

〈論 文〉

複合材 圓筒셸의 動的 舉動 研究

金天旭* · 金治均**

(1991년 12월 9일 접수)

Dynamic Behavior of Laminated Orthotropic Cylindrical Shells

Chon Wook Kim and Chi Kyoon Kim

Key Words : Natural Frequency (고유 진동수), Orthotropy (직교이방성), Composite Circular Cylindrical Shell (복합재 원통셸), Orthotropic Parameter (직교이방성 변수)

Abstract

The vibration characteristic of thin laminated orthotropic cylindrical shell is investigated based on the Donnell theory. The Rayleigh-Ritz variational procedure is employed. For the variety of shell end conditions, the beam characteristic function is used for the axial mode function. The result of the present analysis is in good agreement with some available analytical results and NASTRAN and BOSOR4 calculations. In the present study, the relation between natural frequencies and orthotropic parameter k is investigated. Introducing the frequency parameter, this study shows that the frequency parameter increases as the orthotropic parameter k approaches to one.

기 호 설 명

a, h, L	: 원통셸 반경, 두께, 길이	p_m	: 보의 고유치
A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}	: 신장강성, 연성강성, 굽힘강성	t	: 시간
a_{ij}	: 진동수 행렬의 요소	u, v, w	: 축, 원주, 반경 방향 변위
b, c, k	: 직교이방성 변수	U_0, V_0, W_0	: 진폭계수
E, T	: 스트레인에너지, 운동에너지	x, θ, z	: 축, 원주, 반경 방향의 좌표
E_x, E_θ	: 탄성계수	α_1, α_2	: 특성함수의 적분값
f_n	: 고유 진동수	β_i	: $\lambda_i a/L$
$G_{x\theta}$: 비틀림 상수	λ	: 보함수의 특성값
k_1, k_2, k_3	: 상수	Δ	: $a^2 \rho \omega^2$
m	: 길이 방향 파동수	$\nu_{x\theta}, \nu_{\theta x}$: 프와송 비
$M_x, N_\theta, N_{x\theta}$: 모멘트	ρ	: 질량
$N_x, N_\theta, N_{x\theta}$: 합응력	ϕ_m	: 보특성 함수
n	: 원주방향 파동수	ω	: 고유 진동수
		Ω	: 진동수 파라미터 $\omega^2 / (E_x / \rho a^2 (1 - \nu_{x\theta} \nu_{\theta x}))$
		$\epsilon_x, \epsilon_\theta, \epsilon_{x\theta}$: 스트레인
		$\kappa_x, \kappa_\theta, \kappa_{x\theta}$: 곡률 변화

*정회원, 연세대학교 기계공학과

**정회원, 연세대학교 기계공학과대학원

1. 序 論

複合材는 단일재료의 약점을 보완하고 負荷에 대응하는 인위적 異方性을 구성함으로써 우수한 構造材의 가능성을 많이 가지고 있다. 특히 高速로봇과 같은 自動化機械에서는 輕量, 高强度, 高剛性의 요구 때문에 複合材로 제작된 로봇팔을 심도있게 검토하고 있다.

로봇팔에 複合材를 사용할 경우 角管⁽¹⁾으로 할 수도 있으나 圓筒의 力學的 特性이 비틀림에서 우수하기 때문에 圓筒튜브로 설계함이 바람직하다. 圓筒튜브는 靜的 및 動的舉動이 圓棒과 달라 원주방향에 웨이브가 발생함으로써 구조요소로서의 특징과 한계를 가지고 있다. 특히 動的인 負荷를 받는 경우 動的變位와 함께 共振을 피하기 위한 固有振動數를 구하는 것이 무엇보다도 중요하다.

圓筒셀의 自由振動의 문제는 일찍부터 많은 연구자의 관심을 끌어 왔다. Arnold와 Warburton⁽²⁾은 자유로이 지지된 圓筒셀의 자유진동을 Rayleigh법을 이용하여 연구하였다. Koval과 Cranch⁽³⁾는 圓筒셀의 고유진동수에 있어 길이와 원주방향의 慣性項이 별로 영향을 미치지 않음을 이론과 실험을 통해 보였고 Weingarten⁽⁴⁾은 운동방정식의 유도에서 이들 面內慣性項을 처음부터 무시하고 Donnell⁽⁵⁾의 운동방정식을 해석하였다. Kraus⁽⁶⁾는 面內慣性項의 무시가 엄밀해에 별로 영향을 미치지 않음을 밝혔으며 또한 원주방향 웨이브의 수가 작은 쪽에서는 變分解가 오히려 엄밀해보다도 실험값에 접근함을 보였다.

Soedel⁽⁷⁾은 직교이방성 圓筒셀의 진동문제를 Love⁽⁸⁾의 이론에 따라 운동방정식을 유도하고 양단이 단순지지인 경우에 대해 진동수 방정식을 제시하였다. Cheng과 He⁽⁹⁾는 많이 사용되고 있는 Donnell방정식이 직교이방성 圓筒셀의 경우에 오차를 줄 수 있음을 보이고 Flügge이론을 기초로 하여 자신의 수정식을 제시하였다. 그러나 많은 연구자들⁽¹⁰⁻¹²⁾은 두께가 얇은 원통셀의 자유진동문제 해석에 Donnell방정식을 사용하여 이의 유용함을 보이고 있다. Sharma와 Darvizeh⁽¹³⁾는 續層에 의한 직교이방성 圓筒셀의 자유진동문제를 Rayleigh-Ritz법으로 해석하였다. 그들은 각종 경계조건을 모두 다룰 수 있도록 길이방향 변위를 보의 진동특성함수를 도입하여 해석하였다. 복합재 圓筒튜브를

構造要素로 사용하기 위하여는 設計者가 이용할 수 있도록 충분한 역학적 특성이 밝혀져야 한다. 이영신등⁽¹⁴⁻¹⁶⁾은 원통셀의 진동방정식을 통일된 형태의 셀理論으로 유도하고 modal displacement를 Fourier급수로 표현하는 Chung⁽¹⁷⁾의 해석법을 이용하여 임의의 경계조건을 갖는 직교이방성 원통셀에 대하여 기하학적 매개 변수와 재료 물성 및 적층방법에 따른 고유진동수를 다양하게 구하였다. 이 방법은 엄밀해석에 의한 일반해법이긴하나, 급수해가 수렴할 때까지 반복계산해야 하는 번거러움이 있다.

이 논문에서는 적층 복합재 원통셀의 동적특성을 검토한다. 복합재료 원통셀의 설계에서 주요 관심 대상인 직교이방성 변수가 진동특성과 어떤 관계를 갖는지 알아보기 위하여 직교이방성이론으로 한정시켜 해석하였다. 지배방정식은 面內慣性項을 고려한 Donnell 운동방정식을 사용하며, 진동수방정식은 Rayleigh-Ritz법을 이용하여 유도하였다. 임의의 경계조건에 적용될 수 있도록 보특성함수를 사용하여 고유진동수를 간단히 구하였다. 기존의 연구자들이 채용한 복합재료의 물성치들과 複合材 圓筒셀의 고유진동수사이에 어떤 관계가 있는지 규명하도록 하였다.

2. 理 論

2.1 複合材의 構成方程式

Fig. 1에서 보여주는 적층 셀요소에 대한 構成方程式은

$$\begin{Bmatrix} N_i \\ M_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_{ij} & B_{ij} \\ B_{ij} & D_{ij} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_j^0 \\ \kappa_j \end{Bmatrix} \quad (i, j=1, 2, 6) \quad (1)$$

이며 A_{ij}, B_{ij}, D_{ij} 는 각각 셀의 신장, 연성 및 굽힘 강성계수들로 다음과 같이 정의된다.

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} (1, z, z^2) dz \quad (i, j=1, 2, 6) \quad (2)$$

여기서 Q_{ij} 는 각 적층의 평면응력 강성계수로 다음과 같다.

$$\begin{aligned} Q_{11} &= E_1 / (1 - \nu_{12}\nu_{21}) \\ Q_{12} &= E_2\nu_{12} / (1 - \nu_{12}\nu_{21}) \\ Q_{22} &= E_2 / (1 - \nu_{12}\nu_{21}) \\ Q_{66} &= G_{12} \end{aligned} \quad (3)$$

직교이방성 대칭 적층인 경우에 식(1)을 $x-\theta$ 좌

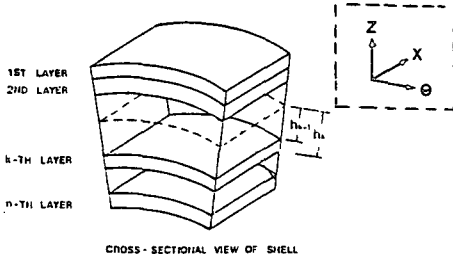


Fig. 1 Composite shell element

표계로 표시하면

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \end{bmatrix} = \frac{h}{1 - \nu_{x\theta}\nu_{\theta x}}$$

$$\begin{bmatrix} E_x & \nu_{x\theta}E_\theta & 0 \\ \nu_{x\theta}E_\theta & E_\theta & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu_{x\theta}\nu_{\theta x})G_{x\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x^o \\ \epsilon_\theta^o \\ \gamma_{x\theta}^o \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_x & \nu_{x\theta}D_\theta & 0 \\ \nu_{x\theta}D_\theta & D_\theta & 0 \\ 0 & 0 & (h^3/12)G_{x\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_\theta \\ 2\kappa_{x\theta} \end{bmatrix} \quad (5)$$

으로 주어진다. 여기서,

$$D_x = \frac{E_x h^3}{12(1 - \nu_{x\theta}\nu_{\theta x})} \quad D_\theta = \frac{E_\theta h^3}{12(1 - \nu_{x\theta}\nu_{\theta x})} \quad (6)$$

2.2 圓筒殼의 運動方程式

Fig. 2에서 보여주는 바와 같이 x, θ, z 를 반지름 a 인 원통殼의 직각, 곡면 좌표로 하고 이 좌표축에 따른 변위를 각각 u, v, w 라 한다. Donnell의 가정⁽⁵⁾을 도입하면 원통殼의 運動方程式은 다음과 같다.

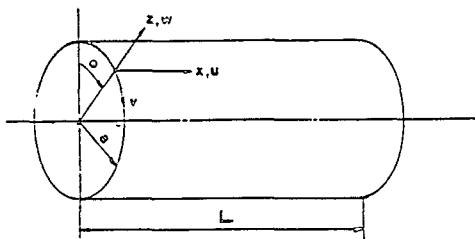


Fig. 2 Coordinate system of the circular cylindrical shell

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial N_{\theta x}}{\partial \theta} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{2}{a} \frac{\partial^2 M_{x\theta}}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 M_\theta}{\partial \theta^2} \\ + \frac{1}{a} N_\theta + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

또한, 變形率과 曲率의 변화는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \epsilon_x^o &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_\theta^o = \frac{\partial v}{a \partial \theta} + \frac{w}{a}, \quad \gamma_{x\theta}^o = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{a \partial \theta} \\ \kappa_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_\theta = -\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}, \quad \kappa_{x\theta} = -\frac{1}{a} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \end{aligned} \quad (8)$$

관계식 (4), (5) 및 (8)을 운동방정식 (7)에 대입하면 變位로 표시된 운동 방정식을 얻는다.⁽¹⁸⁾

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{b}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\nu_{\theta x} + b}{a} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} \\ - \frac{\nu_{\theta x}}{a} \frac{\partial w}{\partial x} - \rho r \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{\nu_{\theta x} + b}{a} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} + b \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{k}{a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \frac{k}{a^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \\ - \rho r \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{h^2}{12} \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{c}{a^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{k}{a^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} \right] \\ + \frac{k}{a^2} w - \left[\frac{\nu_{\theta x}}{a} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{k}{a^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right] \\ - \rho r \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

여기서,

$$\begin{aligned} k &= \frac{E_\theta}{E_x} \quad b = \frac{G_{x\theta}}{E_x} (1 - \nu_{x\theta}\nu_{\theta x}) \quad c = \nu_{\theta x} + 2b \\ \rho r &= \frac{(1 - \nu_{x\theta}\nu_{\theta x}) \rho}{E_x h} \end{aligned} \quad (10)$$

2.3 Donnell 운동방정식의 變分解

적층된 원통殼에 대한 변형에너지 U 와 운동에너지 T 는 다음과 같이 주어진다.⁽¹⁹⁾

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^L [(\epsilon^o)^T \{N\} + \{\kappa\}^T \{M\}] a \, d\theta dx \quad (11)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^L \rho r [\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2] a \, d\theta dx \quad (12)$$

식(11)에 식(1), (4) 및 (5)를 대입하면 변형에너지는 다음과 같다.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^L [A_{11}(\epsilon_x^\circ)^2 + 2A_{12}\epsilon_x^\circ\epsilon_\theta^\circ + A_{22}(\epsilon_\theta^\circ)^2 + A_{66}(\gamma_{x\theta})^2 + D_{11}(\kappa_x)^2 + 2D_{12}\kappa_x\kappa_\theta + D_{22}(\kappa_\theta)^2 + 4D_{66}(\kappa_{x\theta})^2] a \cdot d\theta dx \quad (13)$$

원통셀의 modal form은 원주방향으로는 週期的이며 진동수 ω 로 표시되는 調和振動을 한다고 할 수 있다. 또한, 원통셀의 길이방향의 변위는 동일한 단말조건을 가진 보의 변위와 相似하므로 변위 u, v, w 를 다음과 같은 모양으로 가정할 수 있다.

$$\begin{aligned} u &= U_0 \phi_m'(x) \cos n\theta \cos \omega t \\ v &= V_0 \phi_m(x) \sin n\theta \cos \omega t \\ w &= W_0 \phi_m(x) \cos n\theta \cos \omega t \\ m &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (14)$$

여기서 $\phi_m(x)$ 는 경계조건을 만족시키는 축방향의 特性보 함수이고 "'는 길이방향변수에 대한 特性보 함수의 미분이다. 또, U_0, V_0, W_0 는 진폭계수이다. 식(14)를 에너지식 (12), (13)에 대입하고 Rayleigh-Ritz 변분법을 적용하면 U_0, V_0, W_0 에 대한 同次方程式을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \alpha_2 \Delta & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} - \Delta & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - \Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0 \\ V_0 \\ W_0 \end{bmatrix} = 0 \quad (15)$$

여기서,

$$\begin{aligned} a_{11} &= A_{11} p_m^2 a^2 + A_{66} n^2 a^2 \\ a_{12} &= -n p_m a (A_{12} + A_{66} \alpha_2) \\ a_{13} &= A_{12} p_m a \alpha_1 \\ a_{22} &= A_{22} n^2 + A_{66} p_m^2 a^2 \alpha_2 \\ a_{23} &= -A_{22} n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{33} &= A_{22} - D_{11} p_m^4 a^2 + 2D_{12} n^2 p_m^2 \alpha_1 \\ &+ (1/a^2) D_{22} n^4 + 4D_{66} n^2 p_m^2 \alpha_2 \end{aligned} \quad (16)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \Delta &= a^2 p_m \omega^2 \\ \alpha_1 &= -\frac{1}{L} \int_0^L \phi_m''(x) \phi_m(x) dx \\ \alpha_2 &= \frac{1}{L} \int_0^L [\phi_m'(x)]^2 dx \end{aligned} \quad (17)$$

p_m 은 變位式 (14)에서 사용된 축방향 特性보 함수가 정해진 경계조건을 만족할 때 유도되는 주파수 방정식으로부터 얻어지는 特性값이고, 식(17)에서 적분 α_1, α_2 는 Felgar⁽²⁰⁾에 의해 계산되었다. 원통셀의 각 경계조건에 대하여 계산된 값들은 Table 1에 주어진다.⁽²¹⁾

식(15)에서 진폭계수 U_0, V_0, W_0 에 대한 nontrivial solution을 얻기 위해서는 계수의 행렬식이 0이 되어야 하므로 이 조건으로부터 3次方程式을 얻는다.

$$\Delta^3 - k_1 \Delta^2 + k_2 \Delta - k_3 = 0 \quad (18)$$

여기서,

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{1}{\alpha_2} (a_{11} + \alpha_2 a_{22} + \alpha_2 a_{33}) \\ k_2 &= -\frac{1}{\alpha_2} (a_{12}^2 + a_{13}^2 + \alpha_2 a_{23}^2 - \alpha_2 a_{22} a_{33} - a_{11} a_{33} - a_{11} a_{22}) \\ k_3 &= -\frac{1}{\alpha_2} (a_{12}^2 a_{33} + a_{23}^2 a_{11} + a_{13}^2 a_{22} - a_{11} a_{22} a_{33} - 2a_{12} a_{23} a_{13}) \end{aligned} \quad (19)$$

식(18)을 3차 방정식의 해법으로 풀면 세개의 根을 얻는다.

Table 1 Parameters α_1 , and α_2 using characteristic beam function varying axial mode number (m)

Boundary condition	α_1 α_2	Axial mode number (m)				
		1	2	3	4	5
1. Free-Free	α_1	0.5499	0.7467	0.8180	0.8585	0.8843
	α_2	2.2116	1.7662	1.5456	1.4244	1.3473
2. Clamped-Free	α_1	-0.2441	0.6033	0.7440	0.8182	0.8585
	α_2	1.3219	1.4712	1.1529	1.1820	1.1415
3. Clamped-Clamped	α_1	0.5499	0.7467	0.8180	0.8585	0.8843
	α_2	0.5499	0.7467	0.8180	0.8585	0.8843
4. Simply supported at both ends	α_1	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
	α_2	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5

$$\Delta_1 = 2\gamma^{1/3} \cos \frac{\Psi}{3} + \frac{k_1}{3} \quad (20a)$$

$$\Delta_2 = 2\gamma^{1/3} \cos \left(\frac{\Psi + 2\pi}{3} \right) + \frac{k_1}{3} \quad (20b)$$

$$\Delta_3 = 2\gamma^{1/3} \cos \left(\frac{\Psi + 4\pi}{3} \right) + \frac{k_1}{3} \quad (20c)$$

여기서,

$$\gamma = \left[-\frac{1}{27} \left(k_2 - \frac{k_1^2}{3} \right)^3 \right]^{1/2} \quad (21a)$$

$$\Psi = \cos^{-1} \left[\frac{1}{2\alpha} \left(k_3 - \frac{k_1 k_2}{3} + \frac{2k_1^3}{27} \right) \right] \quad (21b)$$

식(17)의 첫 식으로부터 원통셸의 고유진동수는 다음과 같이 주어진다.

$$f_n = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\Delta}{a^2 \rho r} \right]^{1/2} \quad (22)$$

3. 數値解 및 檢討

3.1 固定-自由端 원통셸

축방향 특성 함수 $\phi_m(x)$ 는 境界條件을 만족하도록 선택되어야 한다. 고정-자유, 고정-단순지지 및 고정-고정의 境界條件을 만족하는 一般型은 다음과 같이 주어진다.

$$\phi_m(x) = \cosh p_m x - \cosh p_m x - c_m (\sinh p_m x - \sin p_m x) \quad (23)$$

고정-자유단 境界條件은

$$\begin{aligned} \phi_m(0) = \phi_m'(0) &= 0 \\ \phi_m''(L) = \phi_m'''(L) &= 0 \end{aligned} \quad (24)$$

이다. 境界條件식 (24)의 나중 두식을 식(23)에 대입하면

$$\begin{aligned} c_m &= \frac{\cosh p_m L + \cos p_m L}{\sinh p_m L + \sin p_m L} \\ &= \frac{\sinh p_m L - \sin p_m L}{\cosh p_m L + \cos p_m L} \end{aligned} \quad (25)$$

식(25)로부터 원통셸의 축방향 진동을 나타내는 振動數 方程式을 다음과 같이 얻는다.

$$\cosh p_m L \cos p_m L + 1 = 0 \quad (26)$$

이 식은 외팔보의 진동수 방정식과 동일하다.

Table 1에서 적분 α_1, α_2 의 값을 $m=1$ 에 대하여 취하고 식(16)의 각 계수를 구하여 원통셸의 원주방향 고유진동수를 식(22)에 의해 계산하면 Table 2와 같다. Table 2에서는 기존의 실험⁽²²⁾과 해석결

Table 2 Natural frequencies of isotropic cantilever cylindrical shell. Shell geometry : $L=594.92$ mm, $a=304.8$ mm $h=0.8128$ mm Shell material properties : $E=68.95 \times 10^9$ N/m² $\nu=0.3$, $\rho=2.823 \times 10^3$ kg/m³

unit [Hz]				
n	Present	Exp. ⁽²²⁾	Sharma ⁽²³⁾	BOSOR4 ⁽²⁴⁾
2	440.5	----	445	---
3	235.2	206.2	237.5	213.9
4	145.5	131.7	146.5	135.0
5	107.4	100.8	107.5	101.0
6	100.5	96.9	99.9	95.6
7	113.8	113.0	113.1	109.4
8	139.1	140	138.7	134.6
9	171.9	174	171	167.0
10	210.3	214	210.3	204.8
11	253.4	258	253	247.3
12	300.9	307.6	301.9	294.1

과⁽²³⁾ 및 BOSOR4 수치해⁽²⁴⁾와 비교하기 위하여 동일한 등방성재료의 특성값을 사용하였다.

Fig. 3에서는 Table 2의 결과를 그래프로 표시하였다. 이 그림에서 보면, 變分解인 본 연구의 결과가 n 의 값이 작은 경우에는 실험값보다 조금 큰 값을 나타내고 있으나 일반적으로 다른 비교치와 상당히 잘 一致하고 있음을 알 수 있다.

3.2 固定-固定端 원통셸

앞에서의 等方性 고정-자유단 원통셸의 고유진동수에 대한 본 연구의 해석결과가 실험 및 기존의 연구결과와 잘 일치하고 있음이 확인되었으므로 複合材 直交異方性 圓筒셸의 기존 연구가 있는 고정-고정단 원통셸의 고유진동수를 계산한다.

이 경우 경계조건은

$$\begin{aligned} \phi_m(0) = \phi'_m(0) = 0 \\ \phi_m(L) = \phi'_m(L) = 0 \end{aligned} \tag{27}$$

이고, (23)에 대입하면

$$C_m = \frac{\cosh p_m L - \cos p_m L}{\sinh p_m L + \sin p_m L} = \frac{\sinh p_m L - \sin p_m L}{\sinh p_m L - \cos p_m L} \tag{28}$$

이다. 이 식으로부터 축방향의 진동수 방정식을 구하면

$$\cosh p_m L \cos p_m L - 1 = 0 \tag{29}$$

을 얻는다.

Table 1에서 적분 α_1, α_2 의 값을 $m=1$ 에 대하여 취하고 앞 절에서와 같은 방법으로 원통셸의 원주

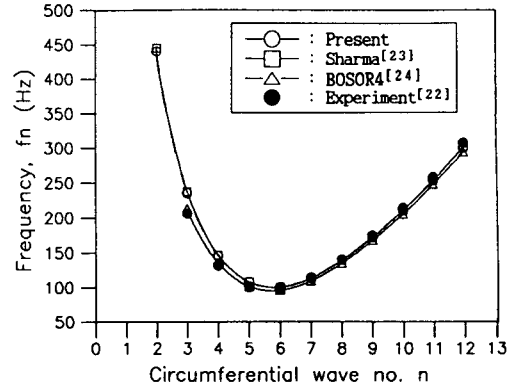


Fig. 3 Variation of frequency with circumferential wave number for a clamped-free isotropic cylindrical shell

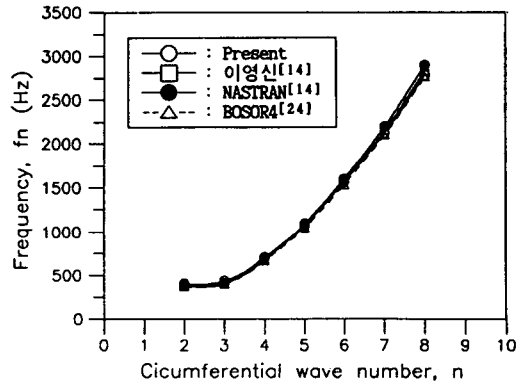


Fig. 4 Variation of frequency with circumferential wave number for a clamped-clamped two-layered (0°/90°) orthotropic cylindrical shell (boron/epoxy) [L/R=12.7, R/h=82.7]

Table 3 Natural frequencies of orthotropic cylindrical shell with clamped-clamped boundary condition for two layers 0°/90° (BORON-EPOXY) L/R=12.7, R/h=82.7

unit [Hz]				
n	이영신 ⁽¹⁴⁾	NASTRAN ⁽¹⁴⁾	Present	BOSOR4 ⁽²⁴⁾
2	373.43	382.63	399.31	366.6
3	400.27	412.39	433.78	396.6
4	672.56	687.64	697.89	661.5
5	1072.26	1093.08	1083.01	1050.1
6	1575.56	1600.46	1562.89	1534.6
7	2161.87	2205.30	2132.43	2109.8
8	2841.11	2907.59	2790.36	2774.3

방향 고유진동수를 계산하면 Table 3과 같이 이를 그래프로 표시하면 Fig. 4와 같다.

Table 3과 Fig. 4에서 본 연구결과와 NASTRAN 및 BOSOR4 수치해를 비교하면 원주방향 파동수 n 의 고른 영역에서 이들과 비교적 잘 맞고 있음을 알 수 있다.

3.3 異方性 變數와 고유 진동수와와의 관계

複合材의 탄성계수는 積層方法에 따라 임의로 조정할 수 있으며 적층방법은 원통셸의 구조요소로서 사용되기 위해 負荷에 대한 최적조건으로부터 결정된다. 따라서 靜的 負荷에 따라 선택된 적층 원통이 動的으로 어떤 특성을 가지고 있는가를 아는 것이 중요하다.

임의로 적층된 복합재 원통셸에 대하여 식(15)의 양변을 A_{11} 으로 나누면, 식(16)에서 정의된 a_{ij} 는 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= p_m^2 \cdot a^2 + b \cdot n^2 \cdot \alpha_2 \\
 a_{12} &= -\nu_{ex} \cdot n \cdot p_m \cdot a - b \cdot n \cdot p_m \cdot a \cdot \alpha_2 \\
 a_{13} &= \nu_{ex} \cdot p_m \cdot a \cdot \alpha_1 \\
 a_{22} &= k \cdot n^2 + b \cdot p_m^2 \cdot a^2 \cdot \alpha_2 \\
 a_{23} &= -k \cdot n \\
 a_{33} &= k + (h^2/12) \cdot a^2 \cdot p_m^4 + 2 \cdot (h^2/12) \cdot \nu_{ex} \cdot n^2 \cdot p_m^2 \cdot \alpha_1 \\
 &\quad + (h^2/12 \cdot a^2) \cdot k \cdot n^4 + 4 \cdot (h^2/12) \cdot b \cdot n^2 \cdot p_m^2 \cdot \alpha_2
 \end{aligned}
 \tag{30}$$

고정-자유단 경계조건을 가지는 원통셸의 동적 특성을 규명하기 위하여 사용된 복합재 3 종류와 등방성재료 鋼의 물성치는 Table 4와 같다.

Table 4의 여러 재료에 대하여 축방향 모우드수 (m)가 1일 때 원주방향 波動數 (n) 증가에 따른 진동수 특성을 대표적 직교이방성 변수 k 를 변화시켜 그 결과를 Fig. 5에 나타내었다. 이 그림에서 보면 k 가 減少함에 따라 고유진동수 f_n 이 減少하는

현상이 보이니 완전히 k 값에만 의존하지 않음을 볼 수 있다. 즉 $k=0.214$ 인 Boron/epoxy의 f_n 보다 $k=0.057$ 인 Graphite/epoxy가 더 높은 f_n 을 가짐을 알 수 있다. 그러나 최소 고유진동수가 발생하는 원주방향 파동수 n 의 경우에는 k 값이 감소할수록 增大함을 알 수 있다. 이와 같은 현상은 고유진동수가 단순히 복합재 셸 요소의 강성에 의존하지 않고 慣性項의 영향도 받음을 알 수 있다.

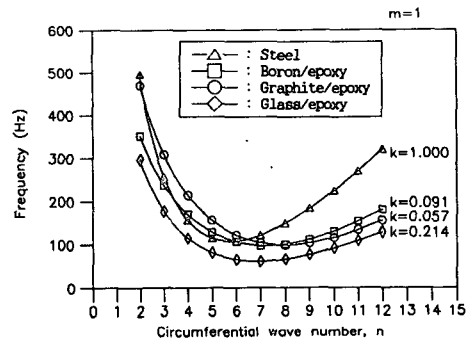


Fig. 5 Natural frequency of orthotropic cylindrical shell (clamped-free) when varing k

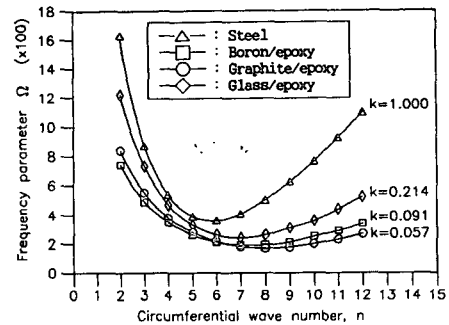


Fig. 6 Frequency parameter of orthotropic cylindrical shell (clamped-free) when varing k

Table 4 Mechanical properties of composite materials

symbol	specimens	E_x (GPa)	E_θ (GPa)	$G_{x\theta}$ (GPa)	$\nu_{x\theta}$	ρ (kg/m ³)	k (A_{22}/A_{11})
S ₁	Glass/epoxy [Scotchply1002]	38.6	8.27	4.14	0.26	1800	0.214
S ₂	Boron/epoxy [B(4)/5505]	204.0	18.5	5.59	0.23	2000	0.091
S ₃	Graphite/epoxy [T300/5208]	181	10.3	7.17	0.28	1600	0.057
S ₄	STEEL	210	210	145.83	0.28	7800	1.000

한편, 진동수에 質量의 영향이 포함된 진동수 파라미터⁽²⁾를 도입하여 위의 진동수를 無次元化시켜 n 과 대비시켜 그 결과를 그려보면 Fig. 6과 같다. 이 그림에서 보면 k 값이 감소할수록 진동수 파라미터(Ω)는 감소하고 그때의 n 은 증가하는 경향이 일정하게 나타나고 있음을 알 수 있다. 즉 진동수 파라미터를 도입하여 진동수를 무차원화하는 과정에서 복합체의 密度의 영향이 상쇄되었기 때문에 이방성변수 k 가 증가할수록 진동수 파라미터도 증가함을 알 수 있다.

4. 結 論

複合材의 積層으로 구성된 直交 異方性 원통셀의 동적거동을 Donnell이론에 기초한 운동방정식을 이용하고 Rayleigh-Ritz 變分法으로 해석하였다. 이 해석법은 로봇 팔과 같이 급격히 변하는 하중을 받으며 높은 剛性이 요구되는 원통 튜브의 각종 구속조건에 대하여 일반화된 解法을 제공한다. 원통셀의 양단 境界條件은 特性函數를 이용함으로써 실제로 생길 수 있는 모든 경계조건을 포함하여 해석할 수 있다. 본 해석의 결과와 기존연구에서 等方性 원통셀에 대한 실험 및 해석과 직교이방성 원통셀에 대한 NASTRAN 및 BOSOR4의 수치해와 비교하여 잘 일치하고 있음을 보였다.

의괄 직교이방성 원통셀에 대한 동적해석을 통하여 계의 固有振動數는 직교이방성 변수의 영향을 크게 받아 고유진동수의 저하를 가져오나 慣性의 효과도 동시에 받아 質量의 변화가 계의 동적 특성에 영향을 미침을 보였다. 또한, 진동수 파라미터를 도입하여 無次元 진동수를 사용하면 無次元 진동수가 직교이방성 변수와 일정한 관계가 있음을 보였다.

특히 현재 널리 사용되고 있는 fiber/epoxy 복합재의 경우 比強度는 매우 우수하나 등방성 원통셀보다 훨씬 낮은 최저 고유진동수를 가지고 있음을 설계시 주의를 요하는 特性이다.

후 기

이 연구는 1990년도 延世大學校 學術 研究費에 의하여 수행되었음을 밝히며 감사드리는 바이다

참고문헌

- (1) 광윤근 외, 1990, "직접 구동방식 로봇의 개발과 그 응용에 관한 연구(III)," 과학기술처, pp. 115~146.
- (2) Arnorld, R.N. and Warburton, G.B., 1953, "Flexural Vibrations of Thin Cylinders," Proc. I. Mech. E., Vol. 167, pp. 62~74.
- (3) Koval, L.R. and Cranch, E.T., 1962, "On the Free Vibrations of Thin Cylindrical Shells Subject to an Initial Static Torque," Proc. 4th O.S. National Congress of Appl. Mech., pp. 107~117.
- (4) Weingarten, V.I., 1964, "Free Vibration of Thin Cylindrical Shells," AIAA J. 2(4), pp. 717~722.
- (5) Donnell, L.H., 1933, "Stability of Thin Walled Tubes under Tortion," NACA report No. 479.
- (6) Kraus, H., 1967, Thin Elastic Shells, John Wiley & Sons, Inc., New York, pp. 307~314.
- (7) Soedel, W., 1983, "Simplified Equations and Solutions for the Vibration of Orthotropic Cylindrical Shells," J. Sound and Vibration, 87(4), pp. 555~566.
- (8) Love, A.E.H., 1888, "On the Small Free Vibration and Deformation of Thin Elastic Shells," Philosophical Transactions of the Royal Society 179A, pp. 491~546.
- (9) Cheng, S. and He, F.B., 1984, "Theory of Orthotropic and Composite Cylindrical Shells, Accurate and Simple Fourth-Order Governing Equation," J. Applied Mechanics Trans. ASME, Vol. 51, pp. 736~744.
- (10) Dong, S.B., 1968, "Free Vibration of Laminated Orthotropic Cylindrical Shells," J. Acoustic Society of America 44(6), pp. 1628~1635.
- (11) Srinivasan, R.S. and Sankaran, S., 1975, "Vibration of Cantilever Shells," J. Sound and Vibration 40(3), pp. 425~430.
- (12) Soldatos, K.P., 1983, "On the Buckling and Vibration of Angle-Ply Laminated Circular Cylindrical Shells," Int. J. Eng. Sci. 21(3), pp. 217~222.

- (13) Sharma, C.B. and Darvizeh, M., 1987, "Free Vibration of Specially Orthotropic, Multilayered, Thin Cylindrical Shells with Various End Conditions," *Composite Structures*, Vol.7, pp.123~138.
- (14) 이영신, 문흥기, 1986, "직교이방성 복합재료 원통셸의 자유진동 해석," *대한기계학회논문집*, 제10권 제5호, pp. 758~769.
- (15) 이영신, 문흥기, 윤종호, 1986, "적층 직교이방성 외팔 원통셸의 자유진동 해석," *대한기계학회논문집*, 제10권 제6호, pp. 929~936.
- (16) 이영신, 문흥기, 1988, "CFRP 적층 원통셸의 진동 해석," *대한기계학회논문집*, 제12권 제4호, pp. 670~674.
- (17) Chung, H., 1981, "Free Vibration Analysis of Circular Cylindrical Shells," *J.Sound and Vibration*, Vol.74 No.3, pp.331~350.
- (18) 이창환, 1991, "직교이방성 복합재료 원통셸의 자유진동에 관한 연구," *연세대학교 대학원 석사학위 논문*.
- (19) Sheinman, I. and Greif, S., 1984, "Dynamic Analysis of Laminated Shells of Revolution," *J. Composite Materials*, Vol.18, pp.200~215.
- (20) Felgar, R.P.Jr., 1950, *Formulas for Integrals Containing Characteristic Functions of Vibrating Beam*, The University of Texas, Austin, Bureau of Engineering Research, Circular No. 14.
- (21) Blevins, R.D., 1975, *Formulas for Natural Frequency & Mode Shape*, Van Nostrand Reinhold Co., p. 312.
- (22) Sewall, J.L. and Pusey, C.G., 1975, "Vibration Study of Clamped-Free Elliptical Cylindrical Shell," *AIAA Journal* Vol. 9, No.6, pp.1004~1011.
- (23) Sharma, C.B., 1974, "Calculation of Natural Frequencies of Fixed-Free Circular Cylindrical Shells," *J.Sound and Vibration*, Vol.35 No.1, pp. 55~76.
- (24) Bushnell, D., 1974, "Stress, Stability and Vibration of Complex, Branched Shells of Revolution," *Computers & Structures* Vol.4, pp. 399~435.