

(論 文)

평행평판 내의 지주에 의한 와동 유동에 관한 수치해석

김동성* · 윤영환**

(1991년 9월 20일 접수)

Numerical Computation of Vortex Behind a Bluff Body in the Flow between Parallel Plates

Dong Sung Kim and Young Hwan

Key Words : Bluff Body(지주), Vortex(와동), Vortex Shedding(와동 흘림)

Abstract

A computer program was developed to analyze the two-dimensional unsteady incompressible viscous flow behind a rectangular bluff body between two parallel plates. The Peaceman-Rachford alternating direction implicit numerical method and Wachspress parameter were adopted to solve the governing equations in vorticity-transport and stream function formulation. The steady state flow and the vortex flow behind a rectangular bluff body in a channel were investigated for Reynolds numbers of 200 and 500. The vortex shedding was generated by a physical perturbation numerically imposed at the center of the flow field for a short time. It was observed that the perturbed flow became periodic after a transient period.

기 호 설 명

- x : 수평방향 무차원 거리
- y : 수직방향 무차원 거리
- u : x 방향 무차원 속도
- v : y 방향 무차원 속도
- τ : 무차원 시간
- p : 무차원 압력
- L : 유동 입구길이 (m)
- U : 입구 최고속도 (m/s)
- ν : 동 점성계수 (m^2/s)
- Re : Reynolds 수 (UL/ν)
- ψ : 유량함수 (Stream Function)
- Ω : 와도 (Vorticity)

1. 서 론

와동유동을 예측하여 유량을 측정하는 기술은 많은 분야에 이용되고 있는 매우 중요한 기술이다. 자동차엔진의 핵심부품인 전자제어식연료공급장치에는 엔진에 흡입되는 공기량을 정확히 측정하기 위해 Karman vortex의 공기유량 센서(sensor)를 사용하고 있는데 이 센서의 구조는 Fig. 1과 같이 사각 단면의 공기 통로 안에 지주를 설치하여 공기가 흐름에 따라 와동이 발생하게 되어 있다. 국내에서도 이 와동센서를 전량 수입하여 사용하고 있으나, 아직 설계기술은 개발되어 있지 않다.

본 연구에서는 평행평판 내의 지주에 의한 와동 유동을 해석하기 위한 수치 해석 프로그램을 개발하여 와동센서 설계기술 확립에 기여하고자 한다.

*정회원, 한국기계연구원, 내연기관연구원

**정회원, 창원대학교 기계공학과

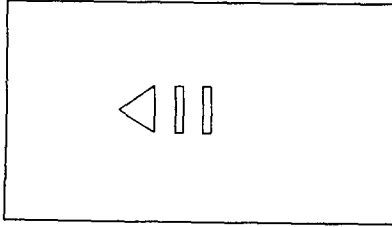


Fig. 1 Cross section of the air flow sensor

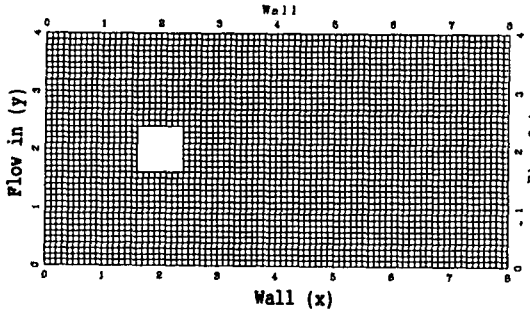


Fig. 2 Rectangular mesh geometry

비정상 유동문제는 1958년 Pane이 Reynolds 수 40과 100에서 유동을 계산하였으나 정상상태의 유동은 못 구하였다. 1966년 Jain과 Kawaguti는 Reynolds수 100까지 계산하였으나 정상상태의 유동은 Reynolds수 50까지만 구하였으며, 1969년 Son과 Hanratty는 Reynolds 수 500까지 구하였다.^(1,2) 1986년 Braza, Chassaing과 Minh은 ADI방법으로 원통형 실린더 후류 부근의 와류 생성을 Reynolds 수 1,000까지 구하였다.⁽²⁾ 그러나 이상은 주로 균일한 흐름(free stream) 속에 놓인 방해물에 의한 와류에 대한 연구로서 상기 공기 유량계는 관 속 흐름(channel flow)이므로 관 속의 방해물에 의한 와류 생성에 대한 연구의 필요성이 있다.

본 연구에서는 자동차 전자제어식 공기유량계를 Fig. 2와 같이 평행평판 안에 사각 지주가 있다고 단순화하고 공기는 이차원 비 압축성 점성유동으로 가정했다.

지배방정식은 유체 운동량방정식(navier-Stokes equation)을 와도 전달 방정식(vorticity transport equation)과 유량 함수 방정식(stream function equation)으로 변환하여 사용하였다. Peaceman-Rachford ADI 방법으로 수치해석 하였으며, 유량 함수 방정식의 수렴성을 좋게 하기 위하여 Wachspress parameter^(3,4,5,6)를 사용하였다. 벽면의

경계조건은 Briely⁽⁴⁾의 4th-order Lagrange interpolation 방법을 따랐다. Reynolds 수 200과 500에서의 비정상유동(unsteady flow)을 계산하였으며, 유동이 정상상태(steady state)에 도달하였을 때에 유동을 교란시켜 와동 흘림(vortex shedding)을 구하였다.

2. ADI 방법에 의한 유도

이차원 비압축성 점성유동에 대한 지배방정식은 연속방정식과 Navier-Stokes 방정식으로 잘 알려져 있다. 이 두 식을 무차원화하면서 다음의 식(1)과 식(2)로 각각 표시하였다.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

여기서 x 와 y 는 유동장의 직교좌표계, u 는 x 방향의 속도성분, v 는 y 방향의 속도성분, τ 는 시간, p 는 유동장의 압력, Re 는 Reynolds수를 나타내는 무차원 수이며 무차원화의 기준은 유동 입구길이 L 과 입구 최고속도 U 를 사용했다.

유량함수 (stream function) ψ , 와도(vorticity) Ω 는 속도성분에 대한 미분으로써 다음과 같이 정의하였다.

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3)$$

$$\Omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (4)$$

와도전달방정식(vorticity transport equation)은 식 (1), (2) (3), (4)로 부터 다음과 같이 구하였다.

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + u \frac{\partial \Omega}{\partial x} + v \frac{\partial \Omega}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \right) \quad (5)$$

Peaceman-Rachford ADI 방법에 의하면, 와도 전달방정식은 시간구간 $\Delta\tau$ 를 두 단계로 나누어 x 방향 및 y 방향에 대한 차분식으로 다음과 같다.^(4,7)

$$\frac{\Omega^{n+1/2} - \Omega^n}{\Delta\tau/2} = -u \frac{\partial \Omega^{n+1/2}}{\partial x} - v \frac{\partial \Omega^n}{\partial y} + \alpha \left(\frac{\partial^2 \Omega^{n+1/2}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega^n}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\Omega^{n+1/2} - \Omega^{n+1}}{\Delta\tau/2} = -u \frac{\partial \Omega^{n+1/2}}{\partial x} - v \frac{\partial \Omega^{n+1/2}}{\partial y}$$

$$+ \alpha \left(\frac{\delta^2 \Omega^{n+1}}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \Omega^{n+1}}{\delta y^2} \right) \quad (6)$$

여기서 n 은 time step, α 는 점성 항 (1/Re)를 나타낸다. 식 (6)의 공간에 대한 중앙 차분(central-difference)를 취하여 다음과 같이 표시하였다.

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Omega}{\delta x} &= \frac{\Omega_{i+1,j} - \Omega_{i-1,j}}{\Delta x} \\ \frac{\delta \Omega}{\delta y} &= \frac{\Omega_{i,j+1} - \Omega_{i,j-1}}{\Delta y} \\ \frac{\delta^2 \Omega}{\delta x^2} &= \frac{\Omega_{i+1,j} - 2\Omega_{i,j} + \Omega_{i-1,j}}{\Delta x^2} \\ \frac{\delta^2 \Omega}{\delta y^2} &= \frac{\Omega_{i,j+1} - 2\Omega_{i,j} + \Omega_{i,j-1}}{\Delta y^2} \end{aligned} \quad (7)$$

식 (3)을 식 (4)에 대입하면 식 (8)과 같은 유량 함수방정식(stream function equation)이 된다.

$$\Omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \quad (8)$$

앞의 와도방정식에서와 같은 ADI 방법에 의하여 식 (8)은 다음의 차분식으로 나누어진다.

$$\begin{aligned} \psi_{i+1/2}^{k+1/2} - (2 + \rho_k) \psi_{i,j}^{k+1/2} + \psi_{i-1/2}^{k+1/2} &= \\ - [\psi_{i,j+1}^k - (2 + \rho_k) \psi_{i,j}^k + \psi_{i,j-1}^k] - \Delta^2 \Omega_{i,j} \\ \psi_{i,j+1/2}^{k+1/2} - (2 + \rho_k) \psi_{i,j}^{k+1/2} + \psi_{i,j-1/2}^{k+1/2} &= \\ - [\psi_{i+1/2,j}^k - (2 + \rho_k) \psi_{i,j}^k + \psi_{i-1/2,j}^k] - \Delta^2 \Omega_{i,j} \end{aligned} \quad (9)$$

여기서 k 는 반복계산 횟수(iteration step)을 나타내고, Δ 은 격자 간격으로 $\Delta = \Delta x = \Delta y$ 이며 ρ_k 는 Wachspress parameter이다. 공간에 대한 미분은 식 (7)에서와 같다.

식 (8)의 Poisson 방정식에 대한 ADI 방법의 효율성은 실제로 Wachspress parameter ρ_k 를 어떻게 취하는가에 달려 있다.⁽⁴⁾ 최적의 ρ_k 를 구하기는 어려우므로 여기에서는 다음과 같은 값을 사용하였다.⁽⁵⁾

$$\rho_k = \frac{1}{2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{2M} \right)} \left[\cot^2 \left(\frac{\pi}{2M} \right) \right]^{k/k_0-1} \quad (10)$$

여기서 k 는 0, 1, ..., k_0 이며 $k_0 \geq 2$ 이고 k_0 는 다음과 같이 구하였다.⁽³⁾

$$(\sqrt{2}-1)^{k-1} \leq \tan \left(\frac{\pi}{2M} \right) \quad (11)$$

여기서 M 은 격자(mesh) 수의 평방근을 표시한다.

3. 경계조건

벽면 및 지주표면도 유선(stream line)으로 볼 수 있으므로, 유량함수에 대한 벽면에서의 경계조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \psi_{wall} &= -0.5 : \text{통로 아랫 벽면} \\ \psi_{wall} &= 0.5 : \text{통로 윗 벽면} \\ \psi_{block} &= 0.0 : \text{지주 벽면} \end{aligned} \quad (12)$$

벽면에서의 와도에 대한 경계조건은 유체가 벽면에서 속도가 영이라는 조건(non-slip)으로 부터 구해진다. Briley⁽⁴⁾의 방법에 따라 벽면의 유량함수를 4th order Lagrange interpolating polynomial로 가정하면 다음과 같이 얻어진다.

$$\Omega_w = \frac{85\psi_w - 108\psi_{w+1} + 27\psi_{w+2} - 4\psi_{w+3}}{18\Delta^2} \quad (13)$$

벽면 주위 속도성분과 유량함수에 대한 2차 미분도 와도전달방정식에 대한 경계조건과 일치하도록 하면 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} u_w &= 0.0 \\ u_{w+1} &= \frac{-17\psi_w + 9\psi_{w+1} + 9\psi_{w+2} - \psi_{w+3}}{18\Delta y} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} u_{w+1} &= \frac{14\psi_w - 36\psi_{w+1} + 18\psi_{w+2} + 4\psi_{w+3}}{18\Delta y} \\ \frac{\delta^2 \psi}{\delta y^2} \Big|_{w+1} &= \frac{29\psi_w - 54\psi_{w+1} + 27\psi_{w+2} - 2\psi_{w+3}}{18\Delta y^2} \\ \frac{\delta^2 \psi}{\delta y^2} \Big|_{w+2} &= \frac{11\psi_w - 27\psi_{w+2} + 16\psi_{w+3}}{18\Delta y^2} \end{aligned} \quad (15)$$

지주 모서리의 와도경계조건은 와도가 모서리에서 특이점(singularity)을 가지므로 특별히 정해야 한다. 여기에서는 벽면에 수직인 방향에 따라 모서리에서 불연속적인 값(discontinuous value)을 갖도록 하였다. 모서리에서의 경계조건은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \Omega_{cx} &= \frac{85\psi_{cx} - 108\psi_{cx+1} + 27\psi_{cx-2} - 4\psi_{cx+3}}{18\Delta^2} \\ \Omega_{cy} &= \frac{85\psi_{cy} - 108\psi_{cy+1} + 27\psi_{cy+2} - 4\psi_{cy+3}}{18\Delta^2} \end{aligned} \quad (16)$$

여기서 하첨자 cx 는 지주 모서리에서 x 축 방향을 나타내고 cy 는 y 축 방향을 나타낸다.

입구에서의 유동은 평판내에서 유동이 완전히 발전된 상태인 포물선 속도 분포(parabolic flow)가 정하였다.

4. 계산 결과 및 논의

개발된 프로그램의 계산 순서는 Fig. 3에 보인다. 입력 데이터를 읽은 후, 변수들을 초기화하고, 시간구간을 정한다. 먼저 와도전달방정식을 풀어 시간 구간 경과 후의 와도를 구하고, 이때의 유량 함수방정식을 반복법으로 푼다. 유량함수의 값이 오차 범위안에 들면 다시 와도방정식을 푸는 과정을 반복하면서 정상상태에 이르거나 원하는 시간이 경과할 때까지 다음 시간구간에 대해 위 과정이 되풀이된다.

계산 영역에 대한 격자는 Fig. 2에 보이는 바 처럼 40×80 으로 하였으며, 사각형 지주는 8×8 로 하였다. 격자 크기의 영향을 조사하기 위해 유동장을 30×60 , 사각형 지주를 6×6 으로 했을때의 해와 앞의 격자로 했을때의 해를 비교한 결과 대략적으로 2% 이내의 오차가 있었다. 실제 계산은 7MIPS

급 workstation이 사용되었다.

본 프로그램의 와동계산은 비정상 유동계산이며 x, y , 및 τ 의 삼차원 계산이다. 먼저 계산 내용을 개략적으로 설명하면 저주뒤에 생긴 와동 고리 (vortex ring)는 시간이 지남에 따라 그 길이가 점점 길어져 결국은 정상상태에 도달하여 그 크기가 일정하게 되고 기하학적 기준선을 중심으로 유동 형상이 상하 대칭을 이루게 되어 우리가 계산하고자 하는 시간에 따라 비 대칭 유동인 와동 열 (vortex street)은 얻지 못하게 된다. 그러나 이 정상 유동장에 적절한 교란을 주게되면 상기 와동

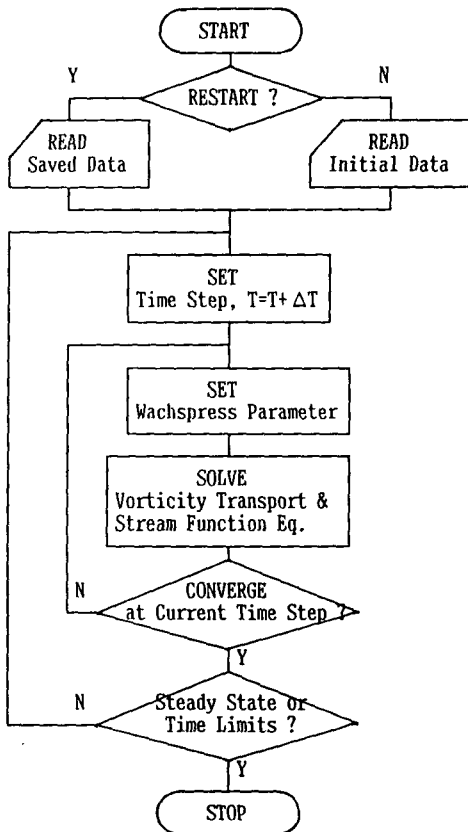


Fig. 3 Flow chart for computer program

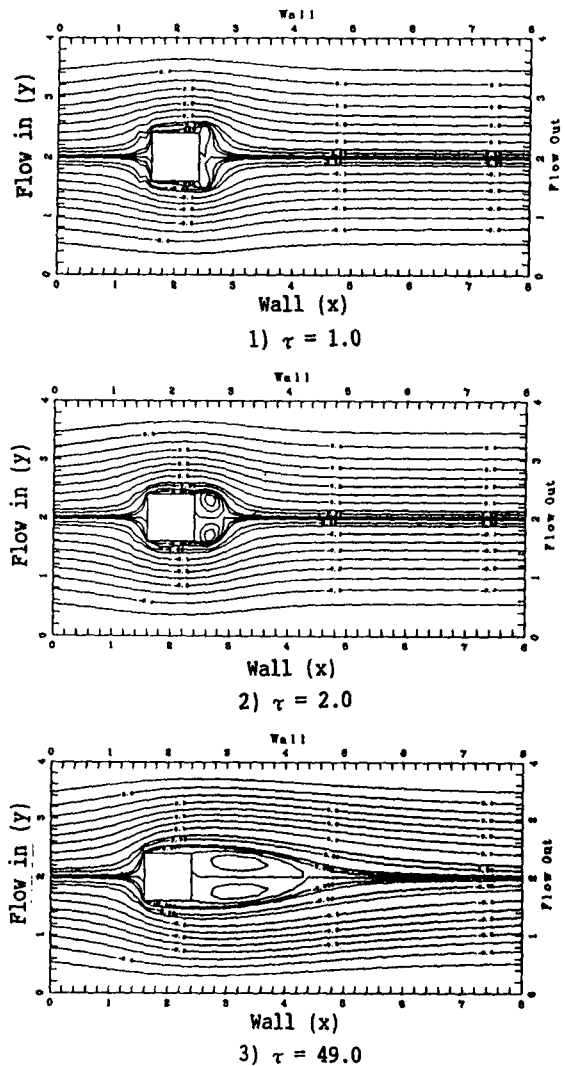


Fig. 4 Stream line behind a rectangular bluff body at $Re=200$

열을 얻게 된다. 계산 결과는 Reynolds 수 200과 500에 대해 수행하면 다음과 같다.

Fig. 4는 Reynolds 수가 200 일때 초기에 지주뒤에 박리가 일어나기 시작하여 와동 고리가 점 점 발달하여 결국은 정상상태에 도달하는 과정을 보여 주는 것인데 $\tau=1$ 일때에 지주 모서리에 박리현상이 나타나서 유선이 두개의 폐곡선을 만들고 폐곡선 안에 유체 순환에 의해 와동 고리가 발생하고 있다. $\tau=2$ 일때는 이 폐곡선 안에 유체 순환에 의해 와동 고리가 이루어 지게 되고 $\tau=49$ 에서 주위 유체 흐름의 발달에 따라 이 와동 고리가 길쭉

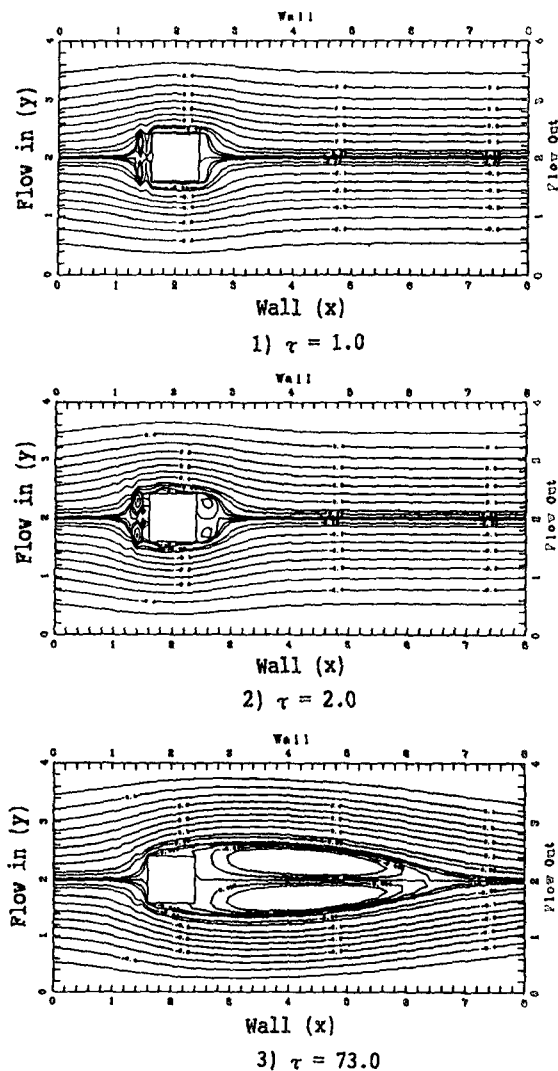


Fig. 5 Stream line behind a rectangular bluff body at $Re=500$

한 타원 형상으로 상하 대칭 유동 형상이 되어 시간을 더 길게 하여도 유동형상이 변하지 않는 정상 상태에 도달하게 되며 이때 박리영역의 길이를 Fig. 6과 같이 정의 했을 때 박리 영역의 길이가 2.0이었다.

Fig. 5는 Reynolds 수가 500인 경우로서 앞서와 비슷한 형태의 유동이 관찰되었다. $\tau=1,2$ 인 초기 유동에서 지주뒤에 폐곡선이 발달하기 시작하여 $\tau=73$ 에서 정상 정상 상태에 도달하였으며 박리 영역의 길이는 4.0이었다.

Fig. 7은 Reynolds 수 200과 500에서 박리 영역의 길이가 시간에 따라 변화하는 것을 나타낸 것으로 '+' 표는 Reynolds 수 200을, 'o'표는 Reynolds 수 500을 각각 나타내며 Reynolds 수 200인 경우는 짧은 시간내에 정상 상태에 도달하여 박리 영역의 길이가 시간에 따라 변화가 없음을 보여주고 500인 경우는 더 많은 시간이 흐른 후 그 길이가 변화하지 않음을 보여준다. Reynolds 수가

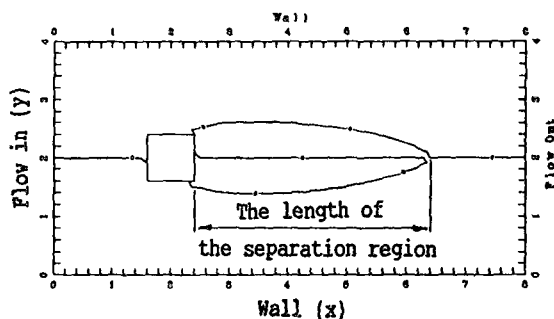


Fig. 6 Geometry of the length of the separation region

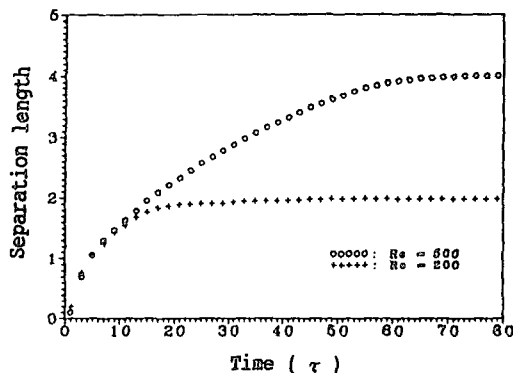


Fig. 7 Process of the development of the separation region behind a rectangular bluff body at $Re=200$ & 500

크면 (500) 작을 때(200) 보다 같은 형상에서 속도가 빨라져서 운동량이 커지게 되어 정상 상태에 도달하는 시간이 길어지며, 박리 영역의 길이도 길어짐을 보이고 있다.

위 계산 결과에서 보이는 대로, 정상 유동 중인 유체속에 갑자기 지주를 넣으면 박리현상이 지주모서리에서 중심을 향하여 발전하면서 한개의 폐곡선 안에서 두개의 대칭인 와동 고리를 형성하고, 시간이 지나면서 정상상태의 유동으로 발달하는 것을 알 수 있다.

이상과 같이 수치해석의 해는 항상 대칭성을 이루므로 지주뒤의 상하에서 번갈아 발생하는 비 정상 유동인 비 대칭성 와동 흘림(vortex shedding)을 얻으려면 앞서 얻은 정상 상태의 유동장에 적절한 교란(perturbation)을 주어야 한다. 본 연구에서는 정상상태의 최대 와도값의 5%를 박리 영역안 이 중심점 부근에 일정 시간($\tau=2$) 동안 더해주어(superimpose) 교란을 주었는데 교란의 정도는 처음 1%에서 그 강도를 점점 증가하여 5%일때 충분

한 와동 흘림(vortex shedding)을 얻을 수 있었다.

Fig. 8은 Reynolds 수 200의 정상유동에 상기 교란을 주었을 때 시간에 따라 유선(stream line)의 변화를 나타낸 것으로 $\tau=2$ 는 교란이 끝나는 순간의 유동 형태로서 지주뒤의 박리 영역과 그 안의 유동이 상당히 비 대칭으로 이루어 짐이 보인다. $\tau=6.5$ 에서는 지주 윗쪽에 와동 고리가 생성되어 전진하고 있으며 지주 아래 쪽에서는 새로운 와동 고리가 생성되는 모습을 보여주고 있다. 그 후 시간이 지남에 따라 와동(vortex)이 지주뒤 상하 교대로 와동이 지주에서 떨어져 나가 소멸하는 과정을 보여주고 있어 마치 Karman의 vortex street 현상을 나타낸다.

Fig. 9는 Reynolds 수 500인 경우 와류생성 형상을 보여주는 것인데 Fig. 8과 유사한 유동현상을 보여주나 이 경우는 Reynolds 수가 커지게 되므로 이는 전과 같이 같은 형상에서 동일 유체인 경우 속도가 크다는 것을 뜻하고 자연히 운동량이 커져서 Reynolds 수가 작을때(200) 보다 생성된 와동

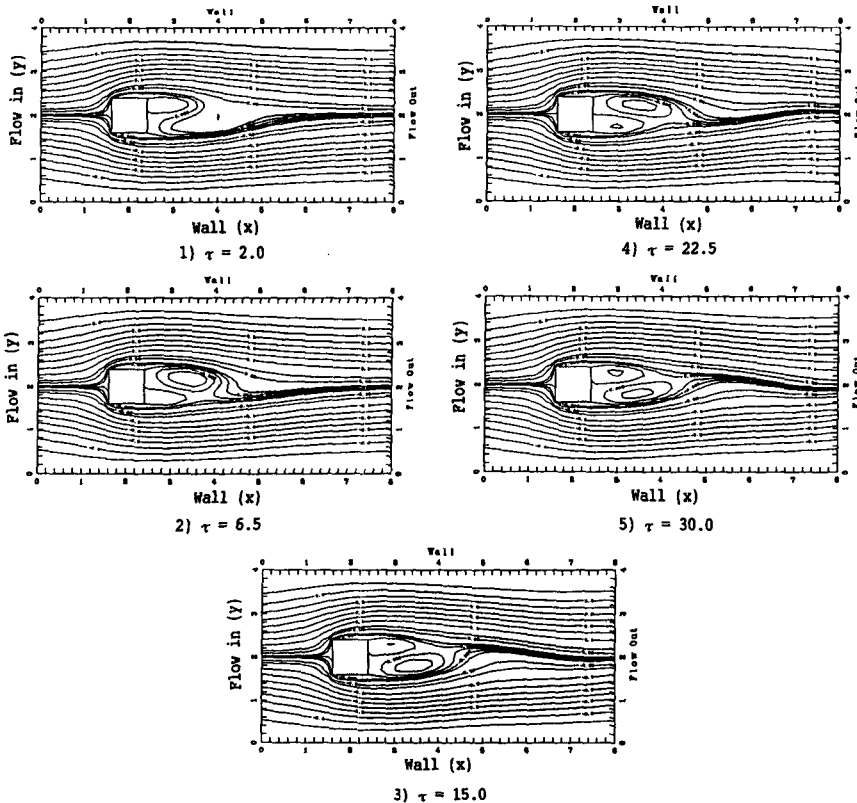


Fig. 8 Stream line behind a rectangular bluff body for vortex shedding at Re=200

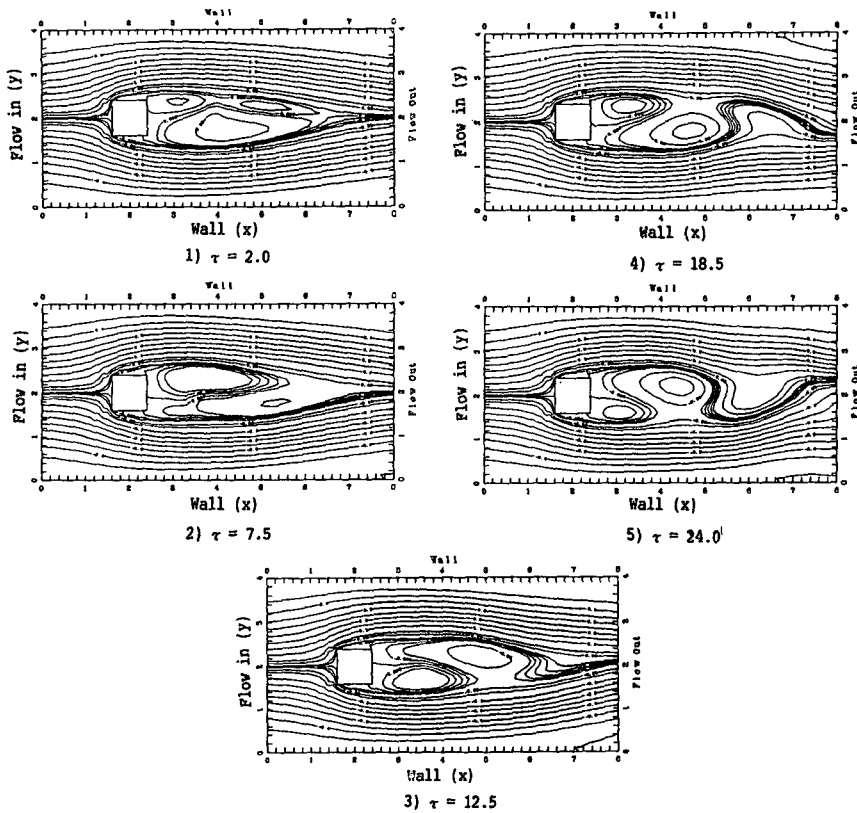


Fig. 9 Stream line behind a rectangular bluff body for vortex shedding at Re=500

고리의 크기가 크며 생성되어 소멸되기 까지 시간이 긴 것을 알 수 있다.

본 연구에서의 경우와 양적인 직접 비교가 가능한 기존 연구 결과를 찾기가 어려워 개발된 프로그램의 정확성을 여기에서 직접 입증하지 못하나, 이에 대한 연구는 현재 진행되고 있다. 또한 Reynolds 수가 더 큰 경우에 대한 계산도 수행중으로, 계산 시간이 매우 길어지지만 해가 수렴되는 한계를 찾고 있다. 또한 개발된 프로그램은 입력데이터 수정만으로 두개 이상의 지주가 있는 경우에 대한 해석이 가능하게 되어 있으며, 이에 대한 연구도 진행되고 있다.

5. 결 론

공기유량계측센서의 설계기술을 확립하기 위한 기초연구로서 평행평판 내의 사각형 지주에 의한 와동 유동을 수치 해석하기 위한 프로그램이 개발되었다.

Reynolds 수가 200인 경우와 500인 경우에 대한 해석을 통하여 다음으로 요약되는 결과를 얻었다.

(1) Reynolds 수의 증가에 따라 지주 뒤의 와동 유동(vortex flow)이 정상상태에 도달하는 시간과 박리영역의 길이가 길어지는 것을 알 수 있었다.

(2) 와동 흘림(vortex shedding)을 구하기 위한 교란방법으로 박리영역 안에 최대 와도값의 5%를 일정기간($\tau=2$) 동안 더해주는 방법을 사용하여 전반적으로 충분한 와류 계산 결과를 얻을 수 있었다.

(3) 벽면 경계조건 도입을 위해 유량함수를 4th-order Lagrange interpolating polynomial로 가정할 경우 수렴성이 양호하였으며, 들출 모서리에서 와도값의 경계조건은 x 방향과 y 방향으로 각기 추정된 값이 상이하여 물리적 모순성이 있었으나 해를 구하는데 영향은 없었다.

참고문헌

(1) Son, J.S. and Hanratty, T.J., 1969, "Numerical

- Solution for Flow around a cylinder at Reynolds Numbers of 40, 200, and 500," J. Fluid Mech., Vol. 35, Part 2, pp. 369~386.
- (2) Braza, M., Chassaing, P. and Minh, H. H., 1986, "Numerical Study and Physical Analysis of the Pressure and Velocity Fields in the near Wake of a Circular Cylinder," J. Fluid Mech., Vol. 165, pp. 79~130.
- (3) Anderson, D. A., Tannehill, J. C. and Pletcher, R.H., 1984, "Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer," McGraw-Hill.
- (4) Roache, P. J., 1976, "Computational Fluid Dynamics," Hermosa Publishers,
- (5) Mitchell, A. R., 1977, "Computational Methods in Partial Differential Equation" John Willey & Sons.
- (6) Ames, W. F., 1977, "Numerical Methods of Partial Differential Equations," Academic Press.
- (7) Richtmyer, R. D. and Morton, K. W., 1967, "Difference Methods for Initial Value Problems," Interscience Publishers.