

〈論 文〉

이종재료간 V-노치균열의 응력특이성과 응력강도계수의 특성 및 결정에 관한 연구

조상봉* · 윤성관**

(1992년 5월 16일 접수)

A Study on the Determination and Characteristics of Stress Intensity Factors and Stress Singularities for V-notched Cracks in Dissimilar Materials

S.B. Cho and S.K. Yoon

Key Words : V-notched Crack in Dissimilar Materials(이종재료간 V-노치균열), Stress Intensity Factors(응력강도계수), Stress Singularities(응력특이성), Newton-Raphson Method(뉴턴-랩슨법), Collocation Method(선점법)

Abstract

In bonded structures, there are V-notched cracks in dissimilar materials and the stress concentration of these V-notched cracks causes to occur interface cracks in dissimilar materials. Therefore the strength evaluation of V-notched cracks in dissimilar materials seems to be important. The stress fields of a V-notched crack is known as $\sigma_{ij} \propto Kr^{p-1}$, where K is the stress intensity factor and $p-1$ is the stress singularity. When the distance, r , approaches to 0 at the stress fields of V-notched cracks, the stresses become infinites by two more stress singularities of $p-1$ and $p-1$ is no more -0.5 . Stress singularities and stress intensity factors for V-notched cracks in dissimilar materials are treated and discussed. The Newton-Raphson method which is an efficient numerical method for solving a non-linear equation is used for solving stress singularities. And stress intensity factors are solved by the collocation method using the Newton-Raphson and least squares method. The effects of stress intensity factors and stress singularities on stress fields of V-notched cracks in dissimilar materials are studied by using photoelastic isochromatic fringes patterns obtained from computer graphics.

1. 서 론

최근, 신재료의 개발과 더불어 접착, 접합기술이 발전되면서 서로 다른 재료의 접합구조물의 이용이 자동차, 항공기 등의 여러분야에서 많아지고 있다. 접합구조물에서는 접합계면이 있기 마련이고

접합계면에서 균열이 발생하여 파괴가 일어난다는 점에서 접합계면 균열에 대한 중요성이 알려져 있다.⁽¹⁾

접합구조물에서는 이종재료간의 V-노치(본 논문에서는 V-노치균열이라 함)부가 있게 되고, V-노치균열 선단에서 응력집중현상이 생겨 접합계면균열이 발생하게 된다. 따라서 V-노치균열의 강도평가가 중요하나 강도평가법이 아직 확립되지 못한 것이 현실이다. 이종재료간의 V-노치균열의 응력장은, $\sigma_{ij} \propto Kr^{p-1}$ 의 관계로 알려져 있고,⁽²⁾ K 는

*정회원, 경남대학교 기계설계학과

**경남대학교 기계설계학과 대학원

응력강도계수에 해당하고, $p-1$ 은 응력특이성지수이다. 그런데, 이종재료간의 V-노치균열의 응력장에서 노치선단에서의 거리가 r 가 0으로 되면 응력이 무한대로 되는 응력특이성지수 $p-1$ 이 2가지 이상인 경우가 있고, 균열일 때처럼 응력특이성지수 $p-1$ 이 -0.5 로 고정되지 않으므로 응력강도계수 K 만의 파괴법칙이 성립할 수 없다. 따라서, 이종재료간의 V-노치균열의 노치각도 및 재료의 종류에 따른 응력특이성지수를 구해야 되고 그 때의 응력강도계수를 구해야 한다. 또한, 파괴강도평가를 위한 파괴강도평가 파라미터를 찾아야 할 것이고 많은 실험을 통하여 신뢰성있는 새로운 파괴법칙을 확립해야 한다.

본 연구에서는 이종재료간의 V-노치균열의 노치각도 및 재료의 종류에 따른 응력특이성지수와 응력강도계수 해석에 각각 뉴턴-람슨법(newton-raphson method), 뉴턴-람슨법과 최소자승법을 이용한 선점법(collocation method)인 수치해석적 방법^(3,4)을 응용하고, 광탄성 등색선 무늬를 컴퓨터 그래픽하여 응력특이성지수와 응력강도계수가 모드우드(mode)에 미치는 특성과 경계요소법(boundary element method)으로 응력해석한 결과로써 선점법을 이용하여 응력강도계수를 해석하고 기존의 결과등과 비교, 검토하고자 한다.

2. 기초이론

2.1 이종재료간 V-노치균열의 응력특이성지수

Fig. 1에서와 같은 이종재료가 $\theta=0^\circ$ 에서 완전결합되고, $\theta=-S_1$ 과 $\theta=S_2$ 에서 표면력이 없는 것을 이종재료간의 V-노치균열(V-notched crack)이라 한다. 이 경우 2차원 문제에서 서로 다른 두 탄성체의 일반적인 변위장과 응력장을 $\Omega_j(Z)$ 와 $\Psi_j(Z)$ 의 복소응력함수를 이용하여 극좌표로 표현하면 다음과 같다.⁽⁵⁾

$$u_{jr} + iu_{j\theta} = (2\mu_j)^{-1} e^{-i\theta} [\chi_j \Omega_j(Z) - Z \bar{\Omega}_j'(\bar{Z}) - \bar{\Psi}_j(\bar{Z})] \quad (1)$$

$$\sigma_{jrr} + i\sigma_{jr\theta} = \Omega_j'(Z) + \bar{\Omega}_j'(\bar{Z}) - Z \bar{\Omega}_j''(\bar{Z}) - \bar{Z} Z^{-1} \bar{\Psi}_j'(\bar{Z}) \sigma_{j\theta\theta} - i\sigma_{j\theta r} \quad (2)$$

$$= \Omega_j'(Z) + \bar{\Omega}_j'(\bar{Z}) + Z \bar{\Omega}_j''(\bar{Z}) + \bar{Z} Z^{-1} \bar{\Psi}_j'(\bar{Z}) \quad (3)$$

여기서, $Z = re^{i\theta}$, μ_j 는 전단탄성계수, ν_j 는 포와

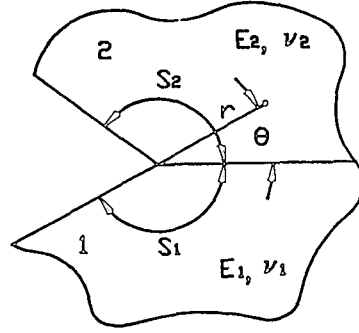


Fig. 1 V-notched crack in dissimilar materials

송 비,

$$\chi_j = 3 - 4\nu_j \quad \text{평면 변형률}$$

$$\chi_j = (3 - 4\nu_j) / (1 + \nu_j) \quad \text{평면 응력}$$

r 는 V-노치균열 선단에서의 거리, θ 는 각도, $(-)$ 는 공액을, j 는 재료를 의미한다.

Fig. 1에서와 같은 이종재료간의 V-노치균열의 복소응력함수는 다음과 같이 놓을 수 있다.⁽⁵⁾

$$\Omega_j(Z) = \sum_{m=1}^{\infty} (A_j Z^p + a_j Z^{\bar{p}})_m$$

$$\Psi_j(Z) = \sum_{m=1}^{\infty} (B_j Z^p + b_j Z^{\bar{p}})_m \quad (4)$$

여기서 p 는 복소응력함수의 m 번째 복소지수이고, A_j, a_j, B_j, b_j 는 복소계수로 m 번째 복소지수와 관계되는 계수를 의미한다.

경계조건으로 이종재료가 $\theta=0^\circ$ 에서 완전결합되고, $\theta=-S_1$ 과 $\theta=S_2$ 에서 표면력이 없는 V-노치균열에서 다음의 4가지 조건을 만족해야 한다.

(1) $\theta=0^\circ$ 에서 변위의 연속조건

$$u_{1r} + iu_{1\theta} = u_{2r} + iu_{2\theta} \quad (5)$$

(2) $\theta=0^\circ$ 에서 표면력의 연속조건

$$\sigma_{1\theta\theta} - i\sigma_{1r\theta} = \sigma_{2\theta\theta} - i\sigma_{2r\theta} \quad (6)$$

(3) $\theta=-S_1$ 에서 표면력이 없음(traction free)

$$\sigma_{1\theta\theta} - i\sigma_{1r\theta} = 0 \quad (7)$$

(4) $\theta=S_2$ 에서 표면력이 없음(traction free)

$$\sigma_{2\theta\theta} - i\sigma_{2r\theta} = 0 \quad (8)$$

식(4)를 식(1), (2), (3)에 각각 대입하여 정리하고, 경계조건식(5), (6), (7), (8)에 각각 대입하여 복잡한 과정을 거쳐 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.⁽⁵⁾

$$\begin{bmatrix} \mu_2/\mu_1 x_1 + \mu_2/\mu_1 e^{-2iPS_1} & -x_2 - e^{2iPS_2} & -\mu_2/\mu_1 P + \mu_2/\mu_1 P e^{-2iS_1} & P(1 - e^{2iPS_1}) \\ -1 + e^{-2iPS_1} & 1 - e^{-2iPS_2} & P(-1 + e^{-2iS_1}) & P(1 - e^{2iS_2}) \\ -\mu_2/\mu_1 P + \mu_2/\mu_1 e^{2iPS_1} & P(1 - e^{-2iS_2}) & \mu_2/\mu_1 x_1 + \mu_2/\mu_1 e^{2iPS_1} & -x_2 - e^{-2iPS_2} \\ P(-1 + e^{2iS_1}) & P(1 - e^{-2iS_2}) & -1 + e^{2iPS_1} & 1 - e^{-2iPS_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \bar{a}_1 \\ \bar{a}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

식(9)를 간략하게 표현하면 식(10)과 같다.

$$[D] \{A_1 \ A_2 \ \bar{a}_1 \ \bar{a}_2\}' = \{0 \ 0 \ 0 \ 0\}' \quad (10)$$

식(10)에서 의미가 있는 해로 행렬 $[D]$ 의 행렬식이 0이 되어야 하는 조건을 이용하여 특성방정식을 얻을 수 있으며, Bogy⁽⁶⁾는 멜린변환(mellin transformation)법을 이용하여 다음과 같은 동일한 특성방정식을 얻었다.

$$\begin{aligned} & D(S_1, S_2, \beta, \gamma; P) \\ &= A(S_1, S_2; P) P^2 \\ &+ 2B(S_1, S_2; P) \beta \gamma + C(S_1, S_2; P) \beta^2 \\ &+ 2E(S_1, S_2; P) \gamma + 2F(S_1, S_2; P) \beta \\ &+ 4G(S_1, S_2; P) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

여기서,

$$\beta = \frac{\mu_1 x_2 - \mu_2 x_1}{\mu_1 x_2 + \mu_2 x_1}, \quad \gamma = \frac{\mu_1(x_2 - 2) - \mu_2(x_1 - 2)}{\mu_1 x_2 + \mu_2 x_1},$$

$$A(S_1, S_2; P) = 4K(P, S_2)K(P, S_1)$$

$$B(S_1, S_2; P) = 2P^2 \sin^2(S_2) K(P, S_1) + 2P^2 \sin^2(S_1) K(P, S_2),$$

$$C(S_1, S_2; P) = 4P^2(P^2 - 1) \sin^2(S_2) \sin^2(S_1) + K[P, (S_2 - S_1)],$$

$$E(S_1, S_2; P) = 2P^2[\sin^2(S_2) \sin^2(P, S_1) - \sin^2(S_1) \sin^2(P, S_2)],$$

$$F(S_1, S_2; P) = -E(S_1, S_2; P) + K(P, S_1) - K(P, S_2),$$

$$G(S_1, S_2; P) = K[P, (S_2 + S_1)],$$

$$K(P, \theta) = \sin^2(P\theta) - P^2 \sin^2(\theta)$$

식(11)의 복소 비선형 특성방정식에서 고유치(P)가 구해지고, 고유치(P)가 응력함수의 지수이며, $P-1$ 의 값이 0보다 작을 때 이중재료간 V-노치선단의 응력이 무한대로 되는 응력특이성을 가지게 되고 $P-1$ 이 응력특이성지수가 된다.

2.2 이중재료간 V-노치균열의 응력강도계수

(1) 고유치(P)가 복소수일 때

식(9)는 다음과 같이 분리할 수 있고,

$$\begin{bmatrix} [D_{11}] & [D_{12}] \\ [D_{21}] & [D_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \bar{a}_1 \\ \bar{a}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (12)$$

식(12)에서 다음의 관계를 얻을 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} A_2 \\ \bar{a}_1 \end{Bmatrix} = -[D_{22}]^{-1}[D_{21}]A_1 = \{Y(1) \\ Y(2) \\ Y(3)\} A_1 \quad (13)$$

한편, 다음과 같이 정의하고, 경계조건에서 얻은 결과식들을 이용하면,

$$\{Z\} = \begin{Bmatrix} Y(1) \\ Y(2) \\ Y(3) \\ -Y(2)e^{2iPS_1} - Pe^{2iS_1} \\ -Y(3)e^{-2iPS_2} - Y(1)Pe^{-2iS_2} \\ -e^{-2iPS_1} - Y(2)Pe^{-2iS_1} \\ -Y(1)e^{2iPS_2} - Y(3)Pe^{2iS_2} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

재료 1의 응력함수의 복소계수 즉, 고유벡터는 다음과 같이 얻을 수 있다.⁽⁵⁾

$$\begin{Bmatrix} A_1 \\ a_1 \\ B_1 \\ b_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Z(2) \\ Z(4) & 0 \\ 0 & Z(6) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ \bar{A}_1 \end{Bmatrix} \quad (15)$$

그리고, 재료 2의 고유벡터는 다음과 같다.⁽⁵⁾

$$\begin{Bmatrix} A_2 \\ a_2 \\ B_2 \\ b_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(1) & 0 \\ 0 & Z(3) \\ Z(5) & 0 \\ 0 & Z(7) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ \bar{A}_1 \end{Bmatrix} \quad (16)$$

식(15)와 (16)에서 재료 1과 2의 고유벡터는 복소계수 A_1 에 의해서만 표현되고 있음을 알 수 있다.

(2) 고유치(P)가 실수일 때

식(4)에서 고유치(P)가 실수일 때는 $a_j = b_j = 0$ 로 두어 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Omega_j(Z) = \sum_{m=1}^{\infty} (A_j Z^m)^m$$

$$\Psi_j(Z) = \sum_{m=1}^{\infty} (B_j Z^P)^m \quad (17)$$

여기서 A_j, B_j 는 복소계수이고, 지수 P 는 실수이다. 고유치(P)가 복소수일 때와 같은 방법으로 경계조건 등을 이용하여 고유벡터를 다음과 같이 구하였다.⁽⁵⁾

재료 1의 고유벡터는 다음과 같고,

$$\begin{Bmatrix} A_1 \\ B_2 \end{Bmatrix} = [R_1] \begin{Bmatrix} A_1 \\ \bar{A}_1 \end{Bmatrix} \quad (18)$$

또한, 재료 2의 고유벡터는 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{Bmatrix} = [R_2][S] \begin{Bmatrix} A_1 \\ \bar{A}_1 \end{Bmatrix} \quad (19)$$

여기서,

$$[R_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -e^{-2iPS_1} & -e^{-2iS_1} \end{bmatrix}$$

$$[R_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -e^{-2iPS_2} & -e^{-2iS_2} \end{bmatrix}$$

$$[S] = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \\ f_3 & f_4 \end{bmatrix}$$

$$f_1 = \frac{Q_4 Q_5 - Q_1 Q_9}{Q_3 Q_8 - Q_7 Q_4}, \quad f_2 = \frac{Q_6 Q_4 - Q_2 Q_8}{Q_3 Q_8 - Q_7 Q_4}$$

$$f_3 = \frac{Q_5 Q_3 - Q_1 Q_7}{Q_4 Q_7 - Q_8 Q_3}, \quad f_4 = \frac{Q_6 Q_3 - Q_2 Q_7}{Q_4 Q_7 - Q_8 Q_3}$$

$$Q_1 = \kappa_1 + e^{-2iPS_1}$$

$$Q_2 = -P + Pe^{-2iS_1}$$

$$Q_3 = -\mu_1/\mu_2 \kappa_2 - \mu_1/\mu_2 e^{2iPS_2}$$

$$Q_4 = Q_1/\mu_2 P - \mu_1/\mu_2 Pe^{2iS_2}$$

$$Q_5 = 1 - e^{-2iPS_1}$$

$$Q_6 = P(1 - e^{-2iS_1})$$

$$Q_7 = -1 + e^{2iPS_2}$$

$$Q_8 = P(-1 + e^{2iS_2})$$

이다. 식(18)과 (19)에서 고유벡터는 A_1 만으로 표시되어지고 있고, A_1 의 실수부(R)와 허수부(I)는 식(20)에 의해 독립적인 경우와 종속적인 경우로

나누어진다.⁽⁵⁾

$$\begin{bmatrix} (I_{g_1} + R_{g_2}) & (I_{g_2} - I_{g_1}) \\ I_{g_1} + I_{g_2} & (R_{g_1} - R_{g_2}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} RA_1 \\ IA_1 \end{Bmatrix} = [D^*] \begin{Bmatrix} RA_1 \\ IA_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (20)$$

여기서,

$$g_1 = \bar{f}_2 - f_3, \quad g_2 = \bar{f}_1 - f_4$$

이고, R 는 실수부, I 는 허수부를 의미한다. 식(20)에서 $|D^*|=0$ 인 경우는 RA_1 과 IA_1 이 독립적이지만, $|D^*| \neq 0$ 인 경우는 식(20)의 관계를 식(21)과 같이 표현할 수 있고, RA_1 과 IA_1 이 다음의 종속관계가 성립한다.

$$\begin{Bmatrix} RA_1 \\ IA_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{bmatrix} a' = [U] a' \quad (21)$$

식(21)의 a', U_{11}, U_{21} 은 Table 1에서와 같이 4가지의 경우로 나타낼 수 있다. 따라서 다음 식이 된다.

$$\begin{Bmatrix} A_1 \\ \bar{A}_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} RA_1 \\ IA_1 \end{Bmatrix} = [W] \begin{Bmatrix} RA_1 \\ IA_1 \end{Bmatrix} \quad (22)$$

재료 1과 2의 고유벡터는 더욱 간단히 실수 a' 만으로 다음과 같이 표현된다.⁽⁵⁾

$$\begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{Bmatrix} = [R_1][W][U] a' \quad (23)$$

$$\begin{Bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{Bmatrix} = [R_2][S][W][U] a' \quad (24)$$

이상 2.2절에서 응력함수의 복소계수는 고유치문제로 보면 고유벡터이며, 특히 응력특이성이 있는 고유치의 응력함수계수를 응력강도계수라 한다.

3. 응력특이성 및 응력강도계수의 수치해석법

3.1 고유치(P)의 뉴턴-랩슨법에 의한 계산

식(11)의 비선형 복소방정식인 특성방정식에서 고유치(P)를 구하기 위하여 다음과 같은 뉴턴-랩슨법을 이용한다.

$$\{D(P)\}_{i+1} = \{D(P)\}_i + \left[\frac{\partial D(P)}{\partial P} \right]_i \Delta P \quad (25)$$

식(25)는 멱급수로 전개한 것으로 첨자 i 는 반복회수이고, ΔP 는 수정값이 된다. 그리고, $\{D(P)\}_{i+1}$

Table 1 Four types of eigenvalue, a'

a'	U_{11}	U_{21}
IA_1	$-d_{12}^*/d_{11}^*$	1
RA_1	1	$-d_{11}^*/d_{12}^*$
IA_1	$-d_{22}^*/d_{21}^*$	1
RA_1	1	$-d_{21}^*/d_{22}^*$

=0으로 두어 다음 식에서 결정할 수 있다.

$$\Delta P = -\{D(P)\}_i \left[\frac{\partial D(P)}{\partial P} \right]_i \quad (26)$$

따라서, 수정된 값은 다음과 같이 된다.

$$P_{i+1} = P_i + \Delta P \quad (27)$$

식(27)에 의해 수렴된 값으로 고유치(P)를 구하게 된다. 그런데, 고유치는 여러개 있으므로 초기치를 변경하여 여러개를 구해야 한다.

3.2 선점법에 의한 응력강도계수의 수치해석법

복소응력함수로 표시된 최대전단응력 τ_{max} 을 식(1), (2), (3)에서 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\tau_{max}^2 = \{Z\bar{\Omega}_j, (\bar{Z}) + \bar{\Psi}'(\bar{Z})\} \{Z\Omega_j, (Z) + \Psi'(Z)\} \quad (28)$$

또한 복소응력함수를 M번째 고유치까지의 합으로 하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Omega_j(Z) &= \sum_{m=1}^M (A_j Z^p + a_j Z^{\bar{p}})_m \\ \Psi_j(Z) &= \sum_{m=1}^M (B_j Z^p + b_j Z^{\bar{p}})_m \end{aligned} \quad (29)$$

여기서는 P가 복소수일 때의 식이만 P가 실수일 때는 $a_i = b_i = 0$ 으로 한다. 한편, 광탄성 공식은 다음과 같으며,

$$\tau_{max}^2 = (N/2at)^2 \quad (30)$$

식(28), (29)을 이용하여 최대전단응력 τ_{max} 를 구하고 광탄성 공식을 이용하면 다음의 결과를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} h &= \tau_{max}^2 - (N/2at)^2 \\ &= \{Z \sum_{m=1}^M (\bar{A}_j \bar{P}(\bar{P}-1) \bar{Z}^{\bar{p}-2} + \bar{a}_j P(P-1) \bar{Z}^{\bar{p}-2})_m \\ &\quad + \sum_{m=1}^M (\bar{B}_j \bar{P} \bar{Z}^{\bar{p}-1} + \bar{b}_j P \bar{Z}^{\bar{p}-1})_m\} \\ &\quad \times \{Z \sum_{m=1}^M (A_j P(P-1) Z^{p-2} + a_j \bar{P}(\bar{P}-1) Z^{p-2})_m \\ &\quad + \sum_{m=1}^M (B_j P Z^{p-1} + b_j \bar{P} Z^{p-1})_m\} - (N/2at)^2 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (31)$$

여기서, N은 등색선 무늬차수, α 는 광탄성 감도, t는 시편두께이다.

복소응력함수의 계수 A_j, a_j, B_j, b_j 을 수치해석적으로 구하기 위하여 최소사승법과 뉴턴-랩슨법을 병행한 다음식을 이용한다.

$$\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_k \end{bmatrix}_i = - \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial A_{j1}} & \frac{\partial h_1}{\partial \bar{A}_{j1}} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial A_{jM}} & \frac{\partial h_1}{\partial \bar{A}_{jM}} \\ \frac{\partial h_2}{\partial A_{j1}} & \frac{\partial h_2}{\partial \bar{A}_{j1}} & \dots & \frac{\partial h_2}{\partial A_{jM}} & \frac{\partial h_2}{\partial \bar{A}_{jM}} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial h_k}{\partial A_{j1}} & \frac{\partial h_k}{\partial \bar{A}_{j1}} & \dots & \frac{\partial h_k}{\partial A_{jM}} & \frac{\partial h_k}{\partial \bar{A}_{jM}} \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} \Delta A_{j1} \\ \Delta \bar{A}_{j1} \\ \vdots \\ \Delta A_{jM} \\ \Delta \bar{A}_{jM} \end{bmatrix} \quad (32)$$

여기서, $\partial h_k / \partial A_{jM}$ 와 $\partial h_k / \partial \bar{A}_{jM}$ 는 각각 k 번째의 h_k 를 M번째의 고유치 P에 해당하는 계수(A_j)_M와 공액계수로 미분한 것을, i는 반복회수를 의미한다. 그리고 식(32)를 간략하게 표현하면

$$\{h\} = [J]\{\Delta A\} \quad (33)$$

이 되고, 식(33)의 양변에 $[J]^T$ 을 곱하여 다음식을 얻을 수 있다.

$$[J]^T\{h\} = [J]^T[J]\{\Delta A\} \quad (34)$$

여기서, 다음과 같이 두고,

$$[C] = [J]^T[J] \quad (35)$$

$$\{d\} = [J]^T\{h\} \quad (36)$$

식(34)에서 수정값 $\{\Delta A\}$ 에 대하여 풀면 식(37)이 된다.

$$\{\Delta A\} = [C]^{-1}\{d\} \quad (37)$$

수정된 고유벡터는 식(37)에서 구할 수 있고,

$$(A)_{i+1} = (A)_i + \{\Delta A\} \quad (38)$$

(A)_i의 값이 수렴할 때까지 반복 계산하도록 한다.

4. 수치해석 결과 및 검토

4.1 고유치(P)의 수치해석 결과 및 검토

앞의 3.1 절에서 설명한 뉴턴-랩슨법에 의해 복소 비선형 특성방정식에서 고유치(P)를 구하였다. Fig. 2는 이중재료간 V-노치균열 문제에서 노치각도 $S_1 = S_2 = 135^\circ$, 포아손비 $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ 일 때 두 재료의 영율비(E_1/E_2)의 변화에 따른 고유치를 도시한 것으로, 여러가지의 고유치가 있을 수 있으나 1이하의 값만 도시하였다. Fig. 2에서 보면, 첫번째 고유치(P_1)이 실수부 $Re(P_1)$ 과 허수부 $Im(P_1)$ 을 가지고 두 번째 고유치(P_2)가 1인 부분이 있고, 첫 번째 고유치(P_1)과 두 번째 고유치(P_2)가 모두

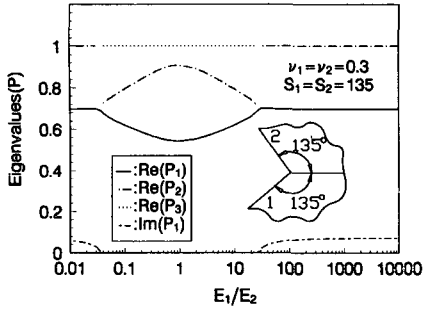


Fig. 2 Eigenvalues for various ratio of Young's modulus, $\log(E_1/E_2)$

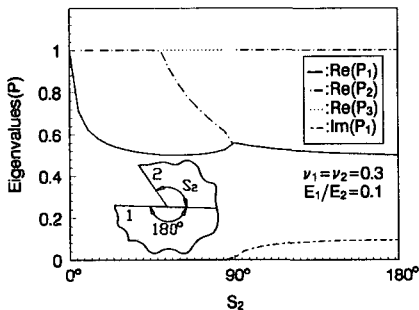


Fig. 3 Eigenvalues for various angles, S_2

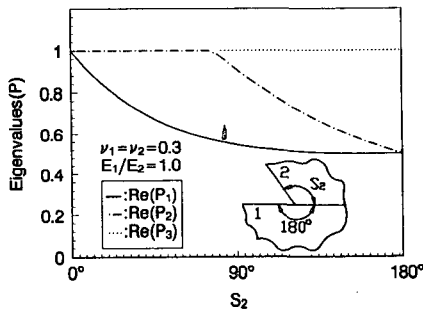


Fig. 4 Eigenvalues for various angles, S_2

실수이고 1보다 작으며 세 번째 고유치(P_3)가 1인 부분이 있다.

Fig. 3은 두 재료의 영률비 $E_1/E_2=0.1$ 이고, 포아슨 비 $\nu_1=\nu_2=0.3$, $S_1=180^\circ$ 일 때 S_2 가 0° 에서 180° 까지 변화할 때의 고유치를 Fig. 1에서와 마찬가지로 1이하의 값만 도시하였고, Fig. 3에서도 Fig. 2와 같은 경향이 있음을 알 수 있다.

Fig. 4는 Fig. 3의 문제에서 두 재료를 같은 재료로 $\nu_1=\nu_2=0.3$, $E_1/E_2=1$ 즉, 등방재료의 경우로 둔 등방재료 노치문제에 대한 고유치를 S_2 의 변화에 따라 도시한 것이고, 이 결과는 문헌(7, 8)과

잘 일치한다. Fig. 4에서 보면 첫 번째 고유치(P_1)과 두 번째 고유치(P_2)가 실수이고 1보다 작은 다른 값을 갖는 부분이 있고, 균열일 때는 $P_1=P_2=0.5$ 로 됨을 알 수 있다.

이상의 결과에서 고유치 P_1 과 P_2 의 값이 실수이고 1보다 작은 경우가 있는데, 응력 $\sigma_{ij} \propto Kr^{p-1}$ 의 관계에서 보면 이것은 r 의 값이 0으로 되면 응력이 무한대로 되는 2가지의 응력특이성이 있음을 의미한다.

4.2 응력강도계수의 수치해석 및 검토

3.2 절에서 설명한 선점법에 의한 응력강도계수의 수치해석법을 이용하여 응력강도계수에 해당하는 고유벡터 A 를 해석하고자 한다. 우선, 수치해석법 및 프로그램의 타당성을 검증하기 위하여 고유벡터 값을 임의로 정하여 광탄성 등색선 무늬를

Table 2 Data of points for the collocation method

NO.	Radius	Angle	Fringe number
1	0.2	-130.0	3.40753126
2	0.2	-140.0	2.87793970
3	0.2	-150.0	2.59108210
4	0.2	-160.0	2.66006732
5	0.2	-170.0	3.04375410
6	0.2	-180.0	3.59289694
7	0.1	10.0	19.72087097
8	0.1	20.0	19.87074661
9	0.1	30.0	20.90962601
10	0.1	40.0	22.56986046

Table 3 Convergence of eigenvectors by the collocation method

Number of Iteration	$(a')_1$	$(a')_2$
Initial value	0.45	0.40
1	0.83439988	0.70130765
2	0.75338733	0.60969770
3	0.75001228	0.60004771
4	0.75000042	0.59999681
5	0.75000060	0.59999603
Exact value	0.75	0.60

발생시키고 발생된 무늬에서 여러점들의 거리(r), 각도(θ), 차수(N)을 정하고 이것을 데이터로 해서, 역으로 임의로 정한 고유벡터를 찾아내는 지를 여러가지의 경우에 대해 확인하였다. 한 가지 예로, 이중재접합계면 문제로 노치각도가 $S_1=180^\circ$, $S_2=90^\circ$ 이고 1영역의 재료가 $E_1=200 \text{ Kg}_f/\text{mm}^2$, $\nu_1=0.34$, $\alpha_1=0.25 \text{ mm/Kg}_f$ 인 셀룰로이드(celluloid)와 2영역의 재료가 $E_2=302 \text{ Kg}_f/\text{mm}^2$, $\nu_2=0.4$, $\alpha_2=0.94 \text{ mm/Kg}_f$ 인 에폭시(epoxy)로 접합된 경우일 때 평면응력 상태의 고유치는 $P_1=0.52117$, $P_2=0.86718$ 로 구해지는데 응력특이성이 2가지가 되는 문제이다. 첫 번째 고유치 $P_1=0.52117$ 과 고유벡터 $(a')_1=0.75$, 두 번째 고유치 $P_2=0.86718$ 과 고유벡터 $(a')_2=0.6$, 시편두께를 3 mm로 하여 여러 점의 거리(r), 각도(θ)에 대한 광탄성 무늬차수(N)을 정하고 Table 2와 같이 데이터 수를 10개 정도로 하면 반복회수 10번 이내에 Table 3에서 보는 바와 같이 임의로 정한 고유벡터 $(a')_1=0.75$ 과 $(a')_2=0.6$ 에 수렴함을 알 수 있다. 그런데, 초기치의 선정에 따라서는 수렴이 되지 않는 경우도 있으며, 이것은 뉴턴-랩슨법에서 일반적으로 나타나는 성질이다.

이중재 접합계면 균열문제를 본 방법으로 응력강도계수를 구하고 기존의 결과와 비교하기 위하여 기존의 이중재 접합계면 균열문제에 사용된 응력확대계수(K_1 , K_2) (본 논문에서는 이 정의와 구분하기 위하여 응력강도계수라 하였음)와 고유벡터 A 와의 관계를 맺어 두어야 한다. 이중재 접합계면 균열문제에서는 첫 번째 고유치 $P_1=0.5 - i\varepsilon$ 이므로 첫 번째 고유치와 그에 해당하는 고유벡터를 이용한 응력장과 기존의 이중재 접합계면 균열문제의 응력장⁽⁹⁾을 같이 놓아 다음의 관계식을 얻을 수 있다.

$$K_1 = \sqrt{2\pi} (1 + e^{-2\pi\varepsilon}) [(0.5RA + \varepsilon IA) \cos\{\varepsilon \ln(2a)\} + (0.5IA - \varepsilon RA) \sin\{\varepsilon \ln(2a)\}]$$

$$K_2 = \sqrt{2\pi} (1 + e^{-2\pi\varepsilon}) [(0.5RA + \varepsilon IA) \sin\{\varepsilon \ln(2a)\} - (0.5IA - \varepsilon RA) \cos\{\varepsilon \ln(2a)\}] \quad (39)$$

여기서, $2a$ 는 균열길이이다. 식(39)는 고유치 $P = \xi - i\varepsilon$ 의 관계에서 $\xi=0.5$ 일 때이며, 그에 해당하는 고유벡터의 실수부를 RA , 허수부를 IA 로 한 것이고, 실수부 RA 와 허수부 IA 는 독립적이다. 등방균질재료의 균열문제가 되면 $\xi=0.5$, $\varepsilon=0$ 로 되므로 식(40)의 결과로 된다.

$$K_I = \sqrt{2\pi} RA$$

$$K_{II} = -\sqrt{2\pi} IA \quad (40)$$

이 결과는 문헌(7, 10)의 결과와 잘 일치한다.

Fig. 5와 같은 이중재 접합계면 편축균열문제를 경계요소법으로 응력해석하여 본 방법으로 응력강도계수를 구하고 기존의 결과와 비교하고자 한다. 두 재료를 같이 놓아 포와송 비 $\nu_1=\nu_2=0.3$, $E_1/E_2=1$ 인 등방재료의 편축균열문제를 본 방법으로 구한 결과와 기존의 결과⁽⁹⁾를 Table 4에 나타내었고, 두 결과가 거의 일치하고 있다.

그리고, 이방성 이중재료간 V-노치균열 문제의 응력강도계수를 본 방법을 이용하여 광탄성 실험으로 구할 수 있을 것으로 생각되며, 파괴법칙과 함께 차후의 연구과제로 삼을 예정이다.

4.3 광탄성 등색선 무늬의 컴퓨터 그래픽

광탄성 등색선 무늬를 컴퓨터 그래픽하기 위하여 복소응력함수를 M 번째까지의 고유치 합으로 하고 그에 따른 고유벡터 A 값을 임의로 정하여 노치선단에서의 거리(r), 각도(θ)가 정해지면 그 점의 광탄성 등색선 차수(N)를 계산한다. 그런데, 많은 점의 계산이 필요하므로 베이직(BASIC)언어를 사용하면 계산 시간이 많이 걸리게 되므로 본 논문에

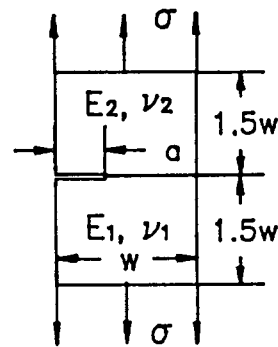


Fig. 5 A single-edge interface crack in a finite dissimilar plate under an uniform tension

Table 4 Comparison of stress intensity factors

($a/W=0.5$)	$K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$
Present method	2.83
Dis. ext. method ⁽⁹⁾	2.81

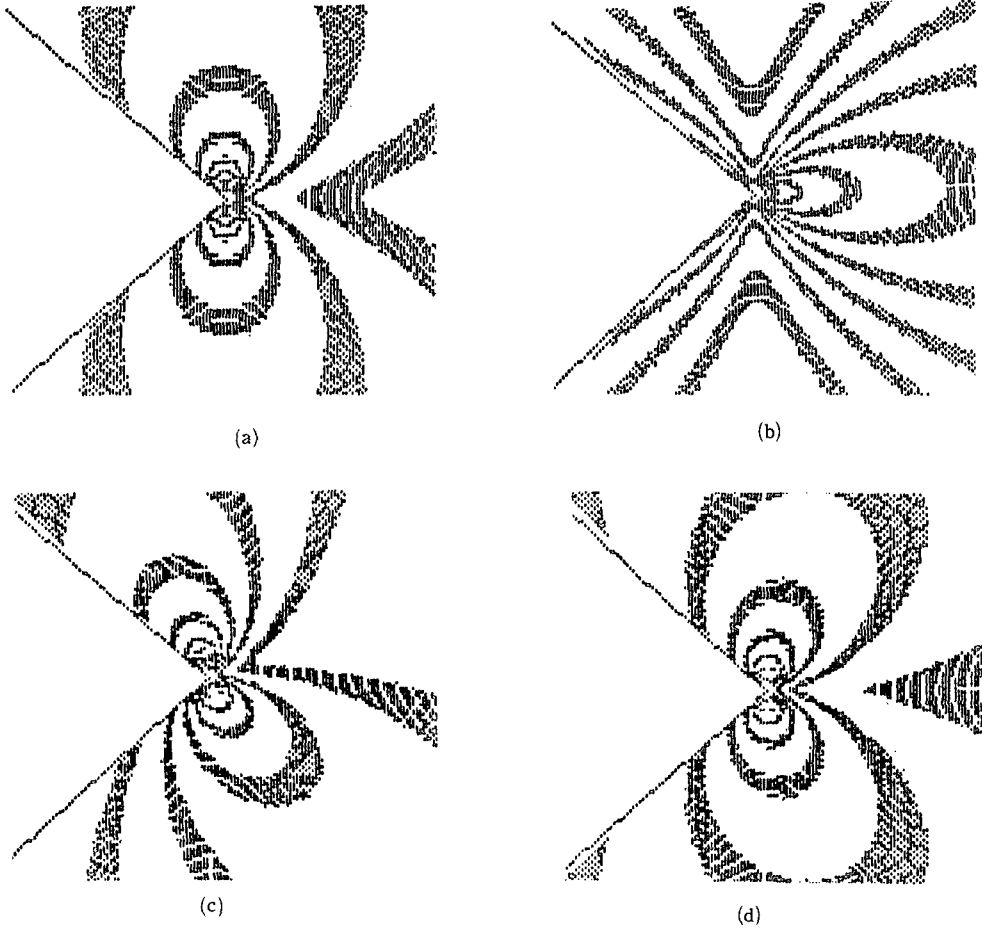


Fig. 6 Photoelastic isochromatic fringe patterns by computer graphics

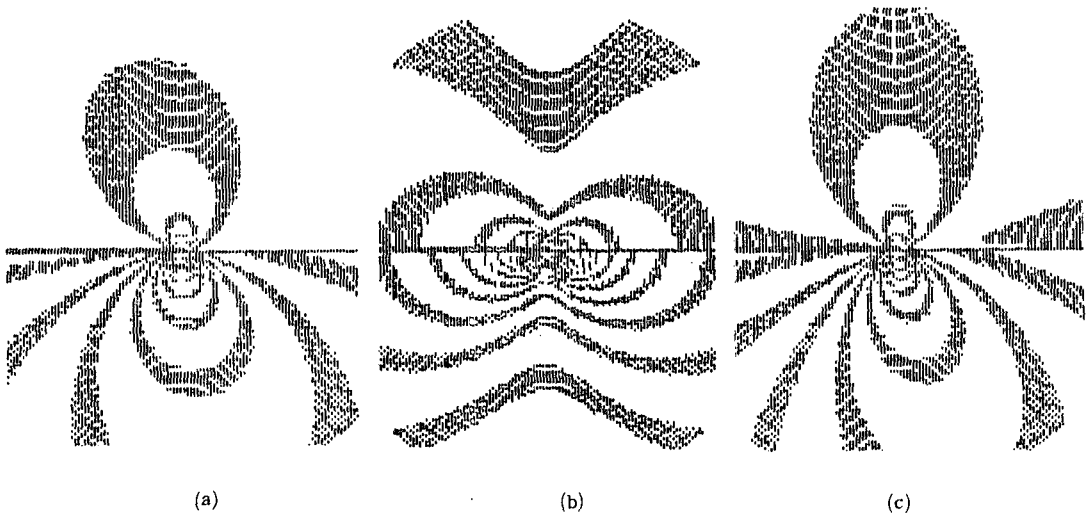


Fig. 7 Photoelastic isochromatic fringe patterns by computer graphics

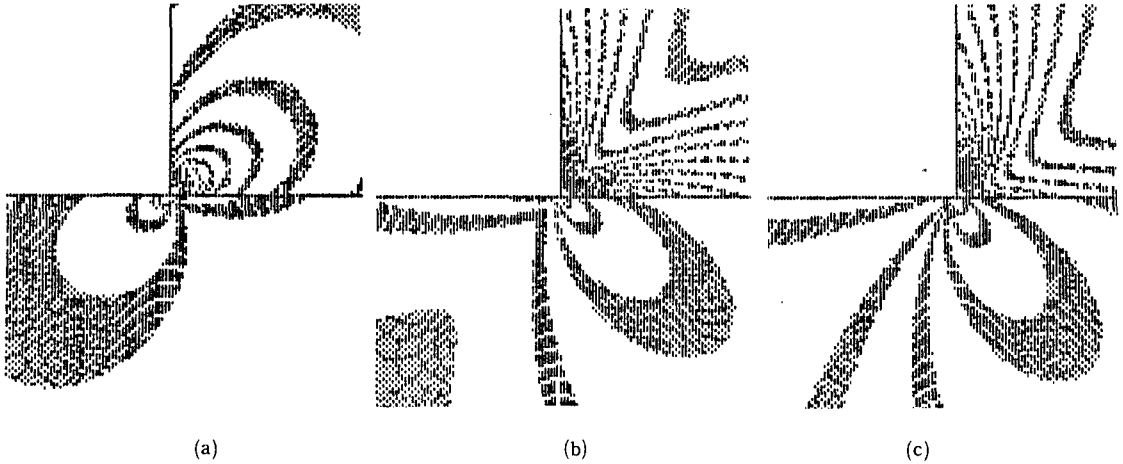


Fig. 8 Photoelastic isochromatic fringe patterns by computer graphics

서 포트란(FORTRAN) 언어를 사용하여 계산하고 그 결과 데이터를 받아서 베이직(BASIC)으로 광탄성 등색선 무늬를 컴퓨터 그래픽하였다. 그리고, 본 논문에서는 전 그래픽을 통하여 시편두께 t 는 3 mm로 하였고, 평면응력상태이다.

먼저, 등방균질재료, 영률 $E=302 \text{ Kg}_f/\text{mm}^2$, 포아손 비 $\nu=0.4$, 광탄성 감도 $\alpha=0.94 \text{ mm/Kg}_f$ 인 에폭시(epoxy)로 된 노치각도 $S_1=S_2=135^\circ$ 의 노치(notch)문제의 고유치는 $P_1=0.54448$, $P_2=0.90853$, $P_3=1.0$ 로 구해지는데 이 문제는 앞에서 지적인 바와 같이 응력특이성이 2가지가 되는 문제이다. Fig. 6의 그림(a)는 고유치 $P_1=0.54448$ 과 그에 해당하는 고유벡터 $(a')_1=0.6$ 으로 하여 그래픽한 것으로 모우드 I(opening mode)의 형태를 나타내고 있고, 그림(b)는 $P_2=0.90853$ 과 $(a')_2=5.0$ 로 하여 그래픽한 것으로 모우드 II(sliding mode)를 나타내고 있다. 이 성질은 문헌(8)의 결과와 잘 일치 한다. Fig. 6의 그림(c)는 $P_1=0.54448$ 과 $(a')_1=0.6$ 그리고, $P_2=0.90853$ 과 $(a')_2=0.6$ 으로 하여 그래픽한 결과이며 혼합 모우드가 됨을 알 수 있다. 그리고, Fig. 6의 그림(d)는 $P_1=0.54448$ 과 $(a')_1=0.6$ 그리고, $P_3=1.0$ 과 $(a')_3=-0.05$ 로 하여 그래픽한 것으로 3번째 고유치에 의해 무늬가 변형되는 모양을 보여 주고 있다.

이종재 접합계면 균열문제로 각도 $S_1=S_2=180^\circ$ 이고 1영역의 재료가 영률 $E_1=440 \text{ Kg}_f/\text{mm}^2$, 포아손 비 $\nu_1=0.35$, 광탄성 감도 $\alpha_1=0.66 \text{ mm/Kg}_f$ 인 백클레이트(Bakelite : BT-61-3893)로, 2영역의

재료가 $E_2=200 \text{ Kg}_f/\text{mm}^2$, $\nu_2=0.34$, $\alpha_2=0.25 \text{ mm/Kg}_f$ 인 셀룰로이드(celluloid)일 때 고유치는 $P_1=0.5+i0.0410$, $P_2=1.0$ 로 구해지고 응력특이성을 나타내는 고유치는 첫 번째 고유치(P_1)이다. Fig. 7의 그림(a)는 $P_1=0.5+i0.0410$ 로, 고유벡터 $(A_1)_1=1.0$ 로 광탄성 등색선 무늬를 그래픽한 것이고, 그림(b)는 $P_1=0.5+i0.0410$ 과 $(A_1)_1=i1.0$ 로 하여 그래픽한 것이다. Fig. 7의 (a)와 (b)의 결과는 고유벡터의 실수부가 모우드 I에 허수부가 모우드 II에 영향을 미치고 있음을 보여 주고 있다. 그리고, Fig. 7의 그림(c)는 $P_1=0.5+i0.0410$ 과 그에 해당하는 $(A_1)_1=1.0$ 그리고, $P_2=1.0$ 과 $(A_1)_2=-1.5$ 로 하여 그래픽한 것으로 두 번째 고유치에 의해 무늬가 변형되는 모양을 보여 주고 있다.

이종재 접합계면 문제로 노치각도가 $S_1=180^\circ$, $S_2=90^\circ$ 이고 1영역의 재료가 $E_1=200 \text{ Kg}_f/\text{mm}^2$, $\nu_1=0.34$, $\alpha_1=0.25 \text{ mm/Kg}_f$ 인 셀룰로이드(celluloid)와 2영역의 재료가 $E_2=302 \text{ Kg}_f/\text{mm}^2$, $\nu_2=0.4$, $\alpha_2=0.94 \text{ mm/Kg}_f$ 인 에폭시(epoxy)로 접합된 경우일 때의 문제로 고유치는 $P_1=0.52117$, $P_2=0.86718$ 로 구해지는데 응력특이성이 2가지가 되는 문제이다. Fig. 8의 그림(a)는 $P_1=0.52117$ 과 고유벡터 $(a')_1=0.75$ 로 광탄성 등색선 무늬를 그래픽한 것으로 모우드 I의 형태를 나타내고 있고, 그림(b)는 $P_2=0.86718$ 과 $(a')_2=0.6$ 로 하여 그래픽한 것으로 모우드 II의 형태를 나타내고 있다. 그림(c)는 $P_1=0.52117$ 과 고유벡터 $(a')_1=0.75$, $P_2=0.86718$ 과

$(\alpha')_2=0.6$ 로 하여 즉, 4.2 절에서 선점법에 의한 고유벡터의 수렴성에 대하여 고찰한 문제를 그래픽한 것으로 혼합 모우드의 형태를 나타내고 있다.

5. 결 론

이종재료간 V-노치균열의 노치각도 및 재료의 종류에 따른 응력특이성지수와 응력강도계수를 각각 뉴턴-랩슨법, 뉴턴-랩슨법과 최소자승법을 이용한 선점법으로 수치해석적으로 계산하고, 광탄성 등색선 무늬를 컴퓨터 그래픽하여 응력특이성지수와 응력강도계수가 모우드(mode)에 미치는 특성과 경계요소법(boundary element method)으로 응력 해석한 결과로써 선점법을 이용하여 응력강도계수를 해석한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 이종재료간 V-노치균열의 노치각도 및 재료의 종류에 따른 응력특이성지수와 응력강도계수를 각각 뉴턴-랩슨법, 뉴턴-랩슨법과 최소자승법을 이용한 선점법으로 해석할 수 있음을 확인하였다.

(2) 이종재료간 V-노치균열의 노치각도 및 재료의 종류에 따라 응력특이성이 실수이며 2가지 이상인 경우가 있고, 첫 번째 특이성은 모우드 I (opening mode)에, 두 번째 특이성은 모우드 II (sliding mode)에 영향을 미치고 있다. 또한, 응력특이성이 복소수로 이종재 접합계면 균열과 같이 진동특이성의 경우는 고유벡터의 실수부가 모우드 I 에, 허수부가 모우드 II 에 영향을 미치고 있음을 알았다.

(3) 이종재료간 V-노치균열 문제에 대한 파괴법칙은 응력특이성 -0.5 로 한 가지인 균열문제와는 다른 즉, 균열에 대한 파괴법칙을 포함하는 새로운 통합된 파괴법칙이 요구되어 진다.

참고문헌

- (1) Rice, J.R., 1988, "Elastic Fracture Concepts for Interfacial Cracks," J. of Appl. Mechanics, Vol. 55, pp. 98~103.
- (2) Hein, V.L. and Erdogan, F., 1971, "Stress Singularities in a Two-Material Wedge," Int. J. of Fracture, Vol. 7-3, pp. 317~330.
- (3) Sanford, R.J. and Dally, J.W., 1978, "Stress Intensity Factors in the Third-Stage Fan Disk of the Tf-30 Turbine Engine," Naval Research Laboratory Report 8202.
- (4) Sanford, R.J. and Kirk, M.T., 1991, "A Comparison of Boundary and Global Collocation Solution for K_I and C_{mod} Calibration Functions," Experimental Mechanics, Vol. 31-1, pp. 52~59.
- (5) Carpenter, W.C. and Byers, C., 1987, "A Path Independent Integral for Computing Stress Intensities for V-Notched Cracks in a Bi-Material," Int. J. of Fracture, Vol. 35, pp. 245~268.
- (6) Bogy, D.B., 1971, "Two Edge-Bonded Elastic Wedges of Different Materials and Wedge Angles under Surface tractions," J. of App. Mechanics, Vol. 38, pp. 377~386.
- (7) Carpenter, W.C., 1984, "Mode I and Mode II Stress for Plates With Cracks of Finite Opening," Int. J. of Fracture, pp. 201~214.
- (8) 岡村弘之, 1985, "強度解析學(I)", "オーム社."
- (9) Yuuki, R. and Cho, S.B., 1989, "Efficient Boundary Element Analysis of Stress Intensity Factors for Interface Cracks in Dissimilar Materials," Engng. Fracture Mech., Vol. 34, pp. 179~188.
- (10) 岡村弘之, 1976, "線形破壊力學入門," 培風館.

- (1) Rice, J.R., 1988, "Elastic Fracture Concepts for