

〈論 文〉

내부공진을 가진 보의 흡인영역

이원경* · 강명란**

(1992년 4월 21일 접수)

Domains of Attraction of a Forced Beam with Internal Resonance

Won Kyoung Lee and Myoung Ran Ghang

Key Words: Domain of Attraction(흡인영역), Attractor(흡인자), Global Behavior(대국적 거동), Interpolated Mapping Method(보간사상법)

Abstract

A nonlinear dissipative dynamical system can often have multiple attractors. In this case, it is important to study the global behavior of the system by determining the global domain of attraction of each attractor. In this paper we study the global behavior of a forced beam with two mode interaction. The governing equation of motion is reduced to two second-order nonlinear nonautonomous ordinary differential equations. When $\omega_2 \approx 3\omega_1$ and $\Omega \approx \omega_1$, the system can have two asymptotically stable steady-state periodic solutions, where ω_1 , ω_2 and Ω denote natural frequencies of the first and second modes and the excitation frequency, respectively. Both solutions have the same period as the excitation period. Therefore each of them shows up as a period-1 solution in Poincaré map. We show how interpolated mapping method can be used to determine the two four-dimensional domains of attraction of the two solutions in a very effective way. The results are compared with the ones obtained by direct numerical integration.

1. 서 론

일반적으로 비선형 소멸 동역학계(nonlinear dissipative dynamical systems)에서는 점근적으로 안정한 정상상태응답이 둘 이상 존재할 수 있는데 이 경우에 정상상태응답 즉 어떤 초기상태에서 시간이 충분히 지난 후의 거동은 전적으로 초기조건에 달려 있다. 예를 들면 어떤 계가 안정한 정상상태 응답으로서 바람직한 응답과 바람직하지 않는 응답을 가진다고 가정해 보자. 이때 각각의 응답으로 흡인되는 초기조건들의 집합인 흡인영역을 알고 있다면 계를 바람직한 정상상태로 흡인되게 하기 위해서는

계의 초기조건이 벗어나서는 안되는 영역이 어느 영역인가를 알 수 있게 된다. 따라서 비선형계의 안전한 설계를 위해서는 흡인영역을 구하는 것이 매우 중요하다.

그러나 다자유도계에 있어서 흡인영역에 대한 연구는 많이 이루어지지 못하였다. N 자유도계의 경우 상태공간은 $2N$ 차원이 되므로 흡인영역을 구하는 것은 다음의 두 측면에서 매우 어렵다. 첫째, 의존할 만한 해석적인 방법이 없으므로 컴퓨터를 이용하여 수치적으로 흡인영역을 구하게 되는데, 같은 방법을 사용할 경우에 2 차원문제에 걸리는 계산시간의 N 승의 시간이 걸린다는 점이다. 둘째, $2N$ 차원공간내의 여러 점집합으로 표현된 흡인영역을 어떻게 효과적으로 인식하느냐하는 점이다. 첫째문제를 부분적으로 해결하기 위하여

*정회원, 영남대학교 정밀기계공학과

**영남대학교 공업기술연구소

Hsu^(1,3)는 cell mapping 방법을 고안하였고, 이 방법이 발전되어^(1-8,14) 오던 중 Tongue과 Gu⁽¹⁰⁾에 의해 interpolated cell mapping 방법이 제안되어 1자유도계에 적용되었다. Lee⁽¹²⁾은 이 interpolated cell mapping 방법을 고차원 문제에 적용될 수 있도록 일반화시켜서 보간사상법(interpolated mapping method)이라고 이름짓고 탄성진자계에 적용하였다. 두번째 문제를 해결하기 위해서 Lee⁽¹²⁾는 주평면의 개념을 이용하여 계의 매개변수가 변화함에 따라 움직이는 주평면 내의 흡인영역의 변화과정을 조사하였다.

Nayfeh등⁽¹³⁾과 이원경과 소강영⁽¹⁵⁾은 조화가진하의 핀과 꺾쇠로 고정된 보(hinged-clamped beam)의 강제 진동 해석을 통하여 접근적으로 안정한 정상상태 응답이 둘 이상 존재할 수 있음을 알게 되었다. 본 연구에서는 이 경우에 접근적으로 안정한 두 정상상태 응답을 구하고 이들 안정한 해로 각각 흡인되는 초기조건들의 집합인 흡인영역을 보간사상법(interpolated mapping method)과 직접 수치적분에 의해 구한 후 서로 비교하였다.

2. 보간사상법(Interpolated Mapping Method)

먼저 보에 대한 두 정상상태 해의 흡인영역을 결정하기 위해 사용된 보간사상법을 간단히 서술하고자 한다. 이 방법은 Tongue과 Gu⁽¹⁰⁾에 의해 강제 Duffing oscillator의 흡인 영역을 찾기 위해 제안되었다. 여기서 Tongue과 Gu는 계의 선형방정식을 풀어 보간상(interpolated image)을 얻었다.

그러나 이원경⁽¹²⁾은 선형방정식을 푸는 대신 2차 이상의 고차계에도 적용될 수 있는 보간사상법을 사용하여 흡인영역을 구하였으므로 이 방법에 대해 간단히 소개하고자 한다.

다음 식에 의해서 지배되는 point mapping계를 고려하자.

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{G}(\mathbf{x}(n)), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^4 \quad (1)$$

여기서 $\mathbf{G} : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$ 이고, n 은 정수이다.

보간사상법의 기본개념은 식(1) 대신에 보간절차를 사용함으로써 상(image) $\mathbf{x}(n+1)$ 을 찾는 것이다. 이를 단계적으로 살펴보면 다음과 같다.

제 1 단계는 관심있는 상태공간을 분할하는 것이다. 계가 \mathbf{R}^4 자체보다는 \mathbf{R}^4 의 부분집합에서 정의된다고 가정하자. 정의된 부분집합 D_x 는 다음과

같이 표현될 수 있다.

$$D_x = [x_{1(\min)}, x_{1(\max)}] \times [x_{2(\min)}, x_{2(\max)}] \\ \times [x_{3(\min)}, x_{3(\max)}] \times [x_{4(\min)}, x_{4(\max)}]$$

부분집합 D_x 는 모든 흡인자(attractor)를 포함한다고 가정한다. 이제 부분집합 D_x 를 x_1, x_2, x_3, x_4 축에 평행하게 분할한다. 여기서 i_j 는 x_j 축의 구간수이다. 모든 입방체의 크기는 $h_1 \times h_2 \times h_3 \times h_4$ 로서 일정하다. 여기서 $h_j(x_{j(\max)} - x_{j(\min)})/i_j, j=1, 2, 3, 4$ 이다. D_x 는 $\prod_{j=1}^4 (j+1)$ 개의 격자점(grid points)을 포함한다. 제 2 단계는 식(1)을 사용해서 모든 격자점(grid points)의 상(image)을 찾는 것이다.

제 3 단계는 이미 정해진 D_x 내에 한 점을 택해서 그 점이 충분히 시간이 지난후의 거동을 보간절차의 반복사용에 의하여 궤적(trajjectory)을 찾는 것이다. $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ 를 \mathbf{R}^4 의 기저(basis)라 할 때 한 점 $\mathbf{x}_0 = \sum_{m=1}^4 x_{0m} e_m$ 이 모서리 점 $\mathbf{x}_{ijk1}, i, j, k, l=1, 2$ 을 가지는 한 입방체의 내부에 있다고 가정하자.

$$\mathbf{x}_{2jk1} - \mathbf{x}_{1jk1} = h_1 e_1,$$

$$\mathbf{x}_{i2k1} - \mathbf{x}_{i1k1} = h_2 e_2,$$

$$\mathbf{x}_{ij21} - \mathbf{x}_{ij11} = h_3 e_3,$$

$$\mathbf{x}_{ijk2} - \mathbf{x}_{ijk1} = h_4 e_4,$$

여기서 $i, j, k, l=1, 2$ 이다.

\mathbf{x}_{ijk1m} 는 \mathbf{x}_{ijk1} 의 x_m 방향의 성분이므로 $\mathbf{x}_{ijk1} = \sum_{m=1}^4 x_{ijk1m} e_m$ 이다. 점 \mathbf{x}_0 는 다음과 같은 식으로 표현할 수 있다.

$$\mathbf{x}_0 = \sum_{i,j,k,l=1}^2 t_{1i} t_{2j} t_{3k} t_{4l} \mathbf{x}_{ijk1}. \quad (3)$$

여기서 $t_{m1}=1-b_m, t_{m2}=b_m, b_{nm}=(x_{0m}-x_{1111m})/h_m, m=1, 2, 3, 4$ 이다. 점 \mathbf{x}_0 의 근사상(approximate image) \mathbf{x}'_0 은 다음과 같은 선형보간에 의해서 얻어질 수 있다.

$$\mathbf{x}'_0 = \sum_{i,j,k,l=1}^2 t_{1i} t_{2j} t_{3k} t_{4l} \mathbf{x}'_{ijk1} \quad (4)$$

여기서 \mathbf{x}'_{ijk1} 는 \mathbf{x}_{ijk1} 의 실제상(true image) 즉, $\mathbf{x}'_{ijk1} \equiv \mathbf{G}(\mathbf{x}_{ijk1})$ 이다. 이해를 돕기위하여 2차원 상태공간의 경우를 Fig. 1과 다음의 식으로 나타내었다.

$$y_j = (1-b_1) x_{1j} + b_1 x_{2j} = \sum_{i=1}^2 t_{1i} x_{ij},$$

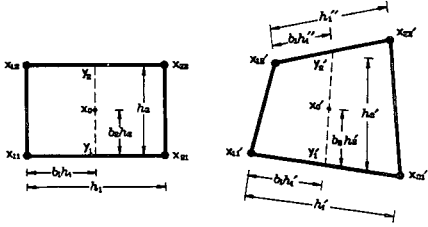


Fig. 1 The interpolated mapping for the case of a two-dimensional state space

$$x_0 = (1 - b_2) y_1 + b_2 y_2 = \sum_{j=1}^2 t_{2j} y_j = \sum_{i,j=1}^2 t_{1i} t_{2j} x_{ij}$$

$$y'_j = (1 - b_1) x'_{1j} + b_1 x'_{2j} = \sum_{i=1}^2 t_{1i} x'_{ij}$$

$$x'_0 = (1 - b_2) y'_1 + b_2 y'_2 = \sum_{j=1}^2 t_{2j} y'_j = \sum_{i,j=1}^2 t_{1i} t_{2j} x'_{ij}$$

보간상(interpolated image) x'_0 와 실제상(true image) $G(x_0)$ 사이의 오차 e_t 는 다음 식으로 표현될 수 있다.

$$e_t = x'_0 - G(x_0) \tag{5}$$

$$= \sum_{i,j,k,l=1}^2 t_{1i} t_{2j} t_{3k} t_{4l} G(x_{ijk1}) - G(x_0)$$

x_0 에 대해 x'_{ijk1} 을 Taylor 급수로 전개하면 다음과 같다.

$$x'_{ijk1} = G(x_{ijk1})$$

$$= G(x_0) + \frac{\partial G(x)}{\partial x} \Big|_{x=x_0} (x_{ijk1} - x_0)$$

$$+ O(|x_{ijk1} - x_0|^2) \tag{6}$$

관계식 $\sum_{i,j,k,l=1}^2 t_{1i} t_{2j} t_{3k} t_{4l} = 1$ 을 사용하여 식(6)을 식(5)에 대입하면 다음을 얻는다.

$$e_t = \frac{\partial G(x)}{\partial x} \Big|_{x=x_0} \sum_{i,j,k,l=1}^2 t_{1i} t_{2j} t_{3k} t_{4l} (x_{ijk1} - x_0)$$

$$+ O(h^2) \tag{7}$$

여기서 $h^2 = \sum_{m=1}^4 h_m^2$ 이다. 식(3), (7)에 의해서 오차 e_t 는 다음과 같이 된다.

$$e_t = O(h^2) \tag{8}$$

이 오차는 Hsu의 simple cell mapping법^(1,3)에서의 오차 $O(h)$ 와 대조되어 h 를 충분히 적게 잡으면 보간사상법이 simple cell mapping보다 더 나은 근사를 주게 됨을 의미한다.

다음 단계는 x'_0 를 포함하는 입방체를 찾는 것이다. 그리고 식(4)를 사용해서 x'_0 의 상(image)를

구한다. 이 방법으로 우리는 반복된 보간절차에 의해 초기상태인 x_0 에서 출발한 해의 궤적(trajec-tory)을 얻을 수 있다.

결론적으로 보간사상법에서는 관심있는 상태공간을 분할하여 모든 격자점(grid points)의 상(image)을 한 번 구하기만 하면 상태공간의 분할에 의한 근사범위내에서, 계의 모든 동역학적 정보를 확보하게 된다. 이에는 보간절차를 사용하여 이 격자점의 상으로부터 이 정보를 이끌어내기만 하면 된다.

3. 보의 운동방정식과 주기 해

양단이 고정된 보가 변형할 때에는 중간 평면의 신장을 수반하게 된다. 운동의 진폭이 증가함에 따라 이 신장이 보의 동적 응답에 미치는 영향은 심각하게 된다. 이러한 현상은 응력과 변형도와의 관계가 선형적이라 하더라도 변형도와 변위와의 관계식은 비선형이 되며 결국은 보의 비선형 운동방정식을 낳게 된다. 핀과 격쇠로 고정된(hinged-clamped) 보가 Fig. 2에 나타나 있다. 중간 평면의 신장을 고려하면 보의 편미분 운동방정식과 경계조건은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$EI \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} = -2c \frac{\partial \bar{w}}{\partial t}$$

$$+ \bar{H} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \bar{p}(x, \bar{t}) \tag{9a}$$

$$\bar{w}(0, \bar{t}) = 0, \quad \frac{\partial^2 \bar{w}(0, \bar{t})}{\partial x^2} = 0 \tag{9b,c}$$

$$\bar{w}(\bar{l}, \bar{t}) = 0, \quad \frac{\partial \bar{w}(\bar{l}, \bar{t})}{\partial x} = 0 \tag{9d, e}$$

여기서

b =보의 너비; h =보의 두께; $I = bh^3/12$ =면적 관성모멘트; E =탄성계수; A =보의 단면적; m =단위길이당 질량;

$\bar{H} = \frac{EA}{2l} \int_0^1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 d\bar{x}$ =보의 단면에 작용하는

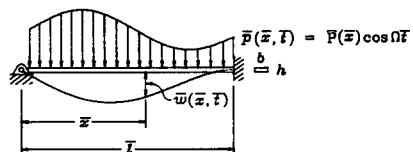


Fig. 2 A schematic diagram of a hinged-clamped beam

인장력 ;

\bar{c} = 감쇠계수 ; \bar{p} = 외력 ; \bar{w} = 보의 변형 ; \bar{x} = 종축 ;

\bar{t} = 시간 ; \bar{l} = 보의 길이이다.

무차원 변수를 사용하면 위의 식을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \varepsilon \left(-2c - \frac{\partial w}{\partial t} + H \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + p \right) \quad (10a)$$

$$w(0, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 w(0, t)}{\partial x^2} = 0, \quad (10b, c)$$

$$w(l, t) = 0, \quad \frac{\partial w(l, t)}{\partial x} = 0 \quad (10d, e)$$

여기서

$$H = \nu \int_0^1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx$$

$$\bar{x} = xL, \quad L = \bar{l}/2, \quad l = \bar{l}/L = 2, \quad \bar{w} = r^2 w/L,$$

$$r = (I/A)^{1/2} = \text{회전반경},$$

$$\varepsilon = r^2/L^2 = (h/L)^{1/2}/12,$$

$$\bar{p} = (r^6 EA/L^7) p, \quad \bar{c} = 2cr^3 A (mE)^{1/2}/L^4,$$

$$\bar{t} = (mL^4/Er^2)^{1/2} t, \quad \bar{H} = EAH (r/L)^4.$$

갤러킨 법을 이용하여 식(16)으로 주어지는 문제를 풀기 위해 변형을 다음과 같이 표현할 수 있다고 가정하자.

$$w(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} u_m(t) \varphi_m(x) \quad (11)$$

여기서 u_m 은 일반화 좌표이며 φ_m 은 다음의 고유치문제의 고유함수이다.

$$\frac{d^4 \varphi_m}{dx^4} - \omega_m^2 \varphi_m = 0 \quad (12a)$$

$$\varphi_m(0) = 0, \quad \frac{d^2 \varphi_m(0)}{dx^2} = 0, \quad (12b, c)$$

$$\varphi_m(l) = 0, \quad \frac{d\varphi_m(l)}{dx} = 0, \quad (12d, e)$$

여기서 ω_m 은 고유진동수이며, 이 고유치 문제의 고유함수는 다음과 같다.

$$\varphi_n = E_n [\sin(\alpha_n x) - R_n \sinh(\alpha_n x)]$$

$$E_n = \left[\frac{1}{2} l (1 - R_n^2) + (R_n^2 \sinh 2\alpha_n l - \sin 2\alpha_n l) / 4\alpha_n \right]^{-1/2}$$

$$R_n = \sin \alpha_n l / \sinh \alpha_n l, \quad \alpha_n = (\omega_n)^{1/2} / l$$

그리고 α_n 은 다음 방정식 $\tan \alpha_n l = \tanh \alpha_n l$ 의 근이 된다. 첫째 및 둘째 모드의 고유함수는 Fig. 3

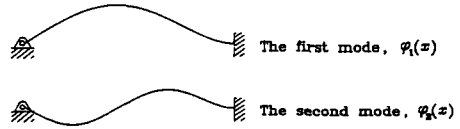


Fig. 3 Eigenfunctions of the beam vibration

에 나타내었다. $l=2$ 이므로 처음 두번째 까지의 근과 고유진동수 $\omega_n = (\alpha_n l)^2$ 를 구하면 다음과 같다.

$$\alpha_1 l = 3.927, \quad \omega_1 = 15.421$$

$$\alpha_2 l = 7.069, \quad \omega_2 = 49.970$$

이 고유진동수들을 관찰하면 $\omega_2 \approx 3\omega_1$ 임을 알 수 있으며, 이것은 내부공진의 조건이 된다.

식 (11)을 식(10)에 대입하고 양변에 φ_n 을 곱하고 x 에 대해서 적분한 후 고유함수의 직교성을 이용하고 정리하면 다음과 같은 연립 비선형 비자율 상미분 방정식을 얻게 된다.

$$\frac{d^2 u_n}{dt^2} + \omega_n^2 u_n = \varepsilon \left[-2c_n \frac{du_n}{dt} + F_n \cos \Omega t + \sum_{m,p,q=1}^{\infty} \alpha_{nmpq} u_m u_p u_q \right], \quad n=1, 2 \quad (13)$$

여기서

$$c_n = \int_0^l c \varphi_n^2 dx$$

$$\alpha_{nmpq} = \nu \int_0^l \varphi_n \frac{d^2 \varphi_q}{dx^2} dx \int_0^l \frac{d\varphi_m}{dx} \frac{d\varphi_p}{dx} dx,$$

$$F_n = \int_0^l P(x) \varphi_n \nu dx$$

$$P(x, t) = P(x) \cos \Omega t$$

여기서 $u_n(t)$ = 일반화 좌표 ; t = 시간 ; ω_n = 고유진동수 ; ε = 방정식의 무차원화에 따른 작은 매개변수 ; c_n = 감쇠계수 ; F_n = 가진 진폭 (excitation amplitude) ; Ω = 가진진동수 (excitation frequency)를 뜻한다. 이 계가 $\Omega \approx \omega_1$ 일 때 첫번째 두 모드가 응답을 지배한다는 것은 이미 알려져 있으므로^(13, 15) 식(13)을 다음과 같은 2자유도계의 운동방정식으로 바꾸었다.

$$\frac{d^2 u_n}{dt^2} + \omega_n^2 u_n = \varepsilon \left[-2c_n \frac{du_n}{dt} + F_n \cos \Omega t + \sum_{m,p,q=1}^2 \alpha_{nmpq} u_m u_p u_q \right], \quad n=1, 2 \quad (14)$$

이 식에서 감쇠항은 각 모드에 독립적으로 기여한다고(modal damping)가정하였고 외력은 조화가

진으로 가정하였다. 고유함수 φ_n 을 사용하여 α_{nmpq} 를 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \alpha_{1111} &= -2.071, & \alpha_{1112} &= -0.770 \\ \alpha_{1121} &= -0.770, & \alpha_{1122} &= -7.716 \\ \alpha_{1211} &= -0.770, & \alpha_{1212} &= -0.286 \\ \alpha_{1221} &= -0.286, & \alpha_{1222} &= -2.870 \\ \alpha_{2111} &= -0.770, & \alpha_{2112} &= -0.286 \\ \alpha_{2121} &= -0.286, & \alpha_{2122} &= -2.870 \\ \alpha_{2211} &= -7.716, & \alpha_{2212} &= -2.870 \\ \alpha_{2221} &= -2.870, & \alpha_{2222} &= -28.751 \end{aligned}$$

이 계의 가진진동수가 첫번째 모드의 고유진동수 근방에 놓여 있을 때, 점근적으로 안정한 정상상태 주기해가 둘 이상 존재할 수 있다는 것이 알려져 있다^(13,15), 이탈변수 $\varepsilon\sigma_2$ 를 이용하면 다음과 같이 표시된다.

$$\Omega = \omega_1(1 + \varepsilon\sigma_2)$$

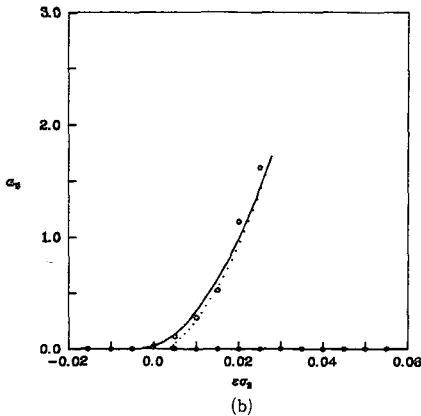
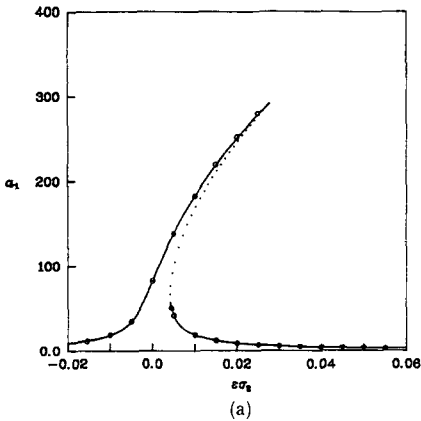


Fig. 4 Variation of amplitude a_1 of the first mode with the excitation frequency

이 경우 응답곡선이 Fig. 4에 나타나있다. 이 결과는 경화스프링(hard spring)을 가진 Duffing진동계의 응답곡선과 흡사하다. 수치적분법에 의해서 얻은 결과는 해석적방법에 의해 얻은 결과와 일치한다. 실선과 점선은 각각 안정한 해와 불안정한 해를 나타낸다. 이 후 진폭이 큰 해는 upper branch 해, 진폭이 작은 해는 lower branch 해라고 부르기로 한다.

편의를 위하여 2계 상미분 방정식(14)를 다음과 같은 1계 상미분방정식으로 바꿔 쓰기로 하자.

$$x_1 = u_1, \quad x_2 = u_1, \quad x_3 = u_2, \quad x_4 = u_2 \quad (15)$$

로 두면

$$\dot{x} = F(x, t), \quad x \in R^4, \quad (16)$$

이다. 여기서 $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ 및 $F(x, t) = (F_1, F_2, F_3, F_4)^T$ 이고 각 성분은

$$\begin{aligned} F_1 &= x_2 \\ F_2 &= -\omega_2^2 x_1 + \varepsilon[-2c_1 x_2 + \alpha_{1111} x_1^3 \\ &\quad + (\alpha_{1112} + \alpha_{1121} + \alpha_{1211}) x_1^2 x_3 \\ &\quad + (\alpha_{1122} + \alpha_{1212} + \alpha_{1221}) x_1 x_3^2 \\ &\quad + \alpha_{1222} x_3^3 + f_1 \cos \Omega t] \\ F_3 &= x_4 \\ F_4 &= -\omega_2^2 x_3 + \varepsilon[-2c_2 x_4 + \alpha_{2111} x_1^3 \\ &\quad + (\alpha_{2112} + \alpha_{2121} + \alpha_{2211}) x_1^2 x_3 \\ &\quad + (\alpha_{2122} + \alpha_{2212} + \alpha_{2221}) x_1 x_3^2 \\ &\quad + \alpha_{2222} x_3^3 + f_2 \cos \Omega t] \end{aligned} \quad (17)$$

이다.

계의 대국적 거동을 조사하기 위하여 비자율 상미분방정식이 식(16)으로 주어졌기 때문에 계(16)으로 부터 point mapping 계(1)을 구성하는 것이 편리하다.

계(16)은 주기가 $T = 2\pi/\Omega$ 인 주기계이기 때문에 시간 $t = mT$ (m , 정수)에서 Poincaré map을 구성할 수 있다. Poincaré 단면에서는 조화해가 4차원 상상공간에서 한 점으로 나타난다. 본 연구에서는 수치적분을 위하여 4차 Runge-Kutta법을 사용하였으며, 적분 시간 간격은 $\Delta t = T/30$ 으로 잡았다.

본 연구에서는 매개변수들의 값이 다음과 같은 경우를 고려하기로 하였다.

$$\begin{aligned} \{\varepsilon, c_1, c_2, \omega_1, \omega_2, f_1, f_2, \sigma_2\} \\ = \{0.0001, 100, 100, 15.421, 49.970, \\ 9000000, 0.01, 140\} \end{aligned}$$

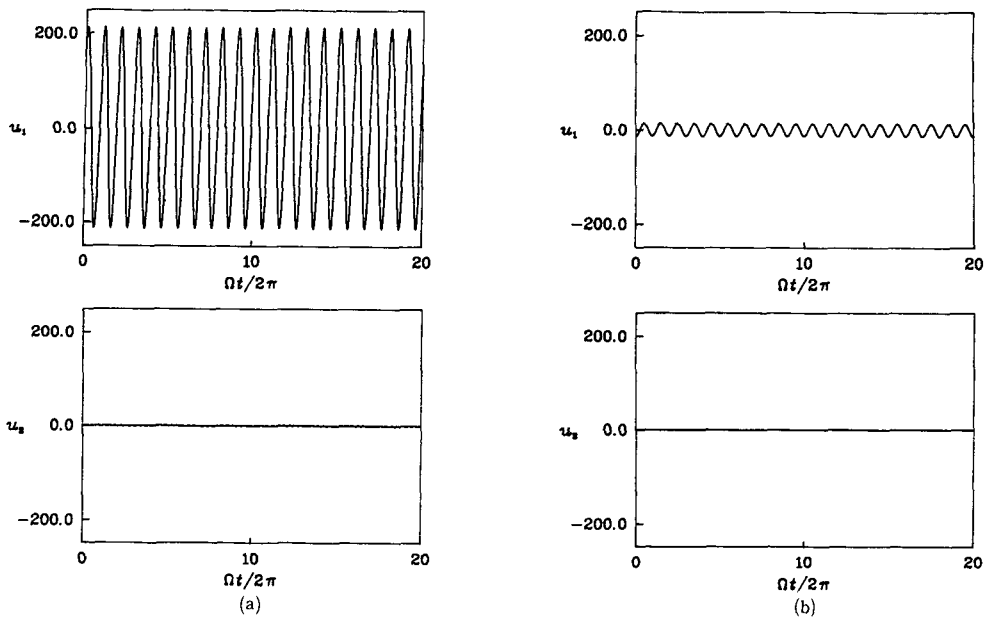


Fig. 5 (a) Time histories of the upper branch solution (b) Time histories of the lower branch solution

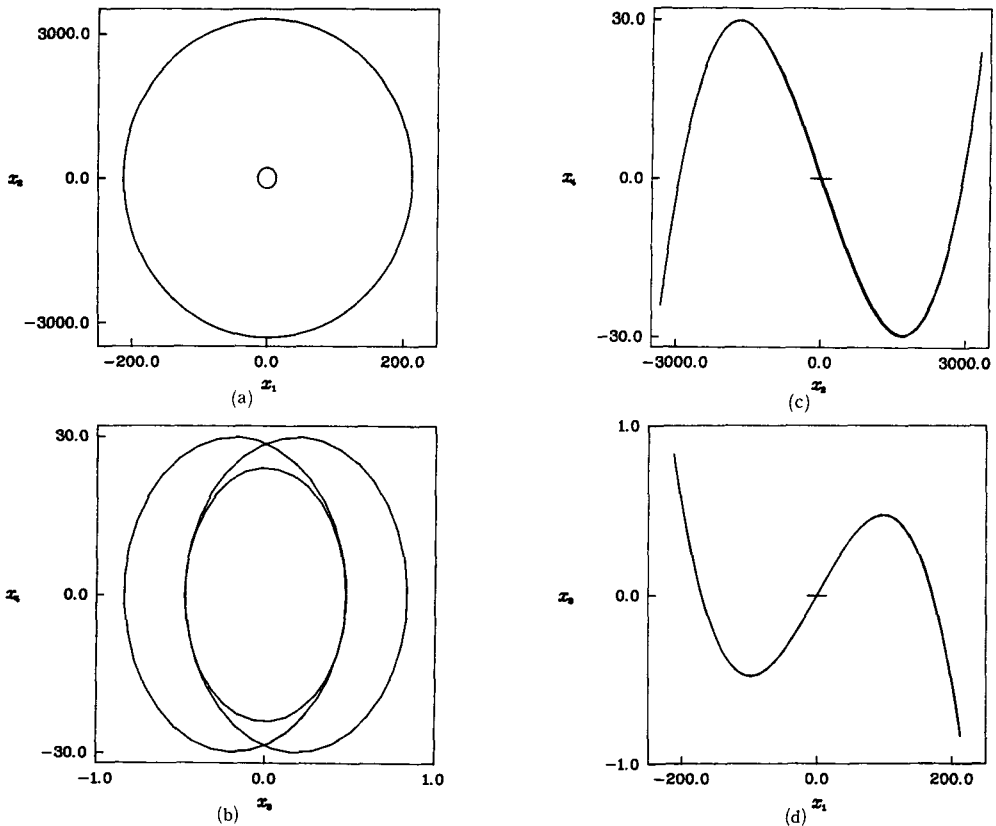


Fig. 6 Projections of two stable steady state solution. \cdots , the lower branch solution; — , the upper branch solution (a) On the x_1 - x_2 plane (b) On the x_3 - x_4 plane (c) On the x_2 - x_4 plane (d) On the x_1 - x_3 plane

Nayfeh등⁽¹³⁾에 의하면 이 경우에 안정한 두 주기해가 존재함을 알 수 있다. 이 두 주기해의 time history를 그려보면 Fig. 5와 같고 이 해들의 phase trajectory를 여러 좌표평면에 투영해보면 Fig. 6과 같다. 주기적인 정상상태해를 Poincaré 단면에서 나타내면 다음과 같다.

upper branch 해 ;

$$\{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{141.5894, 2552.617, 0.3635089, -18.59465\} \quad (19)$$

lower branch 해 ;

$$\{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{-13.95872, 13.88818, 0.00024703, -0.0015151\} \quad (20)$$

이것은 4차원 상태공간에서는 각각의 두 점으로 나타나지만 4차원 상태공간을 도식적으로 표현하기

가 어려우므로 이를 여러 좌표평면에 투영시키면 Fig. 7와 같이 나타난다.

4. 흡인영역

이 절에서는 4차원 공간에 있는 두 주기해 (upper and lower branch)의 흡인영역을 결정하기 위해 보간사상법 (interpolated mapping method)을 사용한다. 그러면 상태공간 내의 관심영역을

$$\begin{aligned} D_x &= [x_{1(min)}, x_{1(max)}] \times [x_{2(min)}, x_{2(max)}] \\ &\quad \times [x_{3(min)}, x_{3(max)}] \times [x_{4(min)}, x_{4(max)}] \\ &= [-247.28, 374.91] \times [-3794.2, 6360.7] \\ &\quad \times [-2.5426, 2.9063] \times [-148.75, 130.15] \end{aligned}$$

로 정해두고 이것을 19개의 입방체로 분할한다. 여기서 19는 각 x_m 방향의 구간수이다. 그러면 D_x 내에는 $20^4 (=160000)$ 개의 격자점 (grid points)이

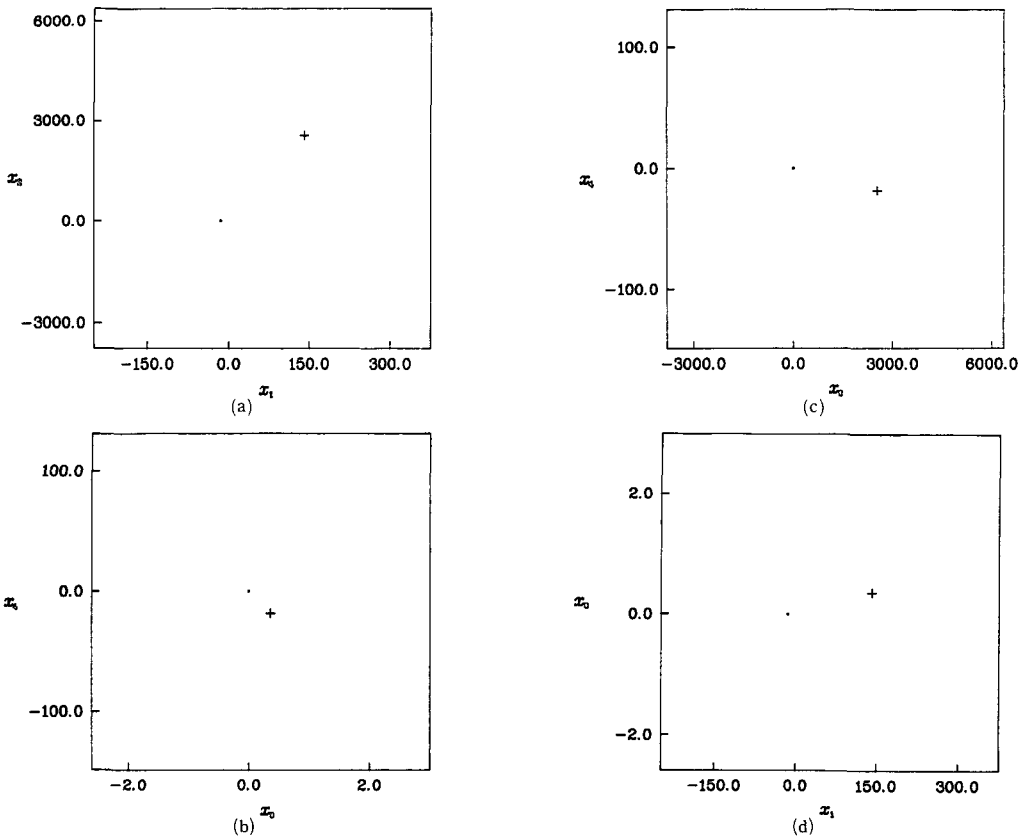


Fig. 7 Projections of Poincaré maps of two stable steady-state solutions, the upper branch solution; +, the lower branch solution; (a) On the x_1-x_2 plane (b) On the x_3-x_4 plane (c) On the x_2-x_4 plane (d) On the x_1-x_3 plane

존재한다. 이와 같은 입방체의 수(19⁴)와 D_x 는 두 주기해 사이의 거리, 컴퓨터의 능력, 원하는 정보의 량 등을 고려하고 시행착오의 과정을 거쳐서 결정된 것이다. “이 D_x 가 계의 대국적 거동을 이해하기에 충분히 큰 영역인가?”라는 질문을 제기할 수도 있을 것이다. 엄밀히 말하자면 “이 질문에 대한 답은 아무도 모른다”라고 해야 할 것이다. 왜냐하면 다른 영역에 제 3, 제 4의 안정한 해가 존재하는지를 확인해보지 않았기 때문이다. 비록 해석적인 작업^(13,15)이 이 질문에 대한 제한적인 답을 제시할 수는 있지만 여전히 “그 외에 또 없다고 말할 수 있느냐?”에 대해선 “모르겠다”로 대답할 수밖에 없다는 것이다. 바로 이 점이 비선형계의 해석 특히 대국적 해석의 어려운 점인 것이다.

식(1)의 point mapping계 대신 Poincaré map

으로 주기 T 동안 식(16)을 수치적분하면 모든 격자점의 상을 구할 수 있다. D_x 내의 어떤 초기상태로부터 어떤 흡인자로 궤적(trajectory)이 이동할 때까지 보간절차의 반복적용에 의해 시간이 충분히 지난 후의 계의 거동을 조사할 수 있다. 여기서 $\bar{D}_x = \{x | x \in D_x \text{ 그리고 } x \in R^4\}$ 는 하나의 흡인자로 고려 되었다.

D_x 는 upper branch 해와 lower branch 해를 포함하고 있기 때문에 각 궤적은 결국 upper branch 해나 lower branch 해에 이르게 될 것이다. 그러나 보간상(interpolationg the image)에 의해 나타난 오차로 인하여 D_x 내에서 보간사상법에 따르면 시간이 충분히 지난 후에 궤적이 주기해로 반드시 수렴하는 것이 아니라 그 해의 주변에서 배회하게 된다. 그러므로 한 궤적이 주기해의 근방이 있기만

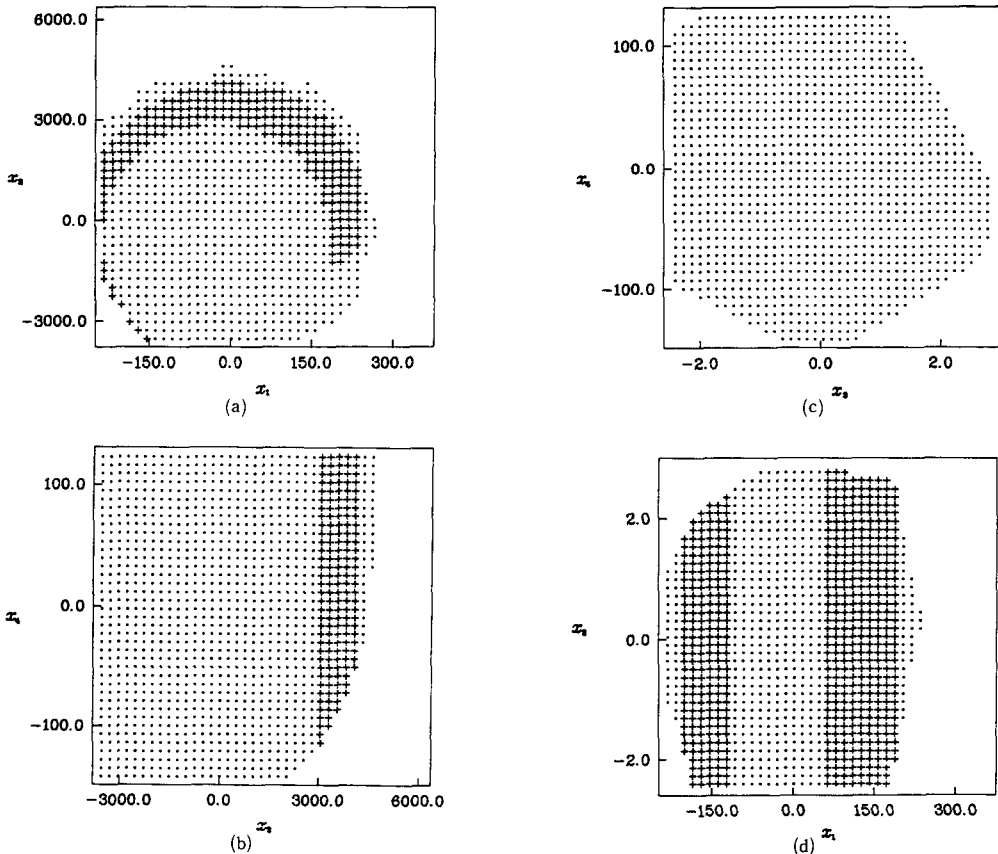


Fig. 8 The domains of attraction obtained by the interpolated mapping method for $\{\varepsilon, c_1, c_2, \omega_1, \omega_2, f_1, f_2, \sigma_2\} = \{0.0001, 100, 100, 15.421, 49.970, 9000000, 0.01, 140\}$, the upper branch solution: +, the lower branch solution: .
 (a) The $x_1 - x_2$ plane at $z_3=19, z_4=19$ (b) The $x_2 - x_4$ plane at $z_1=15, z_3=21$
 (c) The $x_3 - x_4$ plane at $z_1=25, z_2=15$ (d) The $x_1 - x_3$ plane at $z_2=25, z_4=21$

하면 그 궤적은 그 해로 흡인될 것이라고 가정한다. 본 연구에서는 D_x 내의 39개의 초기상태로부터 출발한 계의 거동을 조사할 수 있도록 프로그램을 작성하였다. 그리고 중심이 주기해에 위치하고 크기가 $h_1 \times h_2 \times h_3 \times h_4$ 인 입방체를 그 근사범위로 간주한다. 여기서 $h_m = (x_{m(max)} - x_{m(min)})/39$ 이다. 엄밀한 의미에서 이 근사범위를 $5^4 (= 625)$ 개의 입방체로 분할하여 각 점들을 식 (16)에 의해 수치적분한 후 모두 근사범위내의 주기해로 흡인된다는 것을 확인함으로써 그 타당성을 입증하여야 한다.

정해진 관심영역을 보간사상법(interpolated mapping method)을 사용하여 4차원 상태공간 내의 흡인영역을 구하였다. 4차원 공간내의 흡인영역을 도식적으로 표현하기가 어려우므로 본 연구에서는 다음과 같이 선정된 2차원 단면에 대해서만 흡인영역

을 Fig. 8에서 보여주기로 한다.

- (a) $x_1 - x_2$ plane at $z_3=19, z_4=19$
- (b) $x_2 - x_4$ plane at $z_1=15, z_3=21$
- (c) $x_3 - x_4$ plane at $z_1=25, z_2=15$
- (d) $x_1 - x_3$ plane at $z_2=25, z_4=21$

여기서 $z_m = n$ 은 $x_m = x_{m(min)} + (n-1)h_m/2$ 를 의미한다. 예를 들면 $z_m=1$ 과 39는 $x_{m(min)}$ 과 $x_{m(max)}$ 를 각각 의미한다. 이들 그림에서 “+”와 “.”은 각각 upper branch 해와 lower branch 해로 흡인되는 영역을 나타내며 공백은 거동 도중 관심영역 D_x 밖으로 나가버린 점을 의미한다. 물론 각 점에서 출발한 궤적이 정상상태응답에 도달하는데 걸리는 시간은 서로 다르다. 보간사상법에 의해 이 시간을 알 수는 있지만 이 그림에는 이 시간에 대한 정보

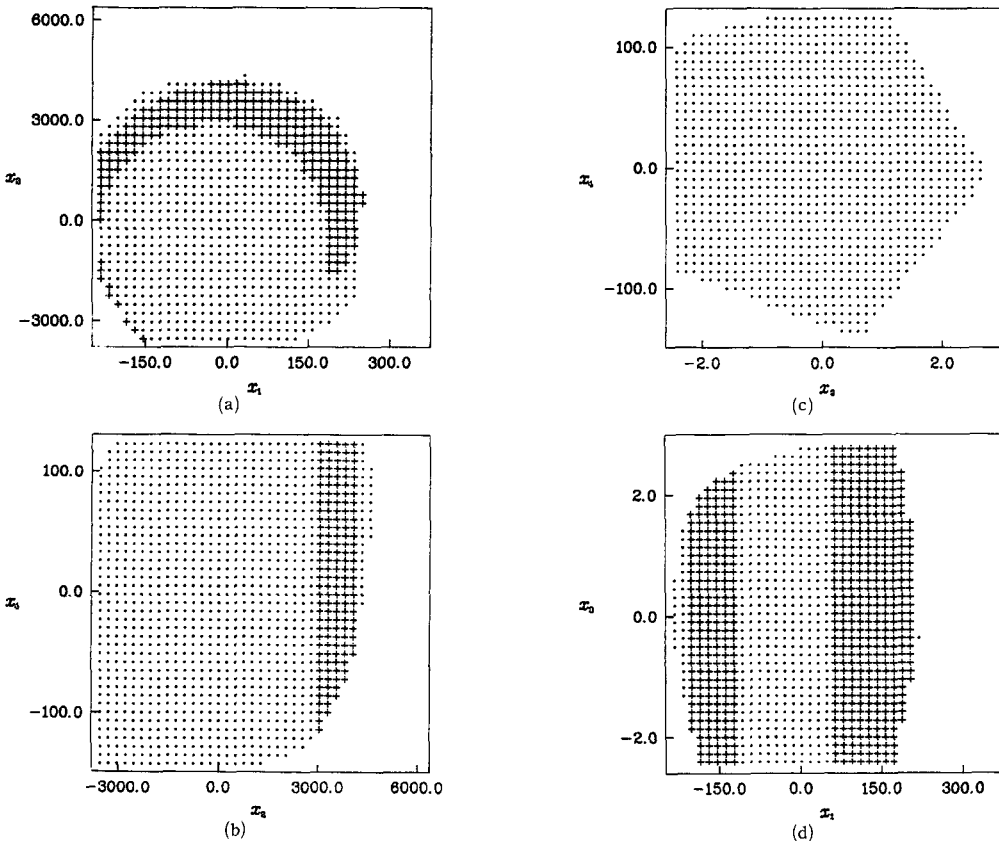


Fig. 9 The domains of attraction obtained by the direct numerical integration for $\{\epsilon, c_1, c_2, \omega_1, \omega_2, f_1, f_2, \sigma_2\} = \{0.0001, 100, 100, 15.421, 49.970, 9000000, 0.01, 140\}$, the upper branch solution: +, the lower branch solution: .

- (a) The $x_1 - x_2$ plane at $z_3=19, z_4=19$
- (b) The $x_2 - x_4$ plane at $z_1=15, z_3=21$
- (c) The $x_3 - x_4$ plane at $z_1=25, z_2=15$
- (d) The $x_1 - x_3$ plane at $z_2=25, z_4=21$

가 나타나 있지 않다. 이 시간은 simple cell mapping⁽³⁾에서 step time에 해당하는 것으로서 동일한 응답에 흡인되더라도 step time에 따라 다른 기호로 표현할 수는 있겠지만 결과는 무척 복잡하리라고 생각된다.

보간사상법에 의해서 얻어진 흡인영역의 정확도를 검사하기위해 직접 수치적분에 의해 몇 개의 단면에 대한 흡인영역을 구하여 Fig. 9에 나타내었다. 관찰에 의하면 두 방법에 의한 결과는 잘 일치함을 알 수 있다. 물론 "수치적분결과는 완전해라고 말할 수 있느냐?"라고 의문을 제기할 수는 있을 것이다. 근본적으로 보간사상법은 선형계의 경우에는 완전해를 주지만 비선형계에서는 수치적분 결과에 바탕을 둔 근사해를 주게된다. 반면에 수치적분결과는 시간 step을 줄임으로써 얼마든지 오차를 줄일 수 있다는 측면에서 완전해라고 볼 수도 있다.

이 계산은 IBM PC 386에 의해 실행되었으며 D_x 내의 모든 격자점(grid points)의 상(image)을 찾는 데 소요된 계산시간은 0.2599×20^4 초(≈ 11.55 시간)이다. 2차원 단면에 대한 보간사상법의 결과를 얻는데 사용된 평균 계산 시간은 5.6 분이다. 반면 직접 수치 적분결과를 얻기위해 사용된 시간은 약 16.95시간이다. Table 1은 보간사상법과 직접 수치적분법에 대한 계산시간을 나타내었다. 정확도를 계산해본 결과 모든 격자점(grid points)의 상(image)을 한번 계산하기만 하면 보간사상법은 매우 적은 계산시간만으로도 정확한 대국적 흡인영역을 구할 수 있음을 알 수 있다.

5. 결 론

2자유도계로 유도될 수 있는, 내부공진을 가진 보의 대국적 거동을 연구 하였다. 이 계는 접근적

으로 안정한 두 개의 정상상태응답(upper and lower branch solutions)을 가질 수 있다. 이 경우에 보간사상법에 의해 각각의 안정한 해로 흡인되는 초기조건들의 집합인 근사 흡인영역을 구하였다. 그리고 이것의 정확도를 조사하기 위해서 직접 수치적분법으로도 흡인영역을 구하였다. 그 결과 보간사상법은 직접수치적분법에 소요되는 시간의 180배나 적은 시간으로도 상당히 정확한 흡인영역을 예측할 수 있었다.

후 기

본 연구는 한국과학재단의 목적기초연구비의 지원(1989-1992)에 의한 것임.

참 고 문 헌

- (1) Hsu, C. S., 1980, "A Theory of Cell-to-Cell Mapping Dynamical Systems," ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 47, pp. 931~939.
- (2) Hsu, C. S., 1981, "A Generalized Theory of Cell-to-Cell Mapping for Nonlinear Dynamical Systems," ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 48, pp. 634~642.
- (3) Hsu, C. S., 1987, Cell-to-Cell Mapping-A Method of Global Analysis for Nonlinear Systems, Springer-Verlag, New York.
- (4) Hsu, C. S. and Chiu, H. M., 1986, "A Cell Mapping Method for Nonlinear Deterministic and Stochastic Systems, Part I: The Method of Analysis," ASME Journal of Applied Mechanics, Vol 53, pp. 695~701.
- (5) Hsu, C. S. and Chiu, H. M., 1987, "Global Analysis of a System with Multiple Responses Including a Strange Attractor," Journal of Sound and Vibration, Vol. 114(2), pp. 203~218.
- (6) Hsu, C. S. and Guttalu, R. S., 1980, "An Unravelling Algorithm for Global Analysis of Dynamical Systems: An Application of Cell-to-Cell Mappings," ASME Journal of Applied Mechanics, Vol 47, pp. 940~948.
- (7) Hsu, C. S., Guttalu, R. S., and Zhu, W. H., 1982, "A Method of Analyzing Generalized Cell Mapping," ASME Journal of Applied Mechanics,

Table 1 Computation time and correctness

	(a)	(b)	(c)	(d)	average
Interpolated Mapping(sec)	253.9	287.7	396.6	394.3	335.8
Exact(sec)	43825	66764	82092	55110	61031
Correctness(%)	97.50	98.95	90.20	96.45	95.83

- Vol. 49, pp. 885~894.
- (8) Polchai, A. and Hsu, C. S., 1985, "Domain of Stability of Synchronous Generators by Cell Mapping Approach," *International Journal of Control*, Vol. 41, pp. 1253~1271.
- (9) Tongue, B. H., 1987, "On Obtaining Global Nonlinear System Characteristics through Interpolated Cell Mapping," *Physica* 28D, pp. 401~408.
- (10) Tongue, B. H. and Gu, K., 1988, "Interpolated Cell Mapping of Dynamical Systems," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 55, pp. 461~466.
- (11) Tondl, A., 1970, Domains of Attraction for Non-linear Systems, Monographs and Memoranda of the National Research Institute for Machine Design, Bechovice, No. 8. No. 3/4, pp. 259~270.
- (12) Lee, W. K., 1988, "A Global Analysis of a Forced Spring-Pendulum System," University of California, Berkeley, Ph. D. Dissertation.
- (13) Nayfeh, A. H., Mook, D. T., and Sridhar, S., 1974, "Nonlinear Analysis of the Forced Response of Structural Elements," *Journal of Acoustical Society of America*, Vol. 55, No. 2, pp. 281~291.
- (14) Lee, W. K., 1992, "Domains of Attraction of System of Nonlinearly Coupled Ship Motions by Simple Cell Mapping," *ASME Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, Vol. 114, No. 1, pp. 22~27.
- (15) 이원경, 소강영, 1991, "내부공진을 가진 보의 비선형 강제진동해석," *대한기계학회논문집* 제 15 권 제 6 호, pp. 1897~1907.