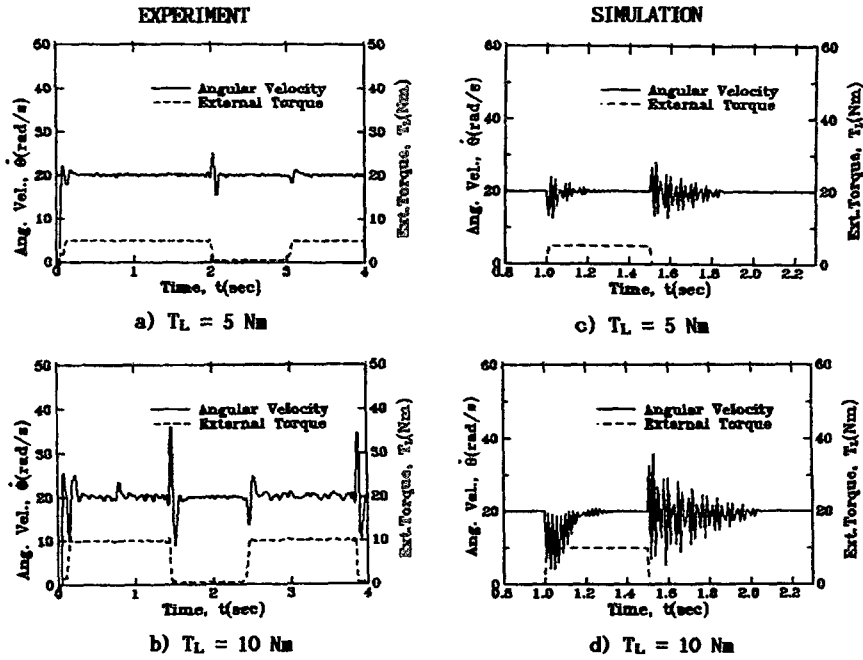


Fig. 12 Step responses of state feedback controller based on the feedback linearized model (model #2, Ref. Inp.=20rad/s)

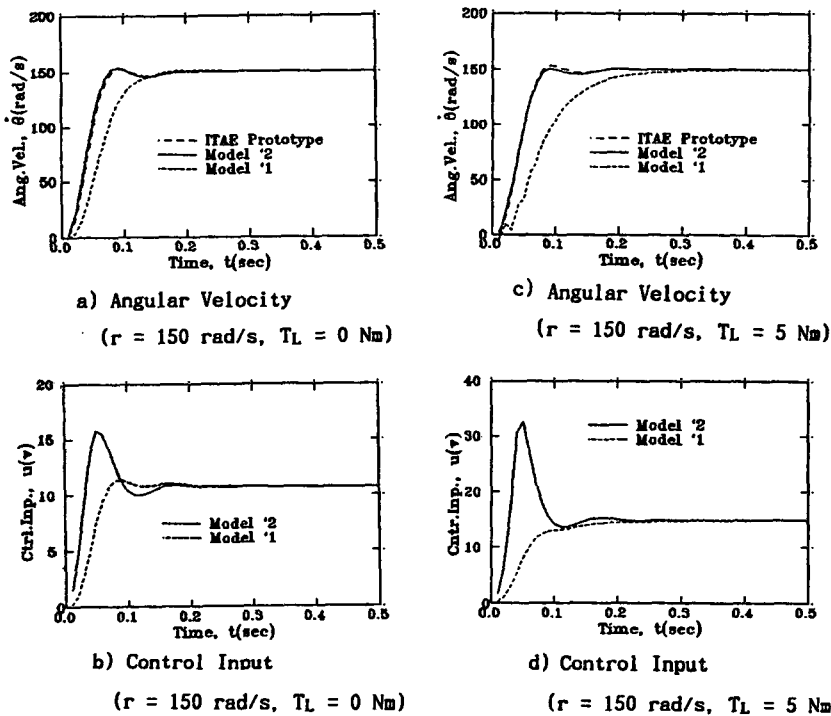


Fig. 13 Comparison of the step responses of the state feedback controller based on model #2 to the state feedback controller with integrator based on mode #1 (Ref. Inp.=150rad/sec, $T_L = 0, 5$ Nm at 0 sec)

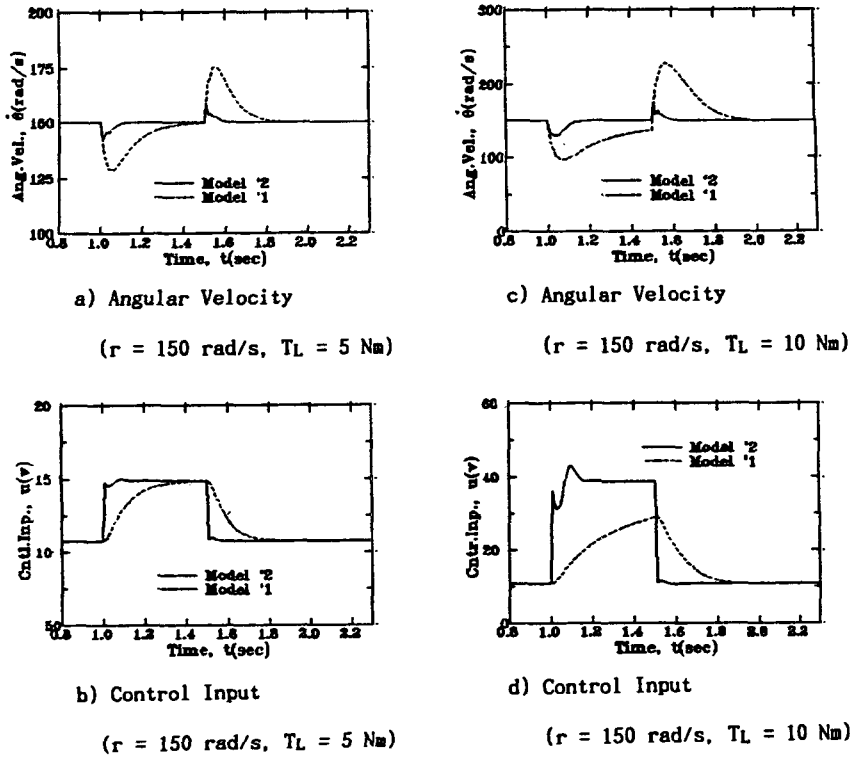


Fig. 14 Comparison of the step responses of the state feedback controller based on model #2 to the state feedback controller with Integrator(Ref. Inp.=150rad/sec, $T_L=5, 10$ Nm at 1 sec)

하였다. Fig. 13과 Fig. 14는 기준입력이 150 rad/s, 무부하 상태의 경우에 ITAE 기준과 모델 #2에 대한 케환 선형화 모델의 상태 케환 제어 응답 특성, 모델 #1에 적분기가 있는 상태 케환 제어의 응답을 비교한 것이다. 그림에서 점선은 모델 #1, 실선은 모델 #2에 대한 케환 선형화 모델의 상태 케환 제어 응답이다. Fig. 13의 (a)와 (b)에서 보는바와 같이 모델 #2에 대한 케환 선형화 모델의 상태 케환 제어 응답은 150 rad/s인 경우에도 ITAE 기준의 응답과 거의 일치함을 볼 수 있으며, 모델 #1에 적분기가 있는 상태 케환 제어의 응답은 정상 상태 오차는 제거 되었으나 상승시간(rise time)이 길어지는 등의 과도 상태 응답이 좋지않게 됨을 볼 수 있다. 따라서 모델 #1을 사용하는 경우 적분기가 있어도, 작동점이 선형화한 점에서 멀어지게 되면, 정상 상태 오차는 제거할 수 있으나 원하는 동특성을 얻을 수 없다. Fig. 13의 (c)와 (d)는 기준입력이 150 rad/s인 경우, 초기 5 Nm의 부하가 걸려 있는 상태에서 회전하였을 경우의 과도 응답이다.

모델 #2에 대한 케환 선형화 모델의 상태 케환 제어 응답은 무부하의 경우와 동일하게 ITAE 기준의 응답과 거의 일치하고 있으나, 모델 #1에 적분기가 있는 상태 케환 제어의 응답은 무부하의 경우보다 더욱 상승시간이 길어졌음을 볼 수 있다. Fig. 14는 기준입력이 150 rad/s인 경우, 정상 상태(1sec)에서 5 Nm와 10 Nm의 외부 토크 부하가 가해졌을 때의 응답이다. 외부 부하가 커질 수록 모델 #1에 적분기가 있는 제어(점선)는 응답 속도가 느려짐을 볼 수 있다. 그러나 모델 #2에 대한 제어(실선)는 초기 피크는 존재하나 곧 감쇠되며 정상 상태 오차 없이 잘 제어됨을 보여주며 모델 #1에 적분기가 있는 상태 케환 제어의 응답보다 외부 부하에 대하여 강인(robust)함을 볼 수 있다.

7. 결 론

이상의 연구 결과에서 다음의 결론을 얻었다.

- (1) 비선형 전기유압 속도제어 시스템에 케환 선

형화 방법을 사용하여, 밸브 오리피스에서의 비선형성과 모터의 점성 감쇠 계수의 비선형성, 총 누설유량의 비선형성 및 외부 부하들을 고려할 수 있는 등가 선형 모델을 구할 수 있었다.

(2) 전기유압 속도제어 시스템에 대한 비선형 변환이 전체적 변환이 될 수 있는 필요충분 조건을 만족함을 보임으로서, 구해진 등가 선형 시스템이 모든 작동 범위에서 원래의 비선형 시스템과 동일한 거동을 갖게 됨을 보였다.

(3) 구해진 제환 선형화 모델에 대한 상태 제환 제어를 디지털제어로 실현 하기 위하여 1단 앞섬 상태 추정기를 사용하였다. 이 상태 추정기를 사용함으로써 Grizzle이나 Lee의 방법^(11,12)보다 실현하기 쉽고, 실시간 제어가 가능하며, 밸브의 모든 작업 위치에서도 좋은 응답특성을 얻을 수 있는 디지털 제어를 구현할 수 있었다. 또한 1단 앞섬 상태 추정기를 사용함으로써 직접 비선형 변환된 선형 상태를 추정 할 수 있었으므로 연산시간을 줄일 수 있었다.

(4) 제환 선형화한 등가 선형 모델과 Taylor식 선형화 모델의 정확도를 비교하기 위하여, 각각의 선형화 모델에 근거한 디지털 상태 제환 제어를 구성하여 실험과 시뮬레이션을 실시한 결과, Taylor식 선형화 모델에 대한 상태 제환 제어기로는, 모델링 되지 않은 시스템의 비선형 요소와 선형화 오차등으로 인하여, 원하는 동특성을 정확하게 부여할 수 없었다. 적분기를 도입한 경우도 정상 상태 오차는 제거할 수 있었으나, 작동점이 선형화한 점에서 벗어날수록 과도 응답 특성이 좋지 않게 됨을 볼 수 있었다. 제환 선형화한 등가 선형 모델에 대한 디지털 상태 제환 제어는 모든 작업 영역에서 정상 상태 오차없이 ITAE 기준에 의한 원하는 동특성을 부여할 수 있었으며, 적분기가 없어도 외부 부하에 대해 강인한 특성을 보여 주었다.

(5) 향후 다음과 같은 추가적인 연구가 필요하다고 본다. 첫째, 제환 선형화 방법은 정확한 수학적 비선형 모델을 요구하므로, 전기유압 속도제어 시스템에 대해서도 보다 정확하고 쉽게 비선형 모델을 구할 수 있는 비선형 모델링 기법에 관한 연구가 필요하다. 둘째, 본 연구의 경우 실험 장치에 대한 제약으로 인하여 시스템의 비선형성이 비교적 크지 않은 범위에서의 실험만이 가능하였으므로 기존의 제어기(PID 제어기 등) 보다 현저한 성능 개

선은 보여주지 못하였다고 생각한다. 그러나 이론 및 시뮬레이션에 의하여 비선형성이 큰 고압, 고속의 경우에서도 좋은 응답 특성을 얻을 수 있음을 보여주었으므로 이에 대한 실험적 검증에 관한 연구도 필요하다고 보며, 검증해 볼 경우 제환 선형화 모델에 근거한 제어기가 기존 근사 선형화 모델에 근거한 제어기보다 우수한 제어성능을 가지고 있음이 더욱 확실히 증명되리라고 판단한다. 셋째, 본 연구는 선형화 방법에 대한 비교를 목적으로 하였으므로 제어기 설계에 관한 연구는 ITAE 기준에 의한 극점 배치 방법에 국한하였다. 수학적 비선형 모델과 실제의 시스템과는 어느정도의 모델링 오차가 존재할 수밖에 없으므로 이러한 모델링 오차에도 강인할 수 있는 제어기의 설계 방법에 대한 추가적인 연구가 요망된다. 넷째로 비선형 변환에 의한 제환 선형화 제어에 대한 내적 안정성(internal stability) 문제에 관한 연구이다. 이 문제에 대하여는 아직도 새로운 논문들이 발표되는 중에 있으므로 본 연구에 관해서도 이에 대한 추가적인 연구가 필요하다.

참고문헌

- (1) Wilson, W.E., 1946, "Rotary-Pump Theory," Trans. ASME, vol. 68, pp. 371~384.
- (2) Merritt, H.E., 1967, "Hydraulic Control Systems," John Wiley & Sons.
- (3) McCandlish, D. and Dorey, R.E., 1984, "The Mathematical Modelling of Hydrostatic Pumps and Motors," Proc. Instn. Mech. Engrs. vol. 1988, no. 10, pp. 165~174.
- (4) Pacey, D.A., Turnquist, R. O. and Clark, S.J., 1983, "A Coefficient Model for a Hydrostatic Transmission," Trans. ASME, vol. 26, no. 3, pp. 669~672, 677.
- (5) Krener, A. J., 1973, "On the Equivalence of Control Systems and the Linearization of Nonlinear Systems, SIAM J. Contr., vol. 11, no. 4, pp. 670~676.
- (6) Brockett, R.W., 1978, "Feedback Invariants for Nonlinear Systems, IFAC Congress, Helsinki, pp. 1115~1120.
- (7) Jakubczyk, B. and Respondek, W., 1980, "On the Linearization of Control Systems," Bull.

- Acad. Polon. Sci. Ser. Math. Astron. Physics, 28, pp. 517~522.
- (8) Su, R., 1982, "On the Linear Equivalent of Nonlinear Systems," *Sys. and Contr. Letters*, vol. 2, no.1, Jul., pp. 48~52.
- (9) Hunt, L.R., Su, R. and Meyer, G., 1983, "Global Transformations of Nonlinear Systems," *IEEE Trans. on Auto. Contr.*, vol. AC-28, no. 1, Jan., pp. 24~31.
- (10) Cheng, D., Tarn, T. and Isidori, A., 1985, "Global External Linearization of Nonlinear Systems via Feedback," *IEEE Trans. on Auto. Contr.*, vol. AC0-30, pp. 808~811.
- (11) Grizzle, J. W., and Kokotovic, P.V., 1988, "Feedback Linearization of Sampled Data Systems," *IEEE Trans. on Auto. Contr.*, vol. AC-33, pp. 857~859.
- (12) Lee, H. G., and Marcus, S. I., 1987, "Remarks on Discretization and Linear Equivalence of Continuous Time Nonlinear System," *Proc. 26th IEEE CDC*.
- (13) Tayer, W. J., 1958, "Transfer Functions for MOOG Servovalves," *MOOG Technicsl Bulletin* 103.
- (14) Franklin, G.F., Powell, J.D., Amami-Naeini, A., 1986, "Feedback Control of Dynamic Systems," Addison-Wesley, pp. 327~400.
- (15) Kailath, T., 1980, "Linear Systems," Prentice-Hall.
- (16) Boothby, W.M., 1975, "An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry," Academic Press.
- (17) Stearns, S.D., and Hush, D.R., 1990, "Digital Signal Analysis," Prentice-Hall., pp. 209~213.

부록 I

● 수학적 배경

정의 1 : F 와 G 가 R^n 에서의 C^∞ 벡터장이라고 하면 F 와 G 의 Lie 괄호(Lie bracket)은 다음과 같이 정의된다. ⁽⁸⁾

$$[F, G] = \frac{\partial G}{\partial x} F - \frac{\partial F}{\partial x} G \tag{A.1}$$

여기서 $\frac{\partial G}{\partial x}$ 와 $\frac{\partial F}{\partial x}$ 는 $n \times n$ Jacobian 행렬이다.

정의된 Lie 괄호 역시 R^n 에서의 벡터장이며, 한 벡터장에서 다른 벡터장에 대한 Lie 미분을 나타낸다. 연속적(successive) Lie 괄호는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} (ad^1 F, G) &= [F, G] \\ (ad^2 F, G) &= [F, [F, G]] \\ &\vdots \\ &\vdots \\ (ad^k F, G) &= [F, (ad^{k-1} F, G)] \end{aligned} \tag{A.2}$$

정의 2 : R_d 에서 C^∞ 벡터장의 집합 $\{F_1, F_2, \dots, F_r\}$ 에서 다음과 같은 C^∞ 함수 $\gamma_{ijk}(x)$ 가 존재한다면, 그 집합을 "involutive"라 한다. ⁽⁸⁾

$$[F_i, F_j](x) = \sum_{k=1}^r \gamma_{ijk}(x) F_k(x) \tag{A.3}$$

정리 1(Frobenius) ⁽²⁰⁾ : 선형적으로 독립된 벡터장의 집합에서 involutiveness는 적분가능성(integrability)과 동일하다.

정리 2(비율 조건) ⁽⁹⁾ : Jacobian 행렬의 $J(x)$ 인 미분가능한 사상 $H : R^n \rightarrow R^n$ 이 존재할때, $J(x)$ 의 주 선도 소행렬(leading principal minor) $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ 의 절대값이, 모든 $x \in R^n$ 에 대하여, 다음의 식을 만족하는 상수 $\epsilon > 0$ 이 존재하면, H 는 R^n 에서 R^n 으로의 전단사 사상이다.

$$|\Delta_1| \geq \epsilon, \frac{|\Delta_2|}{|\Delta_1|} \geq \epsilon, \dots, \frac{|\Delta_n|}{|\Delta_{n-1}|} \geq \epsilon \tag{A.4}$$

여기서 정방행렬 $A = [a_{ij}]$ 의 경우 $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= a_{11} \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \Delta_n &= |A| \end{aligned} \tag{A.5}$$

여기서 $|\cdot|$ 은 행렬식(determinant)이다.

다음과 같은 비선형 연속시간 시스템을 고려한다.

$$\dot{x}(t) = F(x(t)) + u(t)G(x(t)) \tag{A.6}$$

여기서 F 와 G 는 R^n 공간 내의 개집합 U 에서 정의 되는 C^∞ 벡터장이고 $F(0) = 0$ 이다.

정리 3⁽⁹⁾: 만일 i) 시스템 (A.6)의 가제어성 행렬 $\{G, [F, G], \dots, (ad^{n-1}F, G)\}$ 이 R^n 에서 비특이 (non-singular)이고, ii) 집합 $\{G, [F, G], (ad^{n-2}F, G)\}$ 가 R^n 에서 involutive이고, iii) 변환 T 의 Jacobian 행렬이 C^∞ 에서 비울조건(ratio condition)을 만족하면, 다음과 같은 특성을 갖는 C^∞ 변환 $T=T(T_1, T_2, \dots, T_{n-1})$ 이 존재한다.

(a) $T(0)=0$ (A.7)

(b) T_1, T_2, \dots, T_n 은 x_1, x_2, \dots, x_n 만의 함수이고, R^n 의 각 점에서 nxn Jacobian 행렬은 비특이이다.

(c) $T_{n+1}=T_{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_n, u)$ (A. 8)

(d) T 는 시스템(A.6)을 다음과 같은 선형시스템으로 사상(mapping)시킨다.

$$\begin{aligned} \dot{T}_1 &= T_2 \\ \dot{T}_2 &= T_3 \\ &\vdots \\ \dot{T}_n &= T_{n+1} \end{aligned} \tag{A.9}$$

(e) 변환 $T=T(T_1, T_2, \dots, T_n)$ 은 R^n 에서 일대일 대응이고 $T=T(T_1, T_2, \dots, T_{n+1})$ 는 R^{n+1} 에서 일대일 대응이다.

부록 II

● 비선형 변환 과정

비선형 변환 T 를 구하는 과정은 다음과 같다.

식 (A.9)로 부터

$$\frac{dT_i}{dt} = T_{i+1} \quad i=1, 2, \dots, n \tag{A.10}$$

그러므로

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial T_i}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} + \frac{\partial T_i}{\partial u} \frac{du}{dt} \right) = T_{i+1} \tag{A. 11}$$

여기서 T_1, T_2, \dots, T_n 은 x_i 만의 함수이고, $T_{n+1}=T_{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_n, u)$

이므로

$$\left. \begin{aligned} \frac{dT_i}{du} &= 0 \quad i=1, 2, \dots, n \\ \frac{dT_{n+1}}{du} &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{A. 12}$$

그러므로

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial T_i}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} = T_{i+1} \quad i=1, 2, \dots, n \tag{A. 13}$$

비선형변환은 식(A.12), (A.13)의 연립방정식을 풀음으로서 구할 수 있다.