

〈論 文〉

효율적 모우드시험을 위한 가진점과 응답측정점의 결정

박종필* · 김광준** · 박영진**

(1992년 3월 2일 접수)

Determination of Excitation and Response Measurement Points for an Efficient Modal Testing

Jong-Pill Park, Kwang-Joon Kim and Youngjin Park

Key Words : Modal Testing(모우드 시험), Excitation Point(가진점), Response Measurement Point(응답 측정점), Error Cost Function(오차 비용함수), Singularity Factor(특이인자), Driving Point Modal Constant(가진점 모우드상수)

Abstract

A method, which uses analytical or numerical modal analysis results, e.g. from finite element analysis, to select desirable response measurement and excitation points for an efficient modal testing is introduced. First, points of master degree of freedom(DOF) are determined so as to statistically minimize errors between responses of a full order model and those estimated from the reduced order model. Such master DOF's are selected as the response measurement points. Then a criterion named 'driving point modal constant(DPMC)' related to the magnitudes of resonance peaks of the driving point frequency response functions is used to select the point of excitation out of the master DOF's. In this work, the method is demonstrated through applications to modal testing on a one dimensional cantilever beam and an aluminum plate and the results are compared with those by another technique. Also, the method is applied to a two dimensional structural component of a passenger car.

기 호 설 명

$[C_n]$: $n \times n$ 감쇠행렬
 J : 오차비용함수
 $[K_n]$: $n \times n$ 강성행렬
 $[M_n]$: $n \times n$ 질량행렬
 $\{n\}$: 외란벡터
 $\{p_n\}$: 모우드좌표계에서 응답벡터
 U_{ik} : k 번째 모우드형상벡터의 i 번째요소

$\{U_k\}$: k 번째 모우드형상벡터
 $[U_{nn}]$: $n \times n$ 모우드행렬
 $\{x_a\}$: 대표자유도지점에서 응답벡터
 $\{\bar{x}_a\}$: 대표자유도지점에서 외란이 추가된 응답벡터
 $\{x_d\}$: 삭제자유도지점에서의 응답벡터
 $\{x_n\}$: 물리좌표계에서 응답벡터
 σ^2 : 외란의 분산
 ω_k : k 번째 비감쇠 고유진동수
 ζ_k : k 번째모우드의 감쇠율

*한국과학기술원 기계공학과

**정회원, 한국과학기술원 기계공학과

1. 서 론

선형기계구조물의 동특성인 고유진동수, 감쇠비, 모우드형상벡터 등을 통상 모우드매개변수라고 하며, 이러한 모우드매개변수를 구하는 기법에는 해석적(혹은 수치해석적) 방법과 실험적방법이 있다. (1) 전자는 초기설계단계에서 흔히 적용되며 최근에는 주로 유한요소법에 의존하고있고, 후자는 동적 성능의 평가나 개선을 위한 재설계단계에서 많이 적용되고 있으며 모우드시험(modal testing)이라고 불리워진다.

모우드시험에 있어 올바른 응답측정점과 가진점의 선정은 필수적이나 많은 경우 실험자의 경험이나 직관에 의해서 주로 결정되어 왔다. 하지만 최근에 들어 모우드시험기술의 발전에 따라 매우 규모가 크고 복잡한 구조물(예 : 우주정류장, 핵발전소 기계구조물 등)의 동특성규명 및 성능평가에도 그 적용이 확대되어 감에 따라, 시행착오를 최소화하고 측정결과와 신뢰도를 높이기 위한 효율적 응답측정 및 가진지점의 선정에 관한 연구가 많이 진행되었다. (2,3,4,5,6,7)

본 연구에서는 해석적 모우드해석 결과인 모우드형상벡터를 이용하여 효과적인 가진점과 응답측정점을 선정하는 기존의 두 방법에 대해 간략히 기술하고 비교검토하고자 하였다. 첫번째 방법은 주파수응답함수에서 관심있는 모우드의 공진피크치와 관련된 모우드상수를 이용하는 것이고, (3) 두번째 방법은 계의 관심있는 모우드에 대한 동적 특성을 가장 잘 나타낼 수 있도록 특이치분해(singular value decomposition) 기법을 적용함으로써 계의 대표자유도(master degree of freedom) 지점들을 선정하는 것이다. (8) 우선 단순한 계인 외팔보와 알루미늄평판에 대해 두 방법을 적용함으로써 비교검토하였고, 이 결과로부터 두번째 방법의 우수성을 확인할 수 있었다. 이에 따라 보다 복잡한 형상을 갖는 승용차의 부분구조물인 조향틀고정대(deck cross member : DCM)에 대해서 두번째 방법을 이용하여 모우드 시험을 수행하고 그 결과에 대하여 논하였다.

2. 가진지점 및 응답측정지점의 선정방법

2.1 모우드상수를 이용한 선정

● 가진점의 선정

일반적인 n 자유도 선형계의 운동방정식은 다음과 같은 수식으로 표현할 수 있고,

$$[M_n]\{\ddot{x}_n\} + [C_n]\{\dot{x}_n\} + [K_n]\{x_n\} = \{F_n\} \quad (1)$$

이러한 계에서 감쇠가 선형이거나 혹은 적다는 가정하에서는, 관심있는 출력을 변위로 나타낼때, 계의 주파수 응답행렬은 다음의 수식으로 나타낼 수 있다.

$$[H(\omega)] = \sum_{k=1}^n \frac{\{U_k\}\{U_k\}^T}{-\omega^2 + j2\zeta_k\omega_k\omega + \omega_k^2} \quad (2)$$

한편 실험에 있어서는 계의 응답을 흔히 가속도계를 사용하여 측정하므로 식 (2)의 양변에 $-\omega^2$ 을 곱하여 가속도에 대한 전달함수행렬 $[A(\omega)]$ 로 표현하면 다음과 같다.

$$[A(\omega)] = -\omega^2[H(\omega)] = \sum_{k=1}^n \frac{\omega^2\{U_k\}\{U_k\}^T}{\omega^2 - j2\zeta_k\omega_k\omega - \omega_k^2} \quad (3)$$

위의 식(3)에서 i 번째 행, j 번째 열에 위치한 요소를 적어 보면 아래와 같게 되는데,

$$A_{ij}(\omega) = \frac{a_i}{f_j} = \sum_{k=1}^n \frac{\omega^2 U_{ik} U_{jk}}{\omega^2 - j2\zeta_k\omega_k\omega - \omega_k^2} \quad (4)$$

이는 j 지점에서 가진하고 i 지점에서 측정된 가속도 전달함수를 나타낸다. 이때 $\omega = \omega_k$ 에서 전달함수는 근사적으로 다음과 같게 된다.

$$-\frac{U_{ik} U_{jk}}{j2\zeta_k} \quad (5)$$

여기서 $U_{ik} U_{jk}$ 를 모우드상수(modal constant 혹은 residue)라고 한다. 가진점과 측정점이 j 로서 일치하는 경우에 대해 식(4)를 다시 적어보면 다음과 같다.

$$A_{ij}(\omega) = \frac{a_j}{f_j} = \sum_{k=1}^n \frac{\omega^2 U_{jk}^2}{\omega^2 - j2\zeta_k\omega_k\omega - \omega_k^2} \quad (6)$$

이 경우에도 식(5)에 보인 바와 마찬가지로 $\omega = \omega_k$ 에서의 전달함수 $A_{ij}(\omega_k)$ 는 근사적으로 U_{jk}^2 에 비례함을 알 수 있는데, 이 U_{jk}^2 값을 j 지점에서 k 번째 모우드의 가진점모우드상수(driving point modal constant : DPMC)라 부르도록 한다. DPMC가 크다는 것은 같은 크기의 가진력으로부

터 큰 응답을 얻을 수 있다는 것을 의미하므로, 구조물과 가진기의 임피던스 부합(mismatch) 등에 의한 문제가 발생하지 않을 경우에는⁽¹⁾, 관심있는 모우드에 대하여 DPMC값이 평균적으로 큰 지점을 선정하는 것이 모우드매개변수를 추정하는 데 있어 신호/잡음 비 등을 고려할 때 유리하다는 것을 알 수 있다. 즉, 임의의 j 점에서 관심있는 m ($< n$)개의 모우드에 대하여 U_{jk}^2 의 평균값을 다음과 같이 정의하면,

$$\overline{\text{DPMC}}(j) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m U_{jk}^2 \quad (7)$$

이 값이 큰 지점이 바람직하다. 한편 이 값 자체로는 한 지점이 특정모우드의 노우드점에 근접하고 있는지에 대한 구분이 어려우므로 이를 고려하기 위하여 다음과 같이 가중된(weighted) $\overline{\text{WDPMC}}(j)$ 를 정의하였다.

$$\overline{\text{WDPMC}}(j) = \overline{\text{DPMC}}(j) \times \text{Min}[U_{jk}^2] \quad (8)$$

위의 식(8)에서 $\text{Min}[U_{jk}^2]$ 은 m 개의 모우드중에서 가장 작은 값을 의미한다. 따라서 식(8)의 $\overline{\text{WDPMC}}$ 값이 큰 지점을 가진점으로 선정하면 관심있는 m 개의 모우드가 평균적으로 잘 측정되게끔 가진시킬 수 있다.

● 측정점의 선정

식(8)에 의해 j 지점이 가진점으로 결정된 경우, 지점 i 에서 측정되는 주파수응답함수의 고유진동수 ω_k 에 해당하는 피크값의 크기는 모우드 상수 $U_{ik}U_{jk}$ 에 비례함을 알 수 있다. 따라서 가진점선정의 경우와 마찬가지로 임의의 측정점 i 에서 관심있는 m 개의 모우드에 대하여 평균모우드상수(modal constant : MC)를 다음과 같이 정의하였다.

$$\overline{\text{MC}}(i) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m |U_{ik}U_{jk}| \quad (9)$$

여기서 절대치를 사용한 이유는 각 모우드에서의 응답의 방향성보다는 크기가 중요하기 때문이다. 한편 i 지점이 어느 한 모우드의 노우드점이 되는 경우를 피하기 위해 평균모우드상수에 m 개의 모우드상수중 최소인 것을 아래와 같이 곱하여 가중평균 모우드상수 $\overline{\text{WMC}}(i)$ 를 정의하였다.

$$\overline{\text{WMC}}(i) = \overline{\text{MC}}(i) \times \text{Min}[U_{ik}U_{jk}] \quad (10)$$

따라서, 통상적으로 실험에서는 계의 전체자유도인 n 보다 작은 수의 지점에서 측정하게되는데, 이러한 경우 위의 식(10)에 보인 가중평균모우드상수값을 기초로 측정지점의 우선순위를 결정할 수 있다.

2.2 절대특이인자(Absolute Singularity Factor : ASF)를 이용한 대표지점선정방법의 적용

전체자유도가 n 인 계에서 m 개의 모우드만에 관심있을 때 이를 잘 묘사할 수 있는 대표지점을 선정하기 위한 여러가지 방법들이 연구되어오고 있다.^(2,3,5,6,7,8) 본 연구에서는 특이치분해법을 이용하여 가장 바람직한 대표자유도지점(Master DOF's)을 선정하는 문헌⁽⁶⁾의 방법에 기본을 두어 모우드시험시의 응답측정지점들을 우선 선정하고, 가진지점은 선정된 응답측정지점들중에서 전절의 방법에서와 마찬가지로 $\overline{\text{DPMC}}$ 값에 기초하여 결정하였다. 이 방법을 간략히 설명하면 다음과 같다.

◎ 대표자유도지점(Master DOF's)의 선정

식(1)로 표현되는 n 자유도계의 응답을 모우드행렬 $[U_{nn}]$ 을 이용하여 표현하면 다음과 같은데,

$$\{x_n\} = [U_{nn}]\{p_n\} \quad (11)$$

전체적으로 n 개 모우드의 중첩으로 응답이 나타내질 수 있지만, 이들중 m 개의 모우드에만 관심이 있다면 위의 식(11)은 근사적으로 다음식에 의해 대체될 수 있다.

$$\{x_n\} = [U_{nm}]\{p_m\} \quad (12)$$

$n \times 1$ 응답벡터인 $\{x_n\}$ 중에서 m 개의 모우드를 보다 잘 묘사할 수 있는 지점을 대표자유도지점이라고하고 이를 $\{x_a\}$ 로 표시하고, 그 나머지 지점들을 삭제자유도지점(Deleted DOF's)이라 하고 $\{x_d\}$ 로 표시하도록 한다. 그러면 전체 n 개 자유도지점에서의 응답 $\{x_n\}$ 은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\{x_n\} = \begin{Bmatrix} x_a \\ x_d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_{am} \\ U_{dm} \end{Bmatrix} \{p_m\} \quad (13)$$

식(13)중에서 a 개 대표자유도지점에서의 응답만을 다시 나타내면 아래식과 같은데,

$$\{x_a\} = [U_{am}]\{p_m\} \quad (14)$$

실제 모우드시험의 많은 경우에 $a > m$ 이므로, 식(14)에서 주어진 $\{x_a\}$ 와 $[U_{am}]$ 으로부터 $\{p_m\}$ 을 구하고자하는 경우에는 최소오차승법을 이용하여

다음과 같이 구할 수 있다.

$$\{b_m\} = [U_{am}]^+ \{x_a\} \quad (15)$$

여기서 $[U_{am}]^+$ 는 유사역(pseudo inverse) 행렬로서 다음식들로 주어진다.

$$[U_{am}]^+ = [Y_{mm}]^{-1} [U_{am}]^T \quad (16)$$

$$[Y_{mm}] \equiv [U_{am}]^T [U_{am}] \quad (17)$$

식(15)를 식(12)에 대입하면 아래식이 보이는 바와 같이 a 개 대표자유도지점에서의 응답 $\{x_a\}$ 로부터 전체 자유도지점에서의 응답 $\{x_n\}$ 을 확장추정할 수 있다.

$$\{x_n\} = [U_{nm}] [U_{am}]^+ \{x_a\} \quad (18)$$

대표자유도지점에서의 응답 $\{x_a\}$ 에 서로 상호상관이 없고 분산행렬이 $\sigma^2 [I]$ 인 외란 $\{n\}$ 이 중첩되는 경우, 응답은 아래와 같이 $\{\hat{x}_a\}$ 로 변하게 된다.

$$\{\hat{x}_a\} = \{x_a\} + \{n\} \quad (19)$$

이러한 외란은 식(18)에 보인 바와 같이 전체 n 개 자유도지점에서의 응답에 영향을 미치게 되는데, 이 영향을 질량행렬 $[M]$ 에 대하여 가중총량화하여 오차비용함수 J 를 다음과 같이 정의 및 유도하였다.

$$J = E\{\{e(t)\}^T [M] \{e(t)\}\} \\ = \sigma^2 Tr([Y_{mm}]^{-T}) \quad (20)$$

위의 식(20)에서 E 는 기대치연산자이고, Tr 은 행렬의 트레이스(trace)를 의미하며, $\{e(t)\}$ 는 아래에 정의된 바와 같이

$$\{e(t)\} = \{x_n(t)\} - \{\hat{x}_n(t)\} \quad (21)$$

a 개 대표추정지점에서의 외란이 n 개 전체추정지점에서의 응답추정에 미치는 영향을 나타낸다. 따라서 식(20)에 보인 오차비용함수 J 를 최소화하는 대표자유도위치 $\{x_a\}$ 를 선정하는 것은 이 위치에서의 외란이 전체자유도에서의 응답추정에 미치는 영향을 최소화되도록 하는 것이다.

한편, 식(14)의 $a \times m$ 행렬 $[U_{am}]$ 을 특이치분해(singular value decomposition)를 하면 다음과 같다.

$$[U_{am}] = [L][\Sigma][R]^T \quad (22)$$

여기서 $[L]$, $[\Sigma]$, $[R]$ 은 각각 $a \times a$ 정규화된 직교(orthonormal) 행렬, $a \times m$ 행렬(처음의 m 개 대

각요소를 제외한 모든 요소는 0), $m \times m$ 정규화된 직교행렬이다. 식(22)를 식(21)에 대입하면 오차비용함수는 다음과 같이 간단하게 정리될 수 있다.

$$J = \sigma^2 \sum_{i=1}^m s_i^{-2} \quad (23)$$

여기서 s_i 는 행렬 $[\Sigma]$ 의 i 번째 대각선 요소이다. 특이인자(singularity factor : SF)라는 값을 다음과 같이 정의 및 유도하면, 오차비용함수 J 는 SF 제곱값에 비례하게 된다는 것과 특이치분해절차없이 역행렬계산으로부터도 얻어질 수 있다는 것을 알 수 있다.

$$SF = \sqrt{\sum_{i=1}^m s_i^{-2}} = \|U_{am}^+\| = \sqrt{\sum_j \sum_i [(U_{am})^{-1}]_{ij}^2} \quad (24)$$

여기서 $\|\cdot\|$ 는 Euclidean Norm을 나타낸다. 한편 SF값의 하한치 SF_{\min} 는 다음과 같게 된다.

$$SF_{\min} = \|[U_{nm}]^{-1}\| \quad (25)$$

SF가 a 개의 대표자유도를 측정할 경우의 응답추정 오차를 나타내는 반면에 SF_{\min} 은 전체자유도 n 개 지점에서 측정할 경우의 응답추정오차를 나타낸다. 이를 이용하면 대표자유도지점의 선정을 절대적인 의미에서 평가할 수 있다. 즉, 다음과 같이 절대특이인자(absolute singularity factor : ASF)를 정의하면,

$$ASF = \frac{SF}{SF_{\min}} (\geq 1) \quad (26)$$

이 값은 전체자유도 n 대신 a 개의 대표자유도지점에서만의 응답추정으로 인하여 증가하는 오차의 비를 나타내므로, 1에 가까울수록 대표자유도지점의 선정이 바람직한 것임을 의미한다. 즉, $[U_{am}]$ 의 선정을 위의 ASF값이 적게되게 할수록, 이들 측정지점에서의 오차가 전체자유도지점에서의 응답추정에 미치는 영향이 적어지게된다.

3. 단순계예의 실험을 통한 비교검증 및 실제계예의 적용예

여기서는 앞서 기술된 두 방법을 비교검증하기 위하여 각 방법을 단순계인 외팔보와 평판에 적용하여 가진점과 측정점을 선정하고 그 결과를 검토하였다. 비교평가의 기준은 전체자유도지점에서 응답을 실제 측정된 결과로부터 산출된 모우드형상백

터와 각 방법에 의해 선정된 대표자유도지점에서만 측정된 응답으로부터 전체자유도지점으로 확대추정된 모우드 형상벡터사이의 차이를 다음과 같이 정의하여 이를 이용하였다.

$$\Delta U_k = \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^n (U_{ik} - \hat{U}_{ik})^2 \right\}^{1/2} \quad (27)$$

여기서 k 와 n 은 각각 모우드번호 및 전체자유도수를 나타내고, U_{ik} 와 \hat{U}_{ik} 는 각각 전체 자유도지점에서 측정된 응답으로부터 얻은 모우드형상과 대표 자유도지점의 응답으로부터 확대 추정된 모우드형상을 나타내는 요소이다. 한편 확대추정하는 방법으로는 단순선형 내삽 혹은 외삽기법과 식(18)에 의해 변환하는 기법 등 두가지를 이용하였다.

3.1 외팔보에의 적용

Fig. 1에 보인 바와 같이 전체자유도지점수가 7인 외팔보에서 처음의 두 모우드를 정확하게 측정하기 위하여 가진지점 한 곳 및 가진점의 응답 측정지점 한 곳을 선정하는 경우를 고려하였다.

● 모우드 상수값에 기초한 선정

모우드 상수값에 의한 측정지점의 선정은 가진지점이 선정된 상태에서 이루어지게되는 데, 7개의 절점으로 구성된 FEM 모델로부터 처음 두 개의 모우드에 대하여 계산된 식(8)에 의한 가중평균가진점모우드상수 \overline{WDPMC} 값은 Table 1에 보인 바와 같다. 이로부터 지점 7이 가장 좋은 가진점임을 알 수 있다. 지점 7을 가진점으로 선정한 상태에서 식(10)에 의해 계산된 가중평균모우드상수 \overline{WMC} 값은 Table 2와 같은데, 이로부터 가장 좋은 측정점은 가진 지점 1외에 지점 5임을 알 수 있다.

● 절대특이인자값에 기초한 선정

Fig. 1에 보인 외팔보에서 고정경계지점 1을 제외한 6개 지점중에서 두 점을 선정하는 조합의 수

는 $C_6^2=15$ 로서, 이들 각 조합에 대해 식(26)의 ASF값을 계산한 결과가 Table 3에 보여지고 있는데 지점 4 & 7의 조합이 ASF값이 1.5073으로서 가장 적고, 지점 5 & 7의 조합은 ASF 값이 1.5905로서 두번째로 바람직한 대표자유도인 것으로 나타났다. 또한 가진점은 식(8)의 \overline{WDPMC} 값을 적용한 결과, 지점조합 4 & 7 및 5 & 7 두 경우 모두 지점 7로 결정 되었다.

Table 4에는 모우드상수이용법 및 절대특이인자 이용법의 비교를 위해 전체자유도지점에서의 모우드형상오차로 정의된 식(27)에 의해 계산된 ΔU_k 가 보여지고 있는데, 확대추정을 위한 두 방법 모두의 경우에 절대특이인자이용법에 의한 것이 전체자유도지점에서의 측정 결과에 보다 가까움을 알 수 있다. 두 확장추정방법을 비교해보면, 실험전 단계에서 계산된 모우드행렬을 이용하여 변환하는 것이

Table 1 Weighted average driving point modal constant \overline{WDPMC} at 7 nodes of the cantilever beam when the lowest two modes are of interest

Node Number: j	$\overline{WDPMC}(j)$	Rank
1	0.0	7
2	0.0012	6
3	1.1548	5
4	8.0902	3
5	9.6046	2
6	3.3658	4
7	22.4665	1

Table 2 Weighted average modal constant \overline{WMC} at 7 nodes of the cantilever beam when the excitation point is 7 and the lowest two modes are of interest

Node Number: i	$\overline{WMC}(i)$	Rank
1	0.0	7
2	0.1369	6
3	1.4043	5
4	4.0173	3
5	4.6078	2
6	2.3974	4
7	22.4665	1

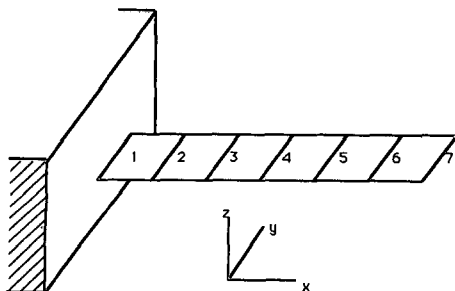


Fig. 1 Cantilever beam model

훨씬 오차를 적게함을 알 수 있다. Fig. 2에는 참 고로 각 방법에 의한 모우드 형상을 그림으로 나타 내었다.

3.2 평판에의 적용

또 하나의 예제로서 Fig. 3에 보인 바와 같은 전 체 45개의 절점을 갖는 평판에서 처음의 세모우드 에 관심이 있을 때, 가진점을 포함하여 대표자유도 6개 지점을 선정하는 문제를 고려하였다.

● 모우드상수값에 기초한 선정

세번째 모우드까지 고려하여 계산한 \overline{WPMC} 값 은 Table 5에 보여진 바와 같은데, 지점1(혹은 37)이 가장 좋은 가진점임을 알 수 있다. 다음단계 로서 가진지점이 1인 경우에 계산된 \overline{WMC} 값은

Table 3 Combinations of 2 master DOF's and corresponding ASF values for cantilever

Master DOF's	ASF
2 & 3	60.1495
2 & 4	14.0782
2 & 5	6.8635
2 & 6	4.4543
2 & 7	5.1974
3 & 4	11.9426
3 & 5	3.5844
3 & 6	2.0143
3 & 7	2.1997
4 & 5	4.1693
4 & 6	1.7677
4 & 7	1.5073
5 & 6	2.3333
5 & 7	1.5905
6 & 7	2.8705

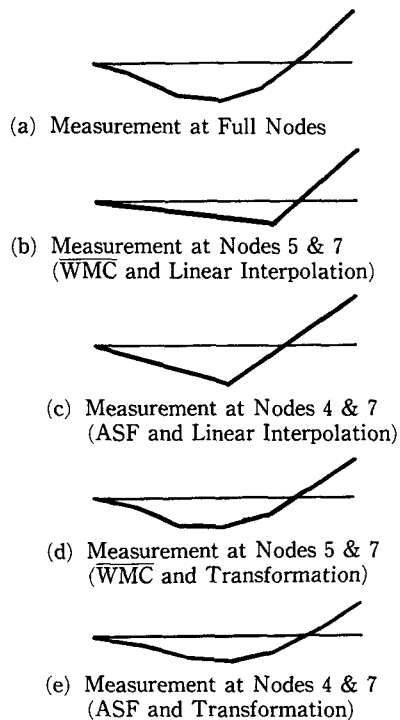


Fig. 2 The second mode shapes of cantilever beam

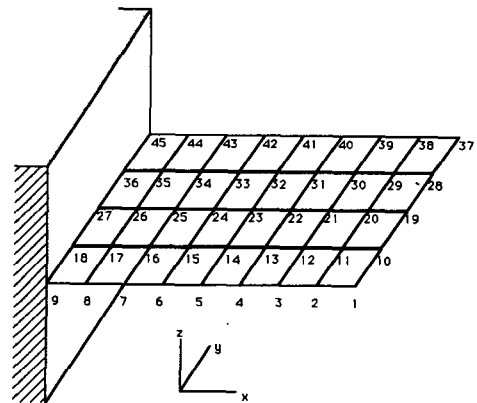


Fig. 3 Plate model

Table 4 Mode shape estimation errors ΔU_k for two measurement point selection methods and mode shape expansion methods in case of cantilever beam

Selection Method	Expansion Method	ΔU_k		
		$k=1$	$k=2$	Average
\overline{WMC}	Interpolation	0.01825	0.08762	0.05293
ASF	Interpolation	0.01276	0.05282	0.03279
\overline{WMC}	Transformation	0.00157	0.00940	0.00549
ASF	Transformation	0.00134	0.00854	0.00494

Table 6에 보여진 바와 같은데, 가장 바람직한 여섯개의 측정점은 지점 1(혹은 37)을 포함하여 지점 4, 10, 28, 37(혹은 1), 40이다.

● 절대특이인자값에 기초한 선정

평판끝부분의 고정경계조건 다섯 지점을 제외한 40개 지점중에서 여섯 지점을 선정하는 모든 조합의 수는 $C_{35}^6=3838380$ 으로서 이들 모두에 대해 식 (26)에 의한 ASF값을 계산한 결과, ASF값이 가장 작은 대표자유도지점조합은 1, 4, 5, 37, 40, 41이고 이경우의 ASF값은 1.9271이었다. 이 6개의 지점 각각에 대하여 \overline{WDPMC} 값을 계산한 결과 지점 1이 가진점으로 선정되었다.

● 기하학적 형상을 고려한 절대특이인자기법

위에서 보인 바와 같이 전체자유도 및 선정자유도수의 증가에 따라 절대특이인자를 비교계산하여야 할 조합의 수는 급격히 늘어나게된다. 한편 실제 모우드시험의 경우에는 구조물의 기하학적 형상을

고려하여 가진점 및 응답측정점을 선정하는 것이 현실적이다. 또한 전체 조합에 대한 ASF를 비교하지 않더라도 ASF 그 자체로서 절대적인 의미를 지니므로, 즉 1보다 큰 정도에 따라 대표자유도지점의 적정성 여부를 평가할 수 있으므로 형상을 고려한 몇 가지 방안에 대해서만 ASF를 비교계산하는 것이 바람직하다. 이와 같이 평판의 형상을 고려하여 1, 4, 8, 37, 40, 44로 구성된 조합을 임의로 선정했는데, 이 경우의 ASF값은 2.3333이었다. Table 3에 보인 외팔보의 경우에서 볼 수 있듯이 절대적 최소치인 1보다 그리 큰 편이 아니며 따라서 대표자유도지점으로 적합한 것으로 볼 수 있다. 가진지점은 이 여섯 지점중에서 \overline{WDPMC} 계산 결과를 바탕으로 지점 1로 선정되었다.

Table 7에는 외팔보의 경우와 마찬가지로 두 방법 및 측정지점이 계의 전반적 영역에 분포되도록 기하학적 형상을 고려한 ASF기법의 비교를 위해

Table 5 Weighted average driving point modal \overline{WDPMC} at 45 nodes of the cantilever plate when the lowest three modes are of interest

Node Number;j	$\overline{WDPMC}(j)$	Rank	Node Number;j	$\overline{WDPMC}(j)$	Rank
1	92.6929	1	24	2.6572E-24	37
2	5.8799	9	25	2.8197E-24	36
3	4.2221	15	26	2.0291E-30	40
4	11.8617	5	27	0.0000E-00	41
5	4.5366	13	28	43.3780	3
6	9.6508E-01	19	29	7.1530	7
7	6.9636E-02	25	30	3.966E-01	23
8	4.1341E-04	31	31	5.8318	11
9	0.0000E+00	41	32	2.7290	17
10	43.3780	3	33	6.9388E-01	21
11	7.1530	7	34	6.0607E-03	27
12	3.9667E-01	23	35	4.989SE-04	29
13	5.8318	11	36	0.0000E+00	41
14	2.7290	17	37	92.6929	1
15	6.9387E-01	21	38	5.8799	9
16	6.0607E-02	27	39	4.2221	15
17	4.9895E-04	29	40	11.8617	5
18	0.0000E+00	41	41	4.5366	13
19	1.0110E-23	34	42	9.6508E-01	19
20	1.1874E-25	39	43	6.9636E-02	25
21	1.3584E-24	38	44	4.133SE-04	32
22	8.1311E-24	35	45	0.0000E+00	41
23	6.2455E-23	33			

두 가지 확장방법으로 전체자유도지점에서 추정된 모우드형상과 실제로 전체자유도에서 측정을 통해 얻어진 모우드형상 사이의 오차를 나타내었다. 평판의 경우에도 모우드상수법보다는 절대특이인자방법이 보다 나은 결과를 가져오고 있음을 볼 수 있

다. 형상은 고려한 ASF 방법은 확장추정방법에 따라 다르기는 하지만 ASF에 의한 결과와 \overline{WMC} 에 의한 결과에 근접하고 있으므로 그 선정에 큰 무리가 없었음을 보여주고 있다. 두 확장방법을 비교해보면, 이 경우에도 외팔보의 경우처럼 실험전

Table 6 Weighted average modal constnt \overline{WMC} at 45 nodes of the cantilever plate when the excitation point is 1 and the lowest three modes are of interest

Node Number:i	$\overline{WDPMC}(i)$	Rank	Node Number:i	$\overline{WDPMC}(i)$	Rank
1	92.6929	1	24	1.5019E-11	36
2	22.3246	11	25	1.4733E-11	37
3	18.9737	15	26	1.2106E-14	40
4	37.0971	5	27	0.0000E+00	41
5	21.7935	13	28	83.2065	3
6	9.4502	19	29	24.7743	7
7	2.4223	25	30	5.5989	23
8	1.8161E-01	29	31	23.9459	9
9	0.0000E+00	41	32	16.0250	17
10	83.2065	3	33	7.3861	21
11	24.7743	7	34	2.0531	27
12	5.5989	23	35	4.9895E-04	29
13	23.9459	9	36	0.0000E+00	41
14	16.0250	17	37	92.6929	1
15	7.3861	21	38	5.8799	9
16	2.0531	27	39	4.2221	15
17	1.7965E-01	31	40	11.8617	5
18	0.0000E+00	41	41	4.5366	13
19	3.3590E-11	34	42	9.6508E-01	19
20	3.5732E-12	39	43	6.9636E-02	25
21	1.0145E-11	38	44	4.1335E-04	32
22	3.0226E-11	35	45	0.0000E+00	41
23	7.8253E-11	33			

Table 7 Mode shape estimation errors ΔU_k for three measurement point selection methods and two mode shape expansion methods in case of cantilever plate

Selection Method	Expansion Method	ΔU_k			
		$k=1$	$k=2$	$k=3$	Average
\overline{WMC}	Interpolation	0.6834E-02	0.3205E-02	1.8319E-02	0.9453E-02
ASF	Interpolation	0.7950E-02	0.4513E-02	0.9365E-02	0.7276E-02
Geometric ASF	Interpolation	0.6882E-02	0.4156E-02	1.5216E-02	0.8752E-02
\overline{WMC}	Transformation	0.3311E-02	0.3218E-02	1.1963E-02	0.6134E-02
ASF	Transformation	0.4882E-02	0.2752E-02	1.0416E-02	0.6013E-02
Geometric ASF	Transformation	0.4363E-02	0.3633E-02	1.2075E-02	0.6690E-02

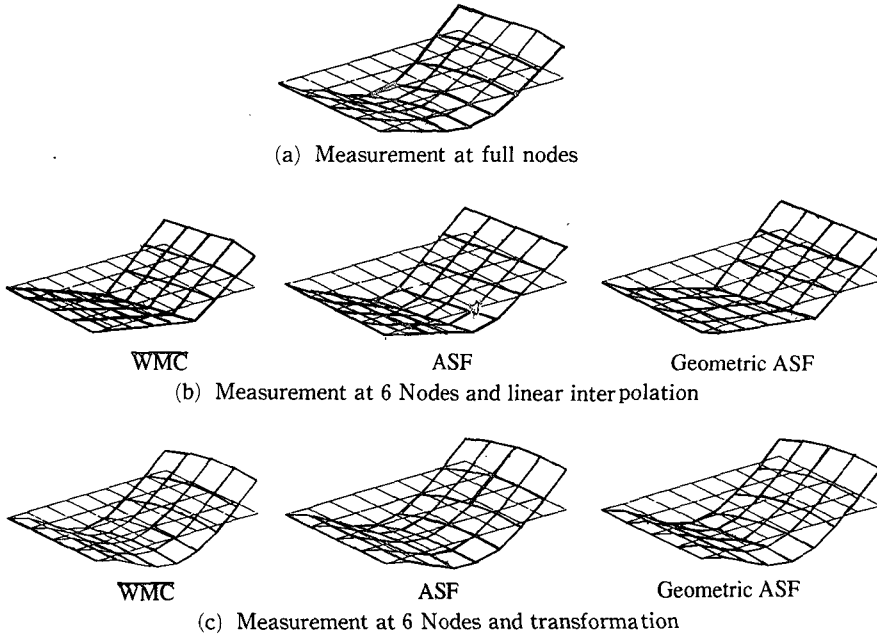


Fig. 4 The third mode shapes of plate

단계에서 계산된 모우드형렬을 이용하여 변환하는 것이 훨씬 오차를 적게함을 알 수 있다. Fig. 4는 평판의 3번째 모우드를 여러가지 방법으로 추정한 결과를 보여주고 있다.

3.3 절대특이인자방법에 의한 승용차조향휠고정대(Deck cross Member : DCM)이 모우드 시험

본 절에서는 승용차에서 조향휠계의 지지를 위한 DCM을 528개 평판 유한요소로 해석한 결과중에서⁹⁾, 3개(94Hz, 279Hz, 600Hz)의 모우드에 대해 모우드시험시 Fig. 5에 보인 바와 같이 고려되었던 29개 지점에서의 모우드형상벡터만을 이용하였다. 우선 6개 지점을 택할 수 있는 모든 조합(475020가지 경우)에 대하여 ASF값을 계산한 결과, 순위 1번의 조합은 지점 16, 20, 21, 22, 27, 29이고, 가장 나쁜 조합은 1, 2, 3, 4, 5, 9이었다. 두 경우의 가진점은 WDPMC에 의해 22 및 5로 결정되었다. 다음으로 형상을 고려하여 대표자유도지점을 15개로 설정하고, 1, 3, 5, 8, 9, 11, 13, 16, 17, 22, 25, 26, 27, 28, 29로 이루어진 조합과 1, 5, 8, 9, 13, 16, 17, 19, 21, 22, 25, 26, 27, 28, 29로 이루어진 조합에 대하여 ASF값을 계산하였는데 각각 1.54786, 1.30597이었다. 가진지점은 두 경우 모두 WDPMC계산결과

22로 결정되었다. 이상의 모든 경우에 확장추정된 모우드형상과 29개 지점에서 직접 측정된 모우드형상과의 오차를 Table 8에 나타내었다. 그리고 Fig. 6에는 몇가지 경우에 대하여 3번째 모우드형상을 나타내었다.

6개 지점을 택한 경우, 3개의 모우드에 대하여 최악의 평균형상오차가 최적의 선정에 비해 정량적으로는 약 3배를 넘는 것에 불과한 것으로 여겨질 수 있지만, Fig. 6이 보여주고 있듯이 극히 부분적으로만 형상을 올바르게 추정할 뿐 전체적으로는 위상이 크게 틀리고 있다. 6개 지점의 모든 조합(475020개)을 비교계산하여 최적의 것으로 선정한

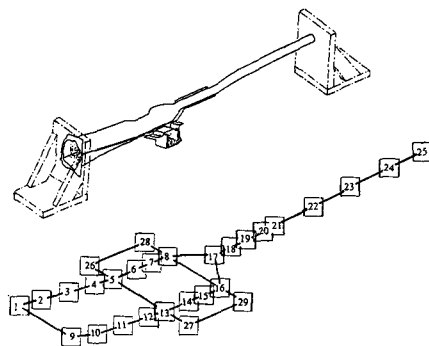


Fig. 5 Nodes of deck cross member

경우의 모우드형상오차가 구조물의 기하학적 형상을 고려하여 15개 지점을 선정한 두 경우에 비해 크게 나타난 것은 정확한 모우드형상을 실험적으로 얻기 위해서는 단순히 수치만에 의존하는 것보다는 어느 정도의 경험이나 직관을 활용하는 전략이 더 바람직스러움을 확인시켜주고 있다. 모우드형상을 대표자유도지점에서의 정보만으로 확장추정하는 방법과 관련하여, 단순한 외팔보나 평판의 경우와 달리 모우드행렬을 이용한 변환이 오히려 더 큰 오차를 가져오고 있는데, 그 이유로는 실제로 복잡한 구조물의 경우에 경계부위나 접합부위의 유한요소 모형화과정에 존재하는 어려움 등을 들 수 있다.

4. 결 론

본 연구에서는 유한요소해석의 결과를 이용하여 효율적인 모우드시험을 수행하기 위하여 가진점과 응답측정점을 선정하는 한 방법으로서 절대특이인 차이용법을 소개하고, 모우드상수를 이용하는 방법과 함께 단순계인 외팔보와 평판에 적용하므로써 비교평가하고자 하였다.

각 예제에서 두 방법에 의한 가진점은 동일한 지점으로 선정되었고, 응답측정점은 거의 비슷한 지점들로 선정되었다. 한편, 전체자유도지점으로 확장된 모우드형상의 오차를 살펴보면, 두 예제 모두의 경우에 ASF방법에 의한 결과가 모우드상수방

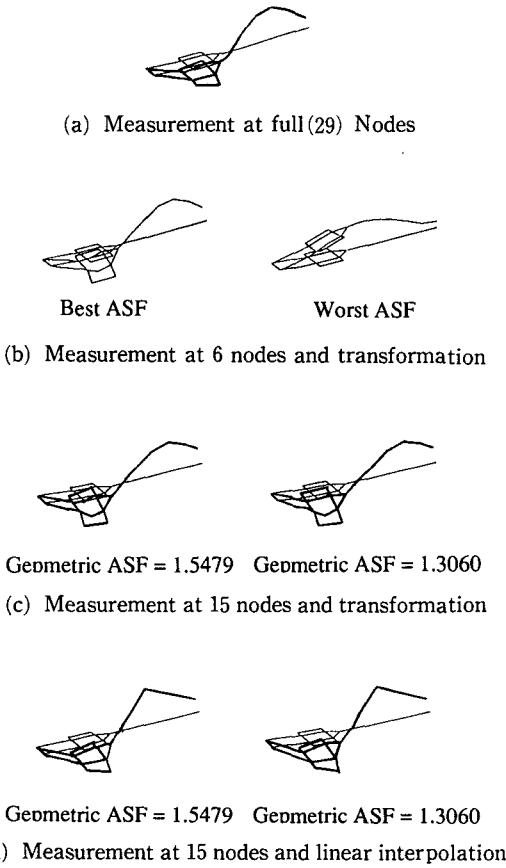


Fig. 6 The third mode shapes of DCM

Table 8 Mode shape estimation errors ΔU_k for different master DOF's and mode shape expansion methods in case of deck cross member

Master DOFs	Expansion Method	ΔU_k			
		$k=1$	$k=2$	$k=3$	Average
16, 20, 21, 22, 27, 29	Transform	0.01065	0.01869	0.02340	0.01758
1, 2, 3, 4, 5, 9	Transform	0.07544	0.03225	0.06587	0.05785
1, 3, 5, 8, 9, 11, 13 16, 17, 22, 25, 26, 27, 28, 29	Transform	0.00495	0.00810	0.02205	0.01170
1, 5, 8, 9, 13, 16, 17 19, 21, 22, 25, 26 27, 28, 29	Transform	0.00352	0.00896	0.02167	0.01384
1, 3, 5, 8, 9, 11, 13 16, 17, 22, 25, 26 27, 28, 29	Interpolation	0.00685	0.00567	0.01139	0.00797
1, 5, 8, 9, 13, 16, 17 19, 21, 22, 25, 26 27, 28, 29	Interpolation	0.00403	0.00564	0.00761	0.00576

법을 적용한 방법에 비해 작은 것으로 미루어 ASF방법의 상대적 우수성을 기대하게 하였다. 그러나 ASF방법에서는 대상계의 절점수 증가에 따라 대표자유도지점들의 조합수가 급격히 늘어나는 문제가 있어, 계의 기하학적 형상을 감안한 몇가지 대안에 한정하여 ASF값을 비교하는 것이 현실적인 한 해결법임도 지적하였다. 특히 승용차의 부분 구조물인 DCM의 경우에는 이러한 면을 보다 뚜렷이 확인할 수 있었다.

대표자유도지점에서의 응답을 가지고 전체자유도 지점에서의 모우드형상을 확장추정하는 두 방법으로서 단순선형내외삽방법과 해석적 계산결과인 모우드행렬이용법을 적용한 결과, 단순계인 외팔보와 평판의 경우에는 후자가 전자에 비해 월등히 우수하였지만, 실제로 복잡한 구조물인 DCM에서는 그 반대의 현상이 관찰되었다. 이는 단순한 계의 FEM모형화는 큰 어려움이 없었지만, DCM의 경우에는 경계조건 혹은 접합부위등의 정확한 모형화에 한계가 있었던 때문으로 생각된다.

참고문헌

(1) Ewins, D.J., 1984, *Modal Testing: Theory and Practice*, Research studies Press.
 (2) Arbel, A., 1981, "Controllability Measures and Actuator Placement in Oscillatory Systems," *international Journal of Control*, Vol.33, No.3, pp. 565~574.
 (3) Kuentzy, D., Richardson, M. and Blakely, K.,

1989 "Using Finite Element Data to Set Up Modal Tests," *Sound and Vibration*, July, pp. 16-23.
 (4) O'Callahan, J. C., Avitabile, P. and Riemer, R., 1989, "System Equivalent Reduction Expansion Process," *Proceedings of the 7th IMAC*, pp. 29~37, Las Vegas, Nevada
 (5) Penny, J., Friswell, M. I. and Garvey, S. D., 1992, "The Automatic Choice of Measurement Locations for Dynamic Testing," *Proceedings of the 10th IMAC*, pp. 30~36, San Diego, CA.
 (6) Bouhaddi, N., Cogan, S. and Fillod, R., 1992 "Dynamic Substructuring by Guyan Condensation : Selection of the Master DOF," *Proceedings of the 10th IMAC*, pp. 328~333, San Diego, CA.
 (7) Flanigan, C.C. and Botos, C.D., 1992, "Automated Selection of Accelerometer Locations for Modal Survey Tests," *Proceedings of the 10th IMAC*, pp. 1205~1208, San Diego, CA
 (8) Qi, Y., Oh, D. and Park, Y., 1991 "Order Reduction in Modal Space Based on Singular Values," *Proceedings of the 1991 Asia-Pacific Vibration Conference*, pp. 2.22~2.27, Monash Univ., Melbourne, Australia.
 (9) 이종원, 김광준, 1991, "승용차 조향장치의 진동해석 및 감소방안", 현대자동차(주)수탁 연구 최종보고서, 한국과학기술원