

〈論 文〉

비병치 유연계의 시간지연 이산제어

강 민 식*

(1991년 12월 12일 접수)

Time Delay Control of Noncolocated Flexible System in z-Domain

Min Sig Kang

Key Words : Colocated Control(병치제어), Noncolocated Control(비병치제어), Time Delay Control(시간지연제어), Discrete Time Control(이산시간제어), Closed-loop Stability(폐회로안정성), Nonminimum Phase(비최소위상), Eigen Value(고유값), Eigen Function(특이함수)

Abstract

This paper concerns a discrete time control of noncolocated flexible mechanical systems by using time delay relation. A stability criterion of closed-loop system is derived in discrete time domain and a graphic method is developed for designing controllers. Based on this method, a derivative controller is designed for a simply supported uniform beam in the cases of colocation without time delay and of noncolocation with time delay. Some simulation results show the effectiveness of the suggested control.

기 호 설 명

$C(z) = N(z)/D(z)$: 제어기 전달함수
 d : 제어기 시간지연 스텝
 EI : 보의 굽힘강성
 $f_c(x,t), f_e(x,t)$: 제어력, 외란
 f_k : k -번째 모드 고유진동수 (Hz)
 $K_p, K_d/T$: 비례제어기와 미분제어기의 게인
 m : 보의 단위 길이당 질량
 L : 보의 길이
 N : 제어대상 최고차 모드 수
 S : 유연계 (Ω)의 경계
 T : 샘플링 간격
 T_d : 지연 시간
 $v_k(x)$: k -번째 모드 특이 함수
 $W_o(x, \xi, z)$: z -평면 (z -domain) 개회로 전달 함수
 $W_{cl}(x, \xi, z)$: z -평면 폐회로 전달 함수

$w_k(\mu)$: w -평면에서 k -번째 모드의 근궤적
 x_a, x_s : 액츄에이터와 센서 위치
 $y(x;t)$: 변위
 $\bar{y}(x,s), \bar{y}(x,z)$: 변위의 라플라스 변환과 z -변환
 β_k : w -영역 k -번째 모드의 극점
 δ : Dirac-Delta 함수
 λ_k, ω_k : s -영역 k -번째 모드의 고유값과 고유진동수 (rad/sec)
 μ, μ_{cr} : 제어기 게인과 게인의 폐회로 안정 한계값
 Ω : 유연계
 $v^*(x)$: 복소함수 $v(x)$ 의 공액 복소수

1. 서 론

기계적 구조물이 점차 경량화되고 동작이 고속화됨에 따라 구조물은 더욱 유연해지고 결과적으로 진동은 중요한 문제로 대두 되었으며 이 진동을 감

*정회원, 국방과학연구소

쇠시키기 위한 많은 연구가 진행되어 왔는데, 특히 능동제어는 진동감쇄에 매우 효과적이어서 많은 주목을 받아왔다. 제어방법은 센서와 액츄에이터의 위치에 따라 병치제어 (colocated control)와 비병치제어 (noncolocated control)로 나눌 수 있는데 센서와 액츄에이터가 동일위치에 있는 병치제어는 그 감쇠효과가 좋고 제어의 파라미터 불확실성이나 비선형성등에 강인한 특성을 갖고있어 많이 응용되고 있다.^(1~3) 그러나 실제 제어시 센서와 액츄에이터를 서로 다른 위치에 장치 해야되는 경우 비병치제어를 수행해야 되는데 이 비병치제어는 제어기 설계에 많은 어려움이 있다. 그 이유는 센서와 액츄에이터 사이에 노드점 (node point)이 존재할 경우 비최소 위상계 (nonminimum phase system)가 되어 안정성을 보장하는 제어기 설계가 어려워지기 때문이며 무한개의 모드를 모두 고려한 제어기 설계는 불가능 하다.^(4,5) 비병치제어의 이러한 문제를 해결하기 위해 Yang과 Mote는 케환제어기에 시간 지연을 도입하는 방법을 제시하였다.^(6~8) 이 방법은 비병치된 센서와 액츄에이터 사이의 위상차를 시간지연 관계로 변환 보상하여 마치 병치제어에서와 같은 효과를 얻게 한다.

지금까지 연구된 유연제어는 연속시간제어 (continuous time control)에 관한것이 많은데 실제 제어시 이산제어가 많이 응용되고 있고 앞으로 더많은 이용이 예상된다. 본 논문에서는 이산제어 관점에서 비병치제어를 고려한다. 연속시간계에서 많은 장점을 가진 병치제어는 이산시간계로 변환되면 샘플링과 홀딩에서 야기되는 시간지연 요소때문에 그 특성이 달라진다.^(9,10) 따라서 본 논문에서는 연속시간계에서 제안된 시간지연을 갖는 비병치제어를 이산시간계로 확장하고 제어기 설계 방법을 제시코저 한다.

2장에서는 연속시간계의 지연시간 비병치제어를 이산시간 영역으로 확장하고 3장에서는 폐회로 안정조건을 유도하며 4장에서 단순지지 된 균일 단면 Euler-Bernoulli보에 대한 적용예를 제시하며 주파수-위상 영역에서 제어기 설계 특성을 보인다. 마지막으로 5장에서는 모의시험을 통해 제안된 설계방법을 입증한다.

2. 유연계의 모델 및 비병치 이산제어

다음의 편미분 방정식으로 표현되는 선형 유연계

를 고려하면

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2}y(x,t) + G\frac{\partial}{\partial t}y(x,t) + Ky(x,t) \\ = f_c(x,t) + f_e(x,t), \quad x \in \Omega, t > 0 \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 $y(x,t)$ 는 유연계 (Ω)에 존재하는 점 x 에서의 변위이며 $f_c(x,t)$ 와 $f_e(x,t)$ 는 각각 제어력과 외란이다. G 는 Coriolis 가속도 관련된 역대칭 미분연산자 (skew-symmetric differential operator)이며 K 는 양한정 (positive definite) 대칭 $2p$ 차 미분 연산자이다. 이 연속계가 다음의 경계조건을 갖는다면

$$B_i[y(x,t)] = 0, \quad x \in S, i=1, 2, \dots, p \quad (2)$$

여기서 B_i 는 최고 $2p-1$ 차의 미분 연산자이며 S 는 유연계 Ω 의 경계이다.⁽¹¹⁾ 식 (1)과 (2)로 이루어지는 고유치 문제 (eigen value problem)는 무한개의 고유값 (eigen value)과 특이함수 (eigen function)를 갖는다.^(7,11,12)

$$\begin{aligned} \lambda_{\pm k} = \pm i\omega_k, \quad \nu_{\pm k}(x) = \nu_k^r(x) \pm i\nu_k^i(x), \\ i \equiv \sqrt{-1}, \\ k=1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 $\nu_k^r(x)$ 과 $\nu_k^i(x)$ 는 실함수 (real function)이며 ω_k 와 $\nu_k(x)$ 는 각각 k 번째 모드 (mode)의 고유진동수와 특이함수이다. 본 논문에서는 λ_k 가 서로 다른 경우를 고려한다.

식 (1)을 라플라스 변환하면

$$\bar{y}(x,s) = \int_{\Omega} W_0(x,\xi,s) \{ \bar{f}_c(\xi,s) + \bar{f}_e(\xi,s) \} d\xi \quad (4)$$

여기서 상첨자 $\bar{\quad}$ 는 각 변수의 라플라스 변화이며 편의상 초기조건을 모두 무시 하였다. $\xi \in \Omega$ 위치의 입력과 x 위치의 출력간의 관계를 나타내는 개회로 전달함수인 Green 함수 $W_0(x,\xi,s)$ 는^(7,12,13)

$$W_0(x,\xi,s) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{-\lambda_k}{s - \lambda_k} \nu_k(x) \nu_k^*(\xi) \quad (5)$$

여기서 $*$ 는 공액복소수를 나타낸다.

이 유연계를 이산제어할 경우 이산시간영역에서 계의 응답은

$$\begin{aligned} \bar{y}(x,z) = \int_{\Omega} W_0(x,\xi,z) \{ \bar{f}_c(\xi,z) \\ + \bar{f}_e(\xi,z) \} d\xi \end{aligned} \quad (6)$$

여기서 $\bar{y}(x,z)$ 와 $\bar{f}_c(\xi,z)$ 는 각각 샘플링간격 T 인

이산 시계열 $y(x, kT)$ 와 $f_c(\xi, kT)$ 의 Z -변환이고 $\bar{F}_e(\xi, z)$ 는 $f_e(\xi, t)$ 의 적절한 Z -평면 표현이다. 이산시간 개회로 전달함수(discrete time open-loop transfer function)인 $W_0(x, \xi, z)$ 는 D/A 변환기를 0차 홀딩장치(zero order holder ; Z.O.H.)로 가정할 경우 부록 A에서와 같이 유도되지만⁽¹⁴⁾ 일반적으로 이산제어시 샘플링 주파수는 제어코저하는 최고차 모드보다 6-10배 정도 빠르게 선정하므로 무한대 모드까지 제어하기 위해선 샘플링 주파수가 무한대가 되어야 한다. 그러나 실제적으로 사용되는 컴퓨터 계산속도, A/D, D/A변환기의 최고 변환속도 등에 의해 샘플링 속도가 제한 되므로 본 논문에선 처음 N 개 모드까지만 고려했다. 하지만 아래의 해석은 $N \rightarrow \infty$ 일 경우에도 적용 된다. N 개 모드만 고려한 개회로 전달함수를 $W_N(x, \xi, z)$ 이라면

$$W_N(x, \xi, z) = \frac{1}{2} \sum_{k=-N}^N \frac{1 - e^{kT}}{z - e^{kT}} \nu_k(x) \nu_k^*(\xi) \quad (7)$$

이 유연체를 다음과 같이 $x = x_s$ 에 있는 센서와 $x = x_a$ 에 있는 액츄에이터를 이용해서 케환제어하면

$$\begin{aligned} \bar{f}_c(x, z) &= \delta(x - x_a) u(z) \\ &= \delta(x - x_a) C(z) \bar{y}(x_s, z) \end{aligned} \quad (8)$$

여기서 센서와 액츄에이터는 가관측성(observability)와 가제어성(controllability)를 보장키 위해 절점(node point)을 피해야 된다.⁽¹⁵⁾

$$\nu_k(x_s) \neq 0 \quad \nu_k(x_a) \neq 0, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N \quad (9)$$

식 (8)에서 케환 제어기의 전달함수 $C(z)$ 를 다음과 같이 시간지연 스텝 d 를 갖도록 설계하면

$$C(z) = \mu z^{-d} \frac{N(z)}{D(z)} \quad (10)$$

여기서 μ 는 게인이며 분자항 $N(z)$ 는 유연체의 극점과 제어기의 영점이 서로 상쇄되는 것을 피하기 위해 다음을 만족 시킨다.

$$N(e^{kT}) \neq 0, \quad k = \pm 1, \dots, \pm N \quad (11)$$

식 (8)을 (6)에 대입하고 $W_0(x, \xi, z)$ 대신 식 (7)에 있는 $W_N(x, \xi, z)$ 를 사용하여 얻은 폐회로 응답은

$$\begin{aligned} \bar{y}(x, z) &= C(z) W_N(x, x_a, z) \bar{y}(x_s, z) \\ &+ \int_D W_N(x, \xi, z) \bar{F}_e(\xi, z) d\xi \end{aligned} \quad (12)$$

윗식을 $\bar{y}(x_s, z)$ 에 대해 풀고 다시 원식, 식(12),

에 대입하면

$$\bar{y}(x, z) = \int_D W_{cl}(x, \xi, z) \bar{F}_e(\xi, z) d\xi \quad (13)$$

여기서 폐회로 전달함수 $W_{cl}(x, \xi, z)$ 는

$$W_{cl}(x, \xi, z) = \frac{N_{cl}(x, \xi, z)}{D_{cl}(z)} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} N_{cl}(x, \xi, z) &= D(z) W_N(x, \xi, z) + \mu N(z) z^{-d} \\ &\times [W_N(x, x_a, z) W_N(x_s, \xi, z) \\ &- W_N(x, \xi, z) W_N(x_s, x_a, z)] \end{aligned} \quad (15.a)$$

$$D_{cl}(z) = D(z) - \mu N(z) W_N(x_s, x_a, z) z^{-d} \quad (15.b)$$

이때 폐회로 특성방정식은 부록 B에 보인바와 같이

$$D_{cl}(z) = D(z) - \mu N(z) W_N(x_s, x_a, z) z^{-d} = 0 \quad (16)$$

3. 폐회로 안정 조건

유연체 제어의 목적은 각 모드의 감쇠를 증가 시키는데 있으므로 제어기는 식(16)의 특성 방정식의 해가 모두 단위원 내에 존재하도록 설계되어야 한다. 본 논문에서는 이를 만족하는 제어기 설계 방법을 제안 한다. s -평면에서 사용되는 안정성 해석법을 적용키 위해 다음의 변환식을 이용 z -평면에서 기술된 특성 방정식을 w -평면으로 옮기면⁽¹⁴⁾

$$z = \frac{1 + \frac{T}{2}w}{1 - \frac{T}{2}w} \quad (17)$$

w -평면에서의 특성 방정식은

$$\begin{aligned} D_{cl}(w) &= D(w) - \mu N(w) W_N(x_s, x_a, w) \\ \left(\frac{1 + \frac{T}{2}w}{1 - \frac{T}{2}w} \right)^{-d} &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

이 되고 w -평면 개회로 전달 함수는

$$\begin{aligned} W_N(x, \xi, w) &= \\ -\frac{1}{2} \sum_{k=-N}^N \frac{\beta_k (1 - \frac{T}{2}w)}{w - \beta_k} \nu_k(x) \nu_k^*(\xi) \end{aligned} \quad (19)$$

여기서 개회로 극점 β_k 는

$$\beta_k = i \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega_k T}{2}\right), \quad \beta_{-k} = -\beta_k, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (20)$$

식(17)의 변환은 z -평면에 있는 단위원 내부를 w -평면 좌평면으로 사상(mapping)시키므로 식(18)의 특성 방정식의 근이 모두 좌평면에 존재해야 폐회로가 안정하다.

● 폐회로 안정 조건

다음을 만족하는 제어기는

$$\operatorname{Re} \left[\frac{N(z)}{D(z)} \frac{(z-1)}{(z+1)^2} z^{-d} \nu_k(x_s) \nu_k^*(x_a) \right]_{z=e^{i\omega_k T}} > 0, \quad (21)$$

$$k=1, 2, \dots, N$$

제인 μ 가 $\mu \in (0, \mu_{cr})$ 범위에서 폐회로를 안정시킨다. 여기서 μ_{cr} 은

$$\mu_{cr} = \inf_i \left\{ \frac{D(i\alpha_i)}{N(i\alpha_i) W_N(x_s, x_a, i\alpha_i)} \left(\frac{1 + \frac{T}{2} i\alpha_i}{1 - \frac{T}{2} i\alpha_i} \right)^d \right\} \quad (22)$$

$i\alpha_i$ 은 $\mu > 0$ 일때 모든 근궤적이 허수축과 만나는 점이다.

● 증명

제어기 게인 μ 의 변화에 따른 폐회로 근궤적을 살펴보면 특성 방정식, 식(18),의 근궤적 $w_k(\mu)$ 는 $\mu=0$ 일 때 허수축 상에있는 개회로 전달 함수의 극점 β_k 에서 출발하게되며 $\mu=0^+$ 일때 근궤적 방향은 $\operatorname{Re} \frac{dw}{d\mu} \Big|_{\mu=0^+}$ 에 지배된다. 따라서 $\operatorname{Re} \frac{dw_k}{d\mu} \Big|_{\mu=0^+}$, $k=1, 2, \dots, N$ 이 음의 값을 가지면 근궤적은 w -평면에서 좌평면 방향으로 진행되어 폐회로가 안정된다. μ 가 더 증가하게되면 좌평면에 있던 근궤적은 허수축을 지나게 되는데 이때의 μ 를 μ_{cr} 이라하면 $\mu < \mu_{cr}$ 영역 내에서는 안정하다. $\mu=0^+$ 일때 근궤적의 진행방향은 부록 C에 유도된 바와 같으며 이 값이 음의 값을 가져야 되므로 식(21)의 조건을 얻을 수 있다.

4. 균일 단순 지지보의 제어

위에서 제시된 제어기의 성능을 입증키 위해 보의 진동 제어 문제를 고려 하자. 길이 L , 굽힘 강성 EI , 단위 길이당 질량 m 인 균일한 단순 지지보를 Euler-Bernoulli 보로 가정하면 보의 횡방향 변위를 $y(x, t)$ 라 할때 수학적 모델은

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} y(x, t) + c^4 \frac{\partial^4}{\partial x^4} y(x, t) = f_c(x, t) + f_e(x, t), \quad (23)$$

$$x \in (0, L)$$

여기서 $c^4 = EI/m$

경계조건은 $x=0, L$ 에서 다음을 만족한다.

$$y(x, t) = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x, t) = 0 \quad (24)$$

식(23)과 (24)로부터 얻어진 고유치 문제의 고유진동수와 특이함수는⁽¹¹⁾

$$\omega_k = c^2 \frac{k^2 \pi^2}{L^2}, \quad \nu_k(x) = A_k \sin \frac{k\pi x}{L}, \quad (25)$$

$$k=1, 2, \dots$$

이 보는 $x=x_s$ 위치의 센서와 $x=x_a$ 위치의 액츄에이터를 이용해서 제어하며 x_s 와 x_a 는 N 개 모드까지의 가관측성과 가제어성을 만족한다고 가정한다. 처음 N -번째 모드까지 제어할 경우 샘플링 주파수 $1/T$ 는 최소한 $2f_N$ (f_N : N -번째 고유진동수) 보다는 커야된다. 본 논문에서는 시간지연이 있는 비병치제어기 설계를 제안코저하지만 비교를 위해 다음의 경우를 고려하자.

4.1 시간 지연이 없는 병치제어

이 경우는 식(8)과 (10)에서

$$x_s = x_a, \quad d=0 \quad (26)$$

폐회로 안정 조건은 식(21)로부터

$$\operatorname{Re} \left[\frac{N(z)}{D(z)} \frac{(z-1)}{(z+1)^2} \right]_{z=e^{i\omega_k T}} > 0, \quad (27)$$

$$0, \quad k=1, 2, \dots, N$$

또는

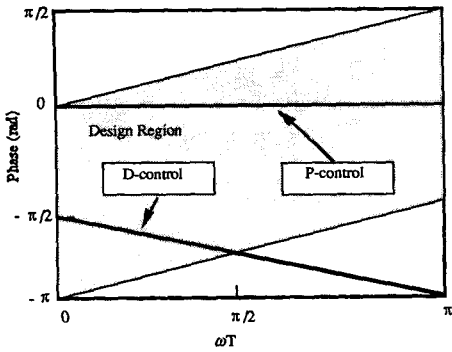
$$\frac{1}{2} \omega_k T - \pi < \arg \left[\frac{N(e^{i\omega_k T})}{D(e^{i\omega_k T})} \right] < \frac{1}{2} \omega_k T, \quad (28)$$

$$k=1, 2, \dots, N$$

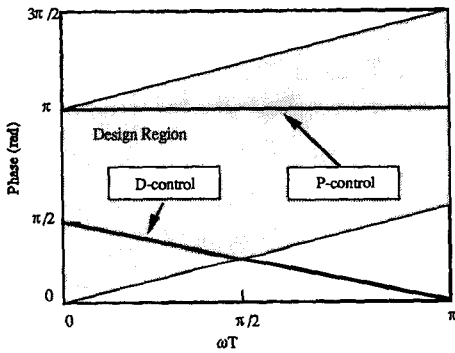
여기서 $\arg[F]$ 는 F 의 위상을 나타낸다. 식(27) 또는 (28)을 만족 시키는 제어기 전달함수 $C(z)$ 는 $\mu \in (0, \mu_{cr})$ 에서 안정하다. 식(28)의 조건을 주파수-위상 영역으로 그려보면 Fig. 1(a)와 같은 빗금친 부분의 설계영역을 얻을 수 있다.

4.2 시간 지연을 갖는 비병치 제어

실제 제어를 수행할 때 여러 실질적인 제약조건 등에 의해 센서와 액츄에이터를 병치시킬 수 없는 경우가 있는데 이런 경우 두 지점의 위상차이가 존재하며 전달함수의 영점이 s -평면 우평면에 있는 모드가 존재하게되어 비최소위상계(nonminimum



(a) Collocated control without time delay



(b) Noncollocated control with time delay

Fig. 1 Controller phase plot in design region

phase system)가 된다.⁽⁵⁾ 비최소위상계에서 실현가능한 제어기의 설계는 어려움이 많으며 좋은 제어 성능을 얻기 어렵다.⁽⁶⁾ 시간 지연을 갖는 폐환 제어는 이러한 불안정성을 제거하고 제어성능을 향상시킬 수 있다.^(6,12)

식 (8), (10)에서

$$x_s \neq x_a, d \neq 0 \quad (29)$$

단순 지지보에서 비병치 시간지연제어의 적용을 살펴보면 이 보는 참고문헌 7에서 유도된 바와같이 다음의 시간지연 관계를 만족한다.

$$\nu_k(x_a) = -\nu_k(x_s) e^{-i\omega_k T_d}, k=1, 2, \dots \quad (30.a)$$

$$x_s + x_a = L, T_d = \frac{L^2}{c^2 \pi} \quad (30.b)$$

여기서 T_d 는 지연시간으로 모드수에 관계없는 상수이다. 이산제어에서 샘플링 간격 T 를 다음과 같이 d 가 양의 정수가 되도록 정하면

$$T_d = dT \quad (31)$$

d 는 식 (10)에 있는 바와 같이 이산제어기 입·출력간의 지연시스템을 나타낸다. 식 (30)의 시간지연 관계의 물리적 의미는 두점 x_s, x_a 에서의 응답간의 위상차를 시간차로 보상시킨것으로 구체적으로 설명하면 다음과 같다. 부록 D에서 유도된 바와 같이 두점간의 응답은 다음의 관계를 갖는다.

$$\bar{y}(x_a, z) = H(x_a, x_a, z) u(z) + \int_D H(x_a, \xi, z) \bar{f}_e(\xi, z) d\xi - z^{-d} \bar{y}(x_s, z) \quad (32)$$

식 (32)에 보인 바와 같이 제어력과 외란이 없는 경우 즉, 초기 조건에 의한 보의 진동에서 식 (30)을 만족하는 x_s 와 x_a 위치의 변위는 서로 T_d 만큼의 시간지연을 갖고 위상이 서로 반대인 관계를 갖고 있으므로 한 지점의 변위는 다른 지점의 변위를 알면 정확한 예측이 가능 하다. 이러한 관계는 시간지연을 갖는 제어기가 센서와 액츄에이터의 비병치로 인한 위상차이를 극복하여 병치제어 효과를 얻을 수 있음을 의미한다. 또한 식 (32)에서 $u(kT)$ 와 $y(x_s, kT)$ 는 아는 값이고 $H(x_a, x_a, z)$ 는 유연계의 펄스 응답중 처음 d 개의 항으로 구성되어 있으므로 이 식을 이용 예측기를 설계하여 $y(x, kT)$ 를 예측할 수 있고 이를 폐환제어기의 입력으로 사용할 수 있는데 이에 관해 선 다음 논문에서 다루고자 한다. 식 (29), (30)을 만족하는 제어기의 폐회로 안정조건은 식 (21)에서

$$Re \left[\frac{N(z)}{D(z)} \frac{(z-1)}{(z+1)^2} \right]_{z=e^{i\mu}} < 0, k=1, 2, \dots, N \quad (33)$$

따라서 제어기가 식 (33)을 만족하면 $\mu \in (0, \mu_{cr})$ 에서 폐회로는 안정하다.

식 (33)을 만족하는 제어기는 그 위상이 Fig. 1(b)에서 보인 바와 같이 두 평행선 사이 빗금친 영역내에 존재해야 된다. 즉,

$$\frac{1}{2} \omega_k T < \arg \left[\frac{N(e^{i\omega_k T})}{D(e^{i\omega_k T})} \right] < 1 + 2\omega_k T + \pi \quad (34)$$

$$k=1, 2, \dots, N$$

식 (34)를 식 (28)과 비교하면 π 만큼의 위상차가 존재하는데 이는 단지 제어기의 부호 차이만있으므로 지연시간이 없는 병치제어에 적용되는 제어기를 사용할 수 있음을 의미 하므로 식 (30)과 유사한 형태의 시간지연 관계는 스트링 진동, 원판진동등에서도 성립한다.⁽⁷⁾

4.3 시간 지연이 없는 비병치 제어

식 (8), (10)에서

$$x_s \neq x_a, d=0 \tag{35}$$

폐회로 안정조건은 식 (21)에서

$$Re \left[\frac{N(z)}{D(z)} \frac{(z-1)}{(z+1)^2} \nu_k(x_s) \nu_k^*(x_a) \right]_{z=e^{i\omega_k T}} > 0,$$

$$k=1, 2, \dots, N \tag{36}$$

또는

$$\frac{1}{2} \omega_k T - \pi < \arg \left[\frac{N(e^{i\omega_k T})}{D(e^{i\omega_k T})} \nu_k(x_s) \nu_k^*(x_a) \right] < \frac{1}{2} \omega_k T,$$

$$k=1, 2, \dots, N \tag{37}$$

식 (37)에서 $\nu_k(x_s) \nu_k^*(x_a)$ 의 부호가 모드 번호 k 에 따라 변하게 되는 경우, 즉 x_s 와 x_a 위치 사이에 존재하는 노드점 수가 k 에 따라 짝수개이기도 하고 홀수개이기도 한 경우 $N(z)/D(z)$ 도 따라서 부호가 변해야되는데 이런 특성을 갖는 제어기의 설계는 어려우며 특히 $N \rightarrow \infty$ 이면 불가능해진다. 따라서 비병치제어계의 제어기 설계는 매우 어렵다. 식 (37)을 Fig. 1(a)와 비교해 보면 식 (37)의 괄호안의 항이, 즉, 제어기뿐 아니라 두지점에서의 특이 함수 값까지도 포함된 항이 그림의 빗금친 부분내에 있어야 된다.

이상의 폐회로 안정조건을 만족하는 제어기의 대표적인 예를 살펴보자.

4.4 제어기의 예

(1) 비례제어기

다음 식으로 표현되는 비례제어기가 폐회로를 안정시키기위한 조건은

$$\mu \frac{N(z)}{D(z)} = K_p \tag{38}$$

(i) 시간지연이 없는 병치제어의 경우 $\text{Max}(K_p) > K_p > 0$ 이면 식 (28)을 만족하며 그림 1.a의 설계영역에 존재한다.

(ii) 시간지연이 있는 비병치제어의 경우는 식 (34)와 그림 1.b로부터 $\text{Min}(K_p) < K_p < 0$ 이 되어야 한다. 여기서 $\text{Max}(K_p)$ 와 $\text{Min}(K_p)$ 는 식 (22)로부터 결정된다.

(i), (ii)는 연속계에서 비례제어는 비감쇠 유연계의 감쇠를 증가시키지 못한다는 사실과는 다른 특성을 보이고 있으나 제어대상 주파수에 비해 샘플링 주파수가 훨씬 크면 연속계 제어특성을 보일 것

이므로 안정성 향상에는 별 효과가 없을 것이다.

(iii) 시간지연이 없는 비병치제어의 경우는 센서와 액츄에이터 위치 및 고려 대상 모드의 특이함수에 민감한데 안정필요조건은 식 (36)에서 $K_p \nu_k(x_s) \nu_k^*(x_a) > 0, k=1, 2, \dots, N$ 이다. 이에 대한 논의는 다음의 미분제어에서와 동일하다.

(2) 미분 제어기

연속계에서 미분제어기 또는 속도제한제어는 감쇠를 증가시켜 폐회로 안정성을 보장하며 계의 파라미터 불확실성에 대한 강인한 특성을 갖고 있으므로 널리 적용되고 있지만 이산제어의 경우 그 특성이 연속계에서와 다르다.^(9,10)

미분제어기 형태는

$$\mu \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{K_d z - 1}{T z} \tag{39}$$

이 제어기의 폐회로 안정 조건은 식 (39)에서 $\arg [1 - z^{-1}]_{z=e^{i\omega T}} = (\pi - \omega T) / 2$ 이므로

(i) 시간지연이 없는 병치제어의 경우 그림 1.a에서 보듯이 $\text{Min}(K_d) < K_d < 0$ 일때 $0 < \omega T < \pi/2$ 에서는 설계영역에 존재하며 $\pi/2 < \omega T < \pi$ 에서는 설계 영역밖에 존재한다. 따라서 폐회로가 안정되기 위해선 샘플링 주파수 $1/T$ 는 $4f_n$ 보다는 커야된다. 그러나 실제 제어시 제어코저하는 주파수보다 통상 6~10배 빠른 샘플링 주파수를 사용하므로 이 조건은 제어기 설계에 있어 큰 제약조건이 되지는 않는다.

(ii) 시간지연이 있는 비병치제어의 경우 앞의 경우와 부호차이만 있으므로 $\text{Max}(K_d) > K_d > 0$ 일때 Fig. 1(b)에서와 같다.

(iii) 시간지연이 없는 비병치제어의 경우는 식 (37)로부터

$$\omega_k T - \frac{3}{2} \pi < \arg \left[\frac{K_d}{T} \nu_k(x_s) \nu_k^*(x_a) \right] < \omega_k T - \frac{\pi}{2}, \tag{40}$$

$$k=1, 2, \dots, N$$

Fig. 2의 빗금친 영역으로 표시되는 식 (40)의 범위에서 실수값인 $K_d \nu_k(x_s) \nu_k^*(x_a) / T$ 는 $(0, \pi/2)$ 에서 위상 $-\pi, (\pi/2, \pi)$ 에서 위상 0인 두 불연속선상에 있어야 된다. 그러나 $N \rightarrow \infty$ 인 경우 위상이 0인 선은 실질적이지 않으므로 $\omega_N T < \pi/2$ 이고 그 위상이 $-\pi$, 즉, $K_d \nu_k(x_s) \nu_k^*(x_a) / T < 0, k=1, 2, \dots, N$ 이 되어야 한다. 단순 지지보에서 $\nu_1(x_s) \nu_1^*(x_a) > 0$ 이므로 결론적으로 안정화 조건은

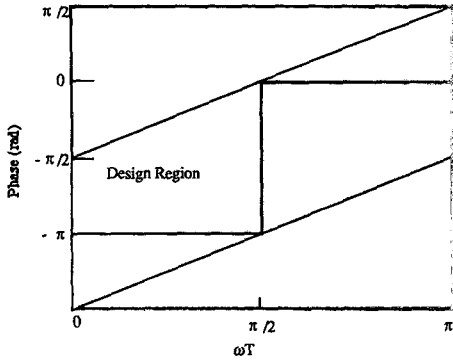


Fig. 2 Desired phase region of $K_d \nu_k(x_s) \nu_k^*(x_a)$ in the case of noncolocated derivative control without time delay

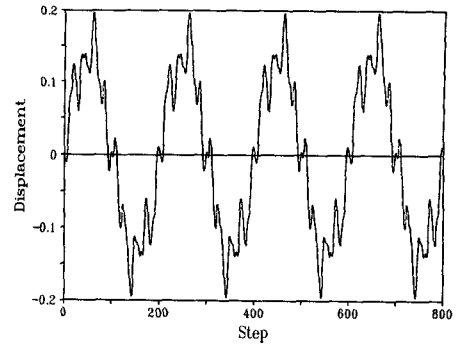
$$\text{Min}(K_d) < K_d < 0, \nu_k(x_s) \nu_k^*(x_a) > 0, k=1, 2, \dots, N \quad (41.a)$$

$$1/T > 4f_N \quad (41.b)$$

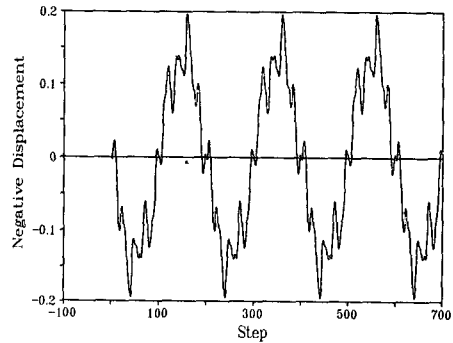
식 (41.a)에서 센서와 액츄에이터는 고려하는 모든 모드의 노드점들로 구분되는 구간들 중에 어느 한 구간에 같이 존재해야 됨을 의미한다. (i), (ii), (iii)에서 $\text{Max}(k_d)$ 와 $\text{Min}(K_d)$ 는 식 (22)로부터 결정된다.

5. 모의 시험

앞에서 제안된 제어기 설계방법을 입증키위해 양단이 단순 지지보에 대한 모의시험을 수행하였다. 보는 균일하며 길이가 L 인 Euler-Bernoulli 보로 처음의 5개 모드만 제어 대상으로 했다($N=5$). 고유진동수는 식 (25)로부터 $f_0(=c^2\pi/2L^2)$, $4f_0$, $9f_0$, $16f_0$, $25f_0$ (Hz)이다. 센서와 액츄에이터는 가제어성과 가관측성을 보장 하도록 5개 모드의 노드점(node point)을 피하고 시간지연 관계인 식 (30)을 만족하는 $x_s=0.15L$, $x_a=0.85L$ 의 위치에 있고, 외란은 고려하는 5개 모드를 모두 가진도록 $x_e=0.45L$ 위치에 작용하는 임펄스 하중으로 가정하였다. 식 (30)에서 지연시간 $T_d=1/2f_0$ 이며 샘플링 주파수를 $200f_0$ 로 하면 지연시스템 $d=100$ 이 된다. Fig. 3은 임펄스 하중에 대한 개회로 응답으로 3.a는 액츄에이터 위치의 변위로 5개의 비감쇠 모드가 섞여있다. Fig. 3(b)는 센서위치의 변위를 부호를 바꾸어 그린것으로 d 스텝 지연시키면 그림 3.a와 일치한다. 이 사실은 식(32)에서 $u(kT)=0$,



(a) at actuator position



b) at Sensor Position

(b) at sensor position

Fig. 3 Open-loop responses

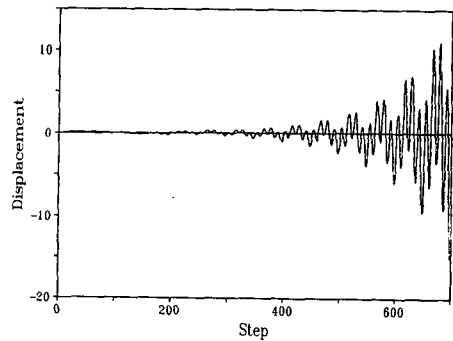


Fig. 4 Closed-loop response of noncolocated derivative control without time delay

$f_e(kT)=0$ 로 놓은 경우에 해당되는 것으로 센서에서 측정된 변위로 액츄에이터 위치의 변위를 정확히 예측할 수 있음을 의미한다.

비례제어를 적용한 경우 폐회로 응답은 전술한 바와 같이 안정하지만 감쇄가 매우 작음을 확인할 수 있었다. Fig 4는 시간지연이 없는 비병치 미분제어시 폐회로 응답으로 $K_d/T=0.1$ 이며 1, 3, 5번

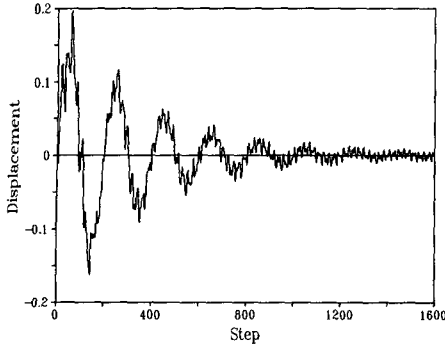


Fig. 5 Closed-loop response of noncollocated derivative control with time delay

제 모드는 안정되나 2, 4번째 모드는 불안정 하다. 만일 K_d 의 부호를 반대로 하면 안정된 모드와 불안정한 모드가 서로 바뀌게 되는데 그 이유는 x_s 와 x_a 에서 1, 3, 5번째 모드의 특이 함수는 동일부호를 갖으나 2, 4번째 모드는 서로 다른 부호를 갖기때문이다.

시간지연 미분제어를 적용할 경우를 살펴보면 샘플링 주파수 $1/T=8f_N$ 이므로 z -평면 주파수 $\omega_s T = \pi/4$ 가 되어 그림 1. b에서 5개의 모드는 모두 빗금친 안정영역에 존재하게 된다. 따라서 폐회로를 안정시키는 미분 제어기 계인 $0 < K_d/T < 2.5$ 가 존재한다. 그림 5는 $K_d/T=2.2$ 일때의 응답으로 폐회로가 안정됨을 보여준다. 여기서 시간(0, 100T)까지는 제어하지 않으므로 그림 3.a의 개회로 응답과 일치한다. 결론적으로 시간지연을 이용한 미분 제어기는 비병치 유연제의 제어에 적용이 가능함을 알 수 있다.

6. 결론

연속제에서 비병치 유연제를 안정화 시키는 시간지연 폐환제어기 설계 방법을 이산시간 영역으로 확장 하였다. 샘플링 간격, 센서와 액츄에이터 위치 등에 관련이 있는 폐회로 안정성 조건을 유도하였으며 제안된 제어기 설계방법을 단순지지된 Euler-Bernoulli 보의 진동제어 문제에 적용하였다. 주파수-위상 평면에서 폐회로 안정성 조건을 만족하는 제어기 설계방법을 제시하였으며 모의시험을 통해 적용가능성을 입증하였다. 시간지연을 갖는 미분제어기가 비병치 제어에 효과적임을 보였다. 본 연구에서 얻은 결과는 시간 지연관계를 갖

는 많은 유연제의 비병치 제어에 적용 가능하리라 예상된다.

계의 파라미터 불확실성, 시간지연 오차등에 강한 특성을 갖는 제어기 설계연구가 진행되고 있으며 또한 예측기를 갖는 비병치 시간지연 제어가 연구되고 있다.

후 기

본 논문은 국방과학연구소의 지원으로 남가주대학에서 Post-Doctor 기간 중 연구결과의 일부로 그 동안 지원해준 연구소와 많은 협조를 해준 남가주대 기계과 교수 B. Yang에게 감사합니다.

참고문헌

- (1) Balas, M.J., 1979, "Direct Velocity Feedback Control of Large Space Structures," AIAA Journal of Guidance and Control, Vol. 2, No. 3, pp. 252~253.
- (2) Joshi, S. M., 1986, "Robustness Properties of Colocated Controllers for Flexible Spacecraft," AIAA Journal of Guidance, Vol. 9, No. 1, pp. 85~91.
- (3) Benhabib, R. J., Iwens, R.P. and Jackson, R.L., 1981, "Stability of Large Space Structure Control Systems Using Positivity Concepts," AIAA Journal of Guidance and Control, Vol. 4, No. 5, pp. 487~494.
- (4) Cannon, R.H., Jr. and Rosenthal, D.E., 1984, "Experiments in Control of Flexible Structures with Noncolocated Sensors and Actuators," Journal of Guidance, Vol. 7, No. 5, pp.546~553.
- (5) Spector, V. A. and Flashner, H., 1990, "Modeling and Design Implications of Noncolocated Control in Flexible Systems," ASME Journal of Dynamic Systems, Measurements and Control, Vol. 112, pp. 186~193.
- (6) Yang, B. and Mote, C.D., Jr., 1991, "Active Vibration Control of the Axially Moving String in the s-Domain," ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 58, pp. 189~196.
- (7) Yang, B. and Mote, C.D., Jr., 1990, "On Time Delay in Noncolocated Control of Flexible

Mechanical Systems," Proceedings of the 111th ASME Winter Annual Meeting, Dallas, Texas, November, pp. 25~30.

- (8) Yang, B, 1991, "Noncolocated Control of a Damped String Using Time Delay," Proceedings of the 1991 American Control Conference, Vol. 3, pp. 2445~2448.
- (9) Balas, M. J., 1982, "Discrete-Time Stability of Continuous-Time Controller Designs for Large Space Structures," AIAA Journal of Guidance, Vol. 5, No. 5, pp. 541~543.
- (10) McClamroch, N.H., 1984, "Sampled Data Control of Flexible Structures Using Constant Gain Velocity Feedback," AIAA Journal of Guidance, Vol. 7, No. 6, pp. 747~749.
- (11) Meirovitch, L., 1971, Analytical Methods in Vibration, Macmillan, New York.
- (12) Yang, B. and Mote, C.D., Jr., 1991, "Frequency-Domain Vibration Control of Distributed Gyroscopic Systems," ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Vol. 113, pp. 18~25.
- (13) Butkovskiy, A.G., 1983, Structural Theory of Distributed Systems, Ellis Horwood Limited.
- (14) Åström, K., and Wittenmark, B., 1984, Computer Controlled Systems, Prentice-Hall, pp.52~55
- (15) Yang, B. and Mote, C. D., Jr., 1991, "Controlability and Observability of Distributed Gyroscopic Systems," ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Vol. 113, pp. 11~17.
- (16) Newton, G.C., Gould, L.A. and Kaiser, J.F., 1957, Analytical Design of Linear Feedback Controls, Wiley, New York

부록 A

● 이산시간 개회로 전달함수

$W_o(x, \xi, s)$ 의 0차 홀딩 등가함수(zero order hold equivalent)는

$$W_o(x, \xi, z) = Z \left[\frac{1 - e^{-sT}}{s} W_o(x, \xi, s) \right]$$

$$= \left(\frac{z-1}{z} \right) Z \left[\frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{-\lambda_k}{s(s-\lambda_k)} \nu_k(x) \nu_k^*(\xi) \right] = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{\lambda_k T}}{z - e^{\lambda_k T}} \nu_k(x) \nu_k^*(\xi) \quad (A.1)$$

부록 B

● 폐회로 특성 방정식

식(7)의 개회로 전달함수를 다시쓰면

$$W_N(x, \xi, z) = \frac{d_k(x, \xi)}{z - e^{\lambda_k T}} + R_k(x, \xi, z) \quad (B.1)$$

$$d_k(x, \xi) = \frac{1}{2} (1 - e^{\lambda_k T}) \nu_k(x) \nu_k^*(\xi) \quad (B.2)$$

$$R_k(x, \xi, z) = \frac{1}{2} \sum_{j=-N}^N \frac{1 - e^{\lambda_j T}}{z - e^{\lambda_j T}} \nu_j(x) \nu_j^*(\xi) \quad (B.3)$$

여기서 $R_k(x, \xi, z)$ 는 $z = e^{\lambda_k T}$ 에서 해석적이고 $z \rightarrow e^{\lambda_k T}$ 일때 $W_o(x, \xi, z) \rightarrow d_k(x, \xi) / (z - e^{\lambda_k T})$ 이다. 식 (B-1), (14), (15)로 부터 $z \rightarrow e^{\lambda_k T}$ 일때 폐회로 전달함수는

$$\lim_{z \rightarrow e^{\lambda_k T}} W_{cl}(x, \xi, z) = \frac{A(x, \xi)}{\mu N (e^{\lambda_k T}) \nu_k(x_s) \nu_k^*(x_a)} \quad (B.4)$$

여기서 $A(x, \xi)$ 는 모든 x 와 ξ 에 대해 해석적이고 식 (9), (11)로 부터 식 (B-4)의 분모항이 영이 아니므로 ($\mu > 0$) 식 (B-4)는 한정적인 극한값을 갖는다. 따라서 $e^{\lambda_k T}$ 는 폐회로 극점이 아니다. 또한 식 (15)에서 $N_d(x, \xi, z)$ 는 근 $e^{\lambda_k T}$ 만 갖고 있으므로 $D_d(z) = 0$ 가 폐회로 특성방정식이 된다.

부록 C

● $Re \frac{dw_k}{d\mu} |_{\mu=0+}$ 의 유도

w -영역에서 β_k 근치의 근계적 $w_k(\mu)$ 를 고려하면 $w_k(\Delta\mu) = \beta_k + \Delta w_k, |\Delta w_k| \ll 1, |\Delta\mu| \ll 1$ (C.1)

식 (C1)과 (19)를 (18)에 대입하면

$$\frac{D_{cl}(\beta_k + \Delta w_k)}{D(\beta_k)} = 1 + \frac{\Delta\mu}{2} \frac{N(\beta_k)}{D(\beta_k)} \frac{\beta_k(1 - \frac{T}{2}\beta_k)}{(\beta_k + \Delta w_k) - \beta_k} \left(\frac{1 + \frac{T}{2}\beta_k}{1 - \frac{T}{2}\beta_k} \right)^{-d} \nu_k(x_s) \nu_k^*(x_a) + O(\Delta\mu) = 0 \quad (C.2)$$

윗식에서 $\Delta\mu \rightarrow 0, \Delta w_k \rightarrow 0$ 일때

$$\frac{dw_k(\mu)}{d\mu} \Big|_{\mu=0+} = -\frac{1}{2} \frac{N(\beta_k)}{D(\beta_k)} \beta_k \left(1 - \frac{T}{2} \beta_k \right)$$

$$\left(\frac{1+\frac{T}{2}\beta_k}{1-\frac{T}{2}\beta_k}\right)^{-d} \nu_k(x_s) \nu_k^*(x_a) \quad (C.3)$$

따라서 근궤적이 좌평면에 있기 위한 조건은

$$\operatorname{Re}\left[\frac{N(\beta_k)}{D(\beta_k)}\beta_k\left(1-\frac{T}{2}\beta_k\right)\left(\frac{1+\frac{T}{2}\beta_k}{1-\frac{T}{2}\beta_k}\right)^{-d}\right] > 0, \quad k=1, 2, \dots, N \quad (C.4)$$

윗식을 z -평면에서 다시 쓰면

$$\operatorname{Re}\left[\frac{N(z)}{D(z)}\frac{(z-1)}{(z+1)^2}z^{-d}\nu_k(x_s)\nu_k^*(x_a)\right]_{z=e} > 0, \quad k=1, 2, \dots, N \quad (C.5)$$

부록 D

● 센서와 액츄에이터위치의 응답간의 관계

식 (8)을 (6)에 대입하고 $W_o(x, \xi, z)$ 대신 식 (7)에 있는 $W_N(x, \xi, z)$ 를 사용하여 $\bar{y}(x_a, z)$ 를 구하면

$$\bar{y}(x_a, z) = W_N(x_a, x_a, z) u(z) + \int_0^d W_N(x_a, \xi, z) \bar{f}_e(\xi, z) d\xi \quad (D.1)$$

개회로 전달함수는 다음과 같이 두항의 합으로 전개되는데

$$W_N(x, \xi, z) = H(x, \xi, z) + \frac{1}{2} \sum_{k=-N}^N z^{-d} e^{\lambda_k d T} \frac{1 - e^{\lambda_k T}}{z - e^{\lambda_k T}} \nu_k(x) \nu_k^*(\xi) \quad (D.2)$$

$$H(x, \xi, z) = \frac{1}{2} \sum_{k=-N}^N (1 - e^{\lambda_k T}) (z^{-1} + e^{\lambda_k T} z^{-2} + \dots + e^{(d-1)\lambda_k T} z^{-d}) \nu_k(x) \nu_k^*(\xi) \quad (D.3)$$

∴ 식 (D.2)와 시간지연관계, 식 (30)과 (31),로부터

$$W_N(x_a, \xi, z) = H(x_a, \xi, z) - z^{-d} W_N(x_s, \xi, z) \quad (D.4)$$

식 (D.4)를 (D.1)에 대입하면

$$\begin{aligned} \bar{y}(x_a, z) &= H(x_a, x_a, z) u(z) + \int_0^d H(x_a, \xi, z) \bar{f}_e(\xi, z) d\xi \\ &\quad - z^{-d} \left\{ W_N(x_s, x_a, z) u(z) + \int_0^d W_N(x_s, \xi, z) \bar{f}_e(\xi, z) d\xi \right\} \quad (D.5) \end{aligned}$$

윗식 우변의 괄호안 항이 $\bar{y}(x_s, z)$ 이므로

$$\bar{y}(x_a, z) = H(x_a, x_a, z) u(z) + \int_0^d H(x_a, \xi, z) \bar{f}_e(\xi, z) d\xi - z^{-d} \bar{y}(x_s, z) \quad (D.6)$$