

(論 文)

# 터빈 익렬내부의 3차원 압축성 점성유동장의 수치해석

정희택\* · 백제현\*\*

(1991년 12월 12일 접수)

## Numerical Analysis of Three-Dimensional Compressible Viscous Flow Field in Turbine Cascades

Hee-Taeg Chung and Je-Hyun Baek

**Key Words :** Cascade(익렬), Transonic Flow(천음속 유동), LU-ADI Scheme(LU-ADI기법), Navier-Stokes Equations(나비에 스톱스 방정식), Turbomachinery(유체기계), Viscous Flowfields(점성유동장), Thin Layer Approximation(박층가정), Secondary Flow(2차 유동), Endwall Effect(벽면효과)

### Abstract

A three-dimensional Navier-Stokes code has been developed for analysis of viscous flows through turbomachinery blade rows or other internal passages. The Navier-Stokes equations are written in a cartesian coordinate system, then mapped to a general body-fitted coordinate system. Streamwise viscous terms are neglected and turbulent effects are modeled using the Baldwin-Lomax model. Equations are discretized using finite difference method on the stacked C-type grids and solved using LU-ADI decomposition scheme. Calculations are made for a two-dimensional cascade in a transonic wind-tunnel to see the influence of the endwalls. The flow pattern of the three-dimensional flow near the endwall is found to be different from that of the two-dimensional flow due to the existence of the endwalls.

### 1. 서 론

유체기계 익렬유동의 해석은 유체기계의 성능과 효율을 예측하고 향상시키는데 중요하다. 내부유동의 해석은 전산응용설계의 기초단계이며, 기존의 실험 및 설계자료의 평가와 설계효과 검토에 빈번히 이용되고 있다. 특히, 항공기의 터보팬 엔진의 경우, 점점 고속화, 경량화 됨에 따라 가스터빈의 단당 결리는 하중이 커지고, 터빈 날개에는 높은 마하수를 가지는 유동이 형성된다. 최적설계조건으로, 터빈 날개 형상이 복잡해지고, 러어

브 등이 작아지며, 유속이 커지므로, 점성효과를 고려한 3차원 압축성 유동해석이 필요하다. 즉, 공기역학적인 제반 손실들은 날개표면, 허어브 및 케이싱 벽면의 점성 경계층, 익렬 후위의 2차유동, 충격파와 경계층의 상호작용, 익렬끝 간격에서 발생하는 누설유동 등과 같은 3차원 점성유동현상과 밀접한 관련이 있으므로, 압축성 Navier-Stokes 방정식을 이용한 3차원 유동해석이 유체기계 설계에 요구되고 있다.

익렬유동에 관한 실험은 대부분 2차원 유동에 관한 것이고, 수치해석은 2차원 또는 비점성에 관한 것이 주류를 이루고 있다. 2차원 해석은 실제 유동장을 단순화시키지만, 설계자료 및 주요현상에 관해서 많은 정보를 제공하고 있으므로 현재에도 많

\*정희원, 포항공과대학 대학원

\*\*정희원, 포항공과대학 기계공학과

이 이용되고 있다. Davis<sup>(1)</sup> 등은 외재적 알고리즘을 이용하여 2차원 Navier-Stokes 방정식을 통한 익렬유동을 해석하여, 유동박리가 발생하는 터빈 익렬유동에서 Euler수치해와 실험결과와의 차이를 해석하였다. Bassi 등<sup>(2)</sup>은 선형 천음속 터빈 익렬 유동장 해석을 차원 Euler방정식을 사용하여 수치해석하고, 실험결과와 비교하여 3차원 비점성 유동장에서의 이차유동(secondary flow)을 해석하였다.

최근에는 계산기의 급속한 능력향상으로 3차원 점성유동해석이 활발히 진행되고 있다. Hah<sup>(3)</sup>는 보존체적기법과  $k-\epsilon$  난류모델을 사용하여 큰 박리 유동이 일어나는 3차원 난류유동을 저음속 익렬유동장에 적용하였으며, Jameson의 다단계 시간 적분법<sup>(4)</sup>에 점성항을 첨가한, 3차원 압축성 Navier-Stokes 방정식에 의한 내부유동 해석방법이 Daws,<sup>(5)</sup> Subramania<sup>(6)</sup>와 Chimma<sup>(7)</sup>등에 의해 활발히 연구되고 있다. Denton<sup>(8)</sup>은 비점성 모델에 단순화한 점성효과를 첨가한 기법을 개발하여 3차원 점성 유동해석을 하였다. Knight와 Choi<sup>(9)</sup>는 내재 수치기법과  $q-\omega$  난류모델을 사용한 3차원 점성 익렬 코드를 개발하였다. Rai<sup>(10)</sup>는 정익과 동익의 날개 개수가 같은 단순화한 경우에, 박층 Navier-Stokes 방정식을 이용하여 3차원 비정상 점성 유동장을 해석하였다. 유체기계 내부의 복잡한 3차원 유동의 수치적 연구는 활발히 진행되고 있지만, 난류모델의 선정, 회전에 의한 유동특성의 가정, 충격파 및 경계층의 특성길이 등 많은 부분에서 아직 확립된 이론이 없는 실정이다.

본 연구에서는 3차원 압축성 내부유동해석 코드를 개발하여 터빈 정익이나 동익 내부의 차원 익렬 유동을 수치적으로 해석하고자 한다. 여기에서 사용된 코드는 Obyashi의 LU-ADI기법<sup>(11)</sup>을 이용한 기존의 2차원 익렬 유동해석 코드<sup>(12)</sup>를 3차원 유동장으로 확장한 것이고, 난류유동해석에는, Baldwin-Lomax의 박층 대수모델<sup>(13)</sup>을 3차원으로

확장한 알고리즘<sup>(14)</sup>을 적용하였다. Kiock<sup>(15)</sup>등이 실험한 선형 터빈 익렬 내부의 천음속 유동장에 적용하여 양끝 벽면에 의한 3차원 유동장 특성을 분석하고, 3차원 익렬 유동 코드의 적합성을 검토하였다.

## 2. 지배방정식 및 수치기법

### 2.1 지배방정식

레이놀즈수가 큰 유동에서는, 점성효과가 벽면 부근의 박층에 국한되고, 유동방향을 따른 응력구배는 수직방향의 구배에 비해서, 무시될 수 있으므로, 박층 점성모델에 의해 유동방향을 점성항은 무시된다. 따라서, 직교좌표계에서 일반좌표계로 변환된 3차원 Navier-Stokes 방정식을 박층 점성모델의 가정하에 무차원화하여 표시하면 다음과 같다.

$$\hat{U}_t + \hat{E}_t + \hat{F}_\eta + \hat{G}_\zeta = (\hat{S}_\eta + \hat{S}_\zeta) / Re \quad (1)$$

여기서, Re는 익렬 입구의 음속으로 무차원화 된 레이놀즈수이고, 유동변수 및 대류 flux 벡터는 아래와 같다.

$$\hat{U} = J^{-1} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ e \end{bmatrix} \quad \hat{E} = J^{-1} \begin{bmatrix} \rho U \\ \rho u U + \xi_x p \\ \rho v U + \xi_y p \\ \rho w U + \xi_z p \\ (e + p) U - \xi_t p \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\hat{F} = J^{-1} \begin{bmatrix} \rho V \\ \rho u V + \eta_x p \\ \rho v V + \eta_y p \\ \rho w V + \eta_z p \\ (e + p) V - \eta_t p \end{bmatrix} \quad \hat{G} = J^{-1} \begin{bmatrix} \rho W \\ \rho u W + \zeta_x p \\ \rho v W + \zeta_y p \\ \rho w W + \zeta_z p \\ (e + p) W - \zeta_t p \end{bmatrix}$$

그의 점성 flux 벡터는 다음과 같이 표시된다.

$$\hat{S}_z = J^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \mu(\eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2) u_\eta + (\mu/3)(\eta_x u_\eta + \eta_y v_\eta + \eta_z w_\eta) \eta_x \\ \mu(\eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2) v_\eta + (\mu/3)(\eta_x u_\eta + \eta_y v_\eta + \eta_z w_\eta) \eta_y \\ \mu(\eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2) w_\eta + (\mu/3)(\eta_x u_\eta + \eta_y v_\eta + \eta_z w_\eta) \eta_z \\ [(\eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2) \{0.5\mu(u^2 + v^2 + w^2)_\eta + \kappa Pr^{-1}(\gamma - 1)^{-1}(a^2)_\eta\} \\ + (\mu/3)(\eta_x u + \eta_y v + \eta_z w)(\eta_x u_\eta + \eta_y v_\eta + \eta_z w_\eta)] \end{bmatrix}$$

$$\hat{S}_3 = J^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \mu(\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2) u_\zeta + (\mu/3)(\xi_x u_\zeta + \xi_y v_\zeta + \xi_z w_\zeta) \xi_x \\ \mu(\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2) v_\zeta + (\mu/3)(\xi_x u_\zeta + \xi_y v_\zeta + \xi_z w_\zeta) \xi_y \\ \mu(\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2) w_\zeta + (\mu/3)(\xi_x u_\zeta + \xi_y v_\zeta + \xi_z w_\zeta) \xi_z \\ [(\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2)\{0.5\mu(u^2 + v^2 + w^2)_\zeta + \kappa Pr^{-1}(\gamma - 1)^{-1}(a^2)_\zeta\} \\ + (\mu/3)(\xi_x u + \xi_y v + \xi_z w)(\xi_x u_\eta + \xi_y v_\zeta + \xi_z w_\zeta)] \end{bmatrix} \quad (3)$$

여기서, 유효점성계수  $\mu$ 는,  $\mu = \mu_{turb} + \mu_{lam}$ 이고, 난류점성계수  $\mu_{turb}$ 는 2.2절의 난류 모델에 의해 구해지며, 층류점성계수  $\mu_{lam}$ 는 Southerland 법칙으로 표현된다. 반변속도성분  $U, V, W$ 는 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} U &= \xi_x u + \xi_y v + \xi_z w \\ V &= \eta_x u + \eta_y v + \eta_z w \\ W &= \zeta_x u + \zeta_y v + \zeta_z w \end{aligned} \quad (4)$$

이상기체 상태 방정식으로부터 압력은,

$$p = (\gamma - 1) [e - \rho(u^2 + v^2 + w^2)/2] \quad (5)$$

로 표시된다.

좌표변환 관계는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{bmatrix} \xi_x & \eta_x & \zeta_x \\ \xi_y & \eta_y & \zeta_y \\ \xi_z & \eta_z & \zeta_z \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta & y_\zeta z_\xi - y_\xi z_\zeta & y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi \\ x_\zeta z_\eta - x_\eta z_\zeta & x_\xi z_\zeta - x_\zeta z_\xi & x_\eta z_\xi - x_\xi z_\eta \\ x_\eta y_\zeta - x_\zeta y_\eta & x_\zeta y_\xi - x_\xi y_\zeta & x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi \end{bmatrix} \quad (6)$$

여기에서,

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\zeta \\ y_\xi & y_\eta & y_\zeta \\ z_\xi & z_\eta & z_\zeta \end{bmatrix}$$

### 2.2 난류모델

3차원 난류유동장 해석에 있어서는, Baldwin과 Lomax의 2차원 박층대수 모델<sup>(13)</sup>을 3차원 유동장에 응용한 Hung과 Buning의 모델<sup>(14)</sup>을 적용하였다. 이 모델을 설명하면 다음과 같다.

3차원 익렬유동에서는 익렬표면 ( $\zeta=0$ )과 벽면 ( $\eta=0$  or  $\eta_{max}$ ) 부근에 각각의 경계층이 존재하고,

이들이 교차하는 구석 부근에서는 상호작용을 하게 되어 특성길이 변화하게 된다. 따라서, 이 벽면 길이에 Buleer길이척도<sup>(16)</sup>를 도입하여 다음과 같이 정의하였다.

$$d = \frac{2s_\eta s_\zeta}{s_\eta + s_\zeta + (s_\eta^2 + s_\zeta^2)^{1/2}} \quad (7)$$

여기서  $s_\eta, s_\zeta$ 는  $\eta, \zeta$  방향의 수직거리이다. 이 식에 의하면, 벽면길이는 한쪽면에서 멀어지면 다른쪽면으로부터의 거리로 접근하게 된다. 즉,  $s_\eta/s_\zeta$ 가 커지면, 길이척도,  $d$ 는  $s_\zeta$ 에 접근하고,  $s_\zeta/s_\eta$ 가 커지면, 길이척도,  $d$ 는  $s_\eta$ 에 접근한다.

$\eta, \zeta$  각 방향의 난류점성계수는 Baldwin-Lomax의 2차원 모델<sup>(13)</sup>로 구하며, 유효 난류점성계수는 이들  $\eta, \zeta$  각 방향의 난류점성계수의 벡터합을 취한다. 즉,

$$\mu_{turb} = \sqrt{\mu_{t,\eta}^2 + \mu_{t,\zeta}^2} \quad (8)$$

따라서, 이 모델을 사용하면, 어느 한 점성 경계층을 벗어난 지역에서의 난류항은 나머지 점성 경계층의 난류계수로만 표시되고, 양 벽면이 만나는 구석 부근에서는 2개의 점성 경계층에 의한 난류영향이 모두 고려된다.

### 2.3 경계조건

Fig. 1과 같이 정의되는 3차원 익렬 유동장에서는 4가지 경계조건이 적용된다. 익렬입구(A-A'면)에서의 유입류 조건, 날개표면(C-D면) 및 양끝면(A-B, A'-B')에서의 벽면조건, 출구(B-B'면)에서의 유출류 조건과 주기조건(B-D, A-B면)으로 주어진다.

유입면은 경계층 내부와 경계층 외부로 나눌 수 있다. 경계층 외부는 비점성 영역이므로 Euler 방정식과 같이 유동 특성곡선법을 이용한다. 즉, 총엔탈피, 엔트로피 및 2개의 유동각이 주어지고, 내부의 Riemann invariant를 사용하면 된다. 이를 수식으로 표시하면,

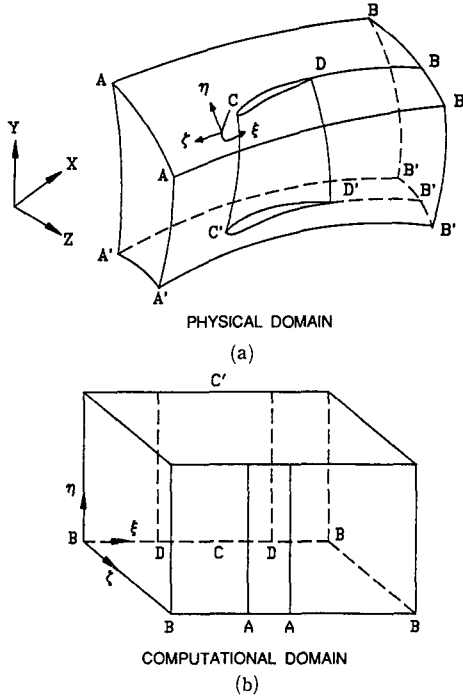


Fig. 1 Coordinate system of 3-D cascade flow

$$\begin{aligned}
 \frac{q^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma-1} &= H_1 \\
 q_n - \frac{2c}{\gamma-1} &= q_{n,e} - \frac{2c_e}{\gamma-1} \\
 q_{t,\beta} &= q_n \tan \beta \\
 q_{t,r} &= q_m \tan \gamma \\
 \rho &= \left( \frac{c^2}{\gamma S_1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (9)
 \end{aligned}$$

여기에서 1은 주어진 값,  $e$ 는 내부값이고,  $s=p/\rho^2$ 로 정의된다.  $H$ 는 총 엔탈피이고,  $q$ 는 접선속도  $q_t$ , 수직속도  $q_n$ 의 벡터합인 총 속도이다.  $\beta$ 는  $x$ - $z$ 면에서의 유동각이고,  $\gamma$ 는  $x$ - $z$ 면과 입구유동이 이루는 각이다. 경계층 내부( $p_i/p_{i,1} < 1$ , 또는  $\eta < \delta$ )에서는, 실험 등에 의해 경계층 두께와 경계층 내부의 속도분포를 결정하고, 식(9)에 의해 구해진 외부경계( $\eta = \delta$ )에서의 값을 이용하여, 유동변수를 구한다.

유출면에서는 출구 정압이 주어지고, 나머지 변수( $\rho, \rho u, \rho v, \rho w$ )는 내부로부터 외삽하여 구한다.

익렬 표면과 끝벽면에서는 no-slip 조건을 적용하고, 다음과 같은 수직 운동량 방정식으로부터 표면압력을 계산할 수 있다. 즉, 익렬표면( $\zeta=0$ )의

경우, no-flux조건에서  $W=0$ 가 되므로 표면압력에 관한 식은,

$$\begin{aligned}
 &(\zeta_x \xi_x + \zeta_y \xi_y + \zeta_z \xi_z) p_\xi + (\zeta_x \eta_x + \zeta_y \eta_y \\
 &+ \zeta_z \eta_z) p_\eta + (\zeta_x^2 + \zeta_y^2 + \zeta_z^2) p_\zeta \\
 &= -\rho [U(\zeta_x u_\xi + \zeta_y v_\xi + \zeta_z w_\xi) \\
 &+ V(\zeta_x u_\eta + \zeta_y v_\eta + \zeta_z w_\eta)] \\
 &= 0 \quad (10)
 \end{aligned}$$

과 같다.

### 2.4 수치기법

식(1)과 같은 유동 방정식의 수치해를 구하는 기법에는 외재기법과 내재기법으로 나눌 수 있다. 외재기법은 매 step 당 계산 시간이 적게 소요되고, 프로그램이 용이하다는 장점이 있으나, Courant-Friedrichs-Lewy의 제한조건(CFL 수)에 의해 시간 간격의 제약이 따른다. 본 연구와 같이 점성 유동장의 수치해석에서는, 경계층 내부의 격자 간격이 좁으므로, 반복 계산이 적게 요구되는 내재적 수치기법을 사용하여 정상상태의 수렴해를 구하였다. Beam-Warming의 delta형 알고리즘<sup>(17,18)</sup>은 대표적인 내재기법으로 알려져 있다. 이 기법으로는, 내재항에 있는 ADI 연산자의 block tridiagonal matrix의 역산에 대부분의 계산 시간이 소요되며, 큰 기억 용량이 필요하다. 이러한 문제를 해결하는 방법의 하나로, 기존의 Beam-Warming의 delta형 알고리즘과 동일한 안정성과 정확도를 가지면서, 계산량이 적게 요구되는 기법이 LU-ADI 기법이라는 이름으로 Obayashi<sup>(11)</sup> 등에 의해 개발되었다. 이 기법의 특징은, 각 ADI 연산자를 lower와 upper bidiagonal matrix로 LU 분해하여, 좌변의 block tridiagonal inversion의 계산시간을 단축시킬 수 있다. 우변의 외재항은 Beam-Warming 방법과 같이 중앙차분한다. 본 논문의 저자들은 이 방법을 이용하여 2차원 익렬 유동해석에 적용하였으며,<sup>(12)</sup> 본 논문에서는 이를 3차원 익렬 유동장으로 확장하였다.

확장된 LU-ADI 수치기법을 3차원 Navier-Stokes 방정식(1)에 적용하여 유한차분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 &(I + h\delta_\xi \hat{A}^n - \epsilon J^{-1} \delta_\xi^2 J)(I + h\delta_\eta \hat{B}^n \\
 &- hRe^{-1} \delta_\eta \hat{M}^n - \epsilon J^{-1} \delta_\eta^2 J)(I + h\delta_\zeta \hat{C}^n \\
 &- hRe^{-1} \delta_\zeta \hat{N}^n - \epsilon J^{-1} \delta_\zeta^2 J) \Delta \hat{U}^n \\
 &= -h\{\delta_\xi \hat{E}^n + \delta_\eta (\hat{F}^n - \hat{S}_\eta^2 / Re) + \delta_\zeta (\hat{G}^n \\
 &- \hat{S}_\zeta^2 / Re) - (D_{e1\xi} + D_{e1\eta} + D_{e1\zeta}) J \hat{U}^n \quad (11)
 \end{aligned}$$

여기서,  $\Delta \hat{U}^n = \hat{U}^{n+1} - \hat{U}^n$ 이고, Jacobian matrix  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ 는,

$$\hat{A} = \partial \hat{E} / \partial \hat{U}, \hat{B} = \partial \hat{F} / \partial \hat{U}, \hat{C} = \partial \hat{G} / \partial \hat{U}$$

로 정의된다.  $h$ 는 시간간격이고,  $\hat{M}, \hat{N}$ 은 점성 flux 항인  $\hat{S}_2, \hat{S}_3$ 의 국부 시간선형화에 의해 도출된 내재 점성항이다.

ADI operator는 diagonal 형태로 차분된다. 즉,  $\xi$  방향의 경우,  $\hat{A} = T_\xi \hat{D}_A T_\xi^{-1}$ 를 이용하면,

$$I + h \delta_\xi \hat{A} + J^{-1} \varepsilon_i \delta_\xi^2 J \\ = T_\xi [I + h \delta_\xi \hat{D}_A + J^{-1} \varepsilon_i \delta_\xi^2 J] T_\xi^{-1} \quad (12)$$

로 표시된다. 여기서,

$$\hat{D}_A = \text{diag}(U, U, U, U + \text{ar}_\xi, U - \text{ar}_\xi) \\ r_i^2 = \xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2$$

로 정의된다. Flux-vector분해기법을 사용하면, 중앙차분항은 일방차분항으로 분해된다. 즉,  $\hat{D}_A$ 항은

$$\hat{D}_A = h/2 [\hat{D}_A^+ \pm \hat{D}_A^- \pm J^{-1} \varepsilon_i J]$$

로 분해되므로, 식(12)는,

$$\text{Eqn. (12)} = T_\xi [I + \nabla_\xi \hat{D}_A^+ + \Delta_\xi \hat{D}_A^-] T_\xi^{-21} \quad (13)$$

가 된다. 3점 상향차분기법(three-point upwind differencing)을 사용하면

$$\text{Eqn. (13)} = T_\xi [L_A + M_A + N_A] T_\xi^{-1} \quad (14)$$

여기서,

$$L_A = 8/6 \hat{D}_{A_{i-1}}^+ + 1/6 \hat{D}_{A_{i-2}}^+ \\ M_A = I + 7/6 (\hat{D}_{A_i}^- - \hat{D}_{A_i}^+) \\ N_A = 8/6 \hat{D}_{A_{i+1}}^- + 1/6 \hat{D}_{A_{i+2}}^-$$

$M_A = O(1)$ ,  $L_A = O(h) = N_A$ 로 diagonal dominant하므로 근사인자분해기법,

$$L_A + M_A + N_A = (L_A + M_A) M_A^{-1} (M_A + N_A) + O(h^2)$$

를 적용하면,  $\xi$  방향의 좌변 ADI operator항은 다음과 같이 LU-ADI 근사인수분해 된다.

$$I + h \delta_\xi \hat{A} + J^{-1} \varepsilon_i \delta_\xi^2 J \\ = T_\xi [(L_A + M_A) M_A^{-1} (M_A + N_A)] T_\xi^{-1} \quad (15)$$

박층 점성항의 안정성을 고려하여, Jacobian matrices  $\hat{B}, \hat{C}$ 는  $\hat{B}^\ddagger, \hat{C}^\ddagger$ 로 변형된다. 즉,

$$\hat{B}^\ddagger = T_\eta (\hat{D}_B^\ddagger \pm \nu_B I) T_\eta^{-1} \\ \hat{C}^\ddagger = T_\zeta (\hat{D}_C^\ddagger \pm \nu_C I) T_\zeta^{-1} \quad (16)$$

여기서,  $\nu_B = 2\mu r_\eta^2 / (Re \rho \Delta \eta)$ ,  $\nu_C = 2\mu r_\zeta^2 / (Re \rho \Delta \zeta)$  있

다.

최종적으로 식(11)는 다음과 같이 변형된다.

$$T_\xi (L_A + M_A) M_A^{-1} (M_A + N_A) \\ (T_\xi^{-1} T_\eta) (L_B + M_A) \\ M_B^{-1} (M_B + N_B) (T_\eta^{-1} T_\zeta) (L_C + M_C) M_C^{-1} \\ (M_C + N_C) T_\zeta^{-1} \Delta \hat{U}^n \\ = \text{RHS of Eqn. (11)} \quad (17)$$

식(17)은 식(11)의 좌변인 block tridiagonal inversion matrix가 scalar bidiagonal 형태로 변형 되었으므로, 기억용량이 감소되고, 계산시간도 적게 소요된다.

## 2.5 인공점성 모델

유동변화가 큰 충격파 부근의 수치적 불안정성을 제거하기 위해 인공점성항을 추가하여야 한다. 본 연구에서는 대류항의 고차 상향차분의 수치기법에 사용된 fluxlimiter 개념<sup>(19)</sup>을 인공점성 모델에 도입하여<sup>(11,12)</sup> 식(11)의 인공점성항을 처리하였다.

본 연구에 사용된 flux limiter,  $\phi$ 는,

$$\phi = \frac{r_i + |r_i|}{1 + |r_i|} \quad (18)$$

이고,  $r_i$ 는 유동변수( $J\hat{U}$ )인  $q_i$ 를 이용하여, 다음과 같이 정의된다.

$$r_i = (q_i - q_{i-1}) / (q_{i+1} - q_i) \text{ for } q_i > 0 \\ (q_{i+1} - q_i) / (q_i - q_{i-1}) \text{ for } q_i < 0$$

따라서, 식(11)의 우변에 있는 인공점성항에 적용하면,

$$D|_\xi = \nabla (\delta J_{i+1/2}^{-1}) [(I - \phi_{i+1/2}) \varepsilon_2 \Delta_\xi U \\ - \phi_{i+1/2} \varepsilon_4 \Delta_\xi \nabla_\xi \Delta_\xi U] \quad (19)$$

로 표시되고, 인공점성계수  $\varepsilon_2, \varepsilon_4$ 는 유동에 맞는 적절한 값을 찾아낸다. 대체로 안정적인 수치는,  $\varepsilon_2$ 와  $\varepsilon_4$ 의 비가 약 4이고,  $\varepsilon_4$ 는 0.02이었다. 좌변의 인공점성계수,  $\varepsilon_i$ 는  $\varepsilon_4$ 와 같은 값을 취하였다.

## 2.6 계산 격자점

익렬유동의 수치해석에 사용되는 격자계는 C-형, O-형 및 H-형의 3가지 기본 형태가 있다. 이중 O-형은 블레이드 표면에서 격자가 형성되므로, 익렬 내부의 유동해석에는 유리하나, 익렬 후류에 무관하게 격자가 분포되어, 후류의 복잡한 점성유동해석에는 부적당하다. 익렬의 점성유동해석에는 주로

C-형 또는 H-형이 사용되고 있다. H-형은 주유동을 따라 격자가 형성되고, C-형의 주기경계(periodic boundary)가 없으므로, 격자형성과 경계조건 처리가 C-형보다 비교적 용이하다. 그러나, 터빈의 등익과 같이 선단(leading edge)이 둥글고, 유동각이 큰 유동의 경우에는, 선단 부근의 격자가 심하게 비틀리고, 선단의 branch-cut 처리가 어렵다. 이런 유동장에 H-형 격자계를 적용하면, 선단 부근에서 수치해가 불안정해진다. 3차원 터빈 익렬 유동장의 경우, 말굽와류(horseshoe vortex)는 주요 유동현상의 하나로, 유동박리가 일어나므로 주유동 방향의 점성 영향이 중요하다. Fig. 2에 나타난 바와 같이, H-형 격자와 달리, C-형 격자에서는 말굽와류가 발생하는 단면에서는 주유동 방향이  $\xi$  방향과 거의 일치하므로, 2방향 박층모델 방정식에서 무시된  $\xi$  방향의 점성 영향이, H-형의 경우보다, 작으리라 생각된다. 이러한 이유로, 본 연구에서는 C-형 격자계를 채택하였다.

격자 형성법에는 복소함수법과 대수격자형성법, 미분방정식을 이용한 격자형성법의 3가지로 나누어진다. 이들 방법 중에서, Poisson 방정식을 이용한 격자계 형성법은 물리영역에서의 계산격자점들이 Poisson 방정식으로 이루어진 격자형성의 해로서 구해지는 방법인데, 다른 방법에 비하여 계산시간은 다소 많이 걸리지만, 이 방법에 의해 형성된 격자계가 가지는 강한 완만성(smoothness)과 표면 격자의 불연속이 내부로 전파되지 않는 장점이 있어서, 유체기계 익렬과 같은 복잡한 물체주변의 점성유동해석에 편리하다. 본 연구에서 사용한 GRAPE 알고리즘<sup>(20)</sup>은 미분방정식 방법으로, Poisson 방정식에 경계조건으로 표면수직조건과 길이

를 첨가하여 생성함을 자동적으로 구할 수 있다. 익렬형상이 반경방향 또는 높이방향( $\eta$ )으로 변화가 없으므로, 2차원 격자를  $\xi$ - $\xi$  평면에서 형성하여 높이방향으로 쌓아두면 된다.

### 3. 수치해석 결과

터빈 익렬 내의 유동에서 발생하는 중요한 3차원 유동현상으로는, 끝벽면(endwall)에서 성장한 입구 층계층 유동이 익형 선단에 부딪혀서 발생하는 말굽와류(horseshoe vortex)와, 익형 사이의 통로를 따라 유선이 휘어져 생성되는, 2차 순환류인 통과와류(passage vortex)가 있다. 그리고, 블레이드에 부하가 많이 걸리고 유동각이 큰 경우에는, 끝벽면과 블레이드 부압면 구성에서 통과와류에 대응하여 반대방향으로 크기가 작은 구석와류(corner vortex)가 발생하며, 이에 따라서 끝벽면의 경계층이 뒤집히며(overturing), 블레이드의 부압면에 저속의 점성유동이 밀집되는(accumulation) 현상이 나타난다. 블레이드 끝단(trailing edge) 이후에는 익렬 내부의 와류와 후류가 혼합되어 복잡한 3차원 점성 유동장을 형성한다. 이러한 3차원 유동현상은 익렬 내의 공기역학적인 제반 손실의 주요 원인이 되며, 익렬 설계에는 이런 점들이 고려되어야 한다.

본 연구에서는 터빈 익렬 내부의 3차원 점성

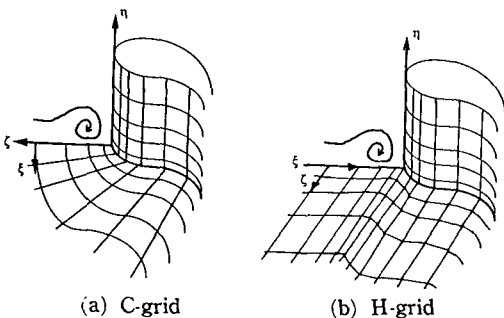


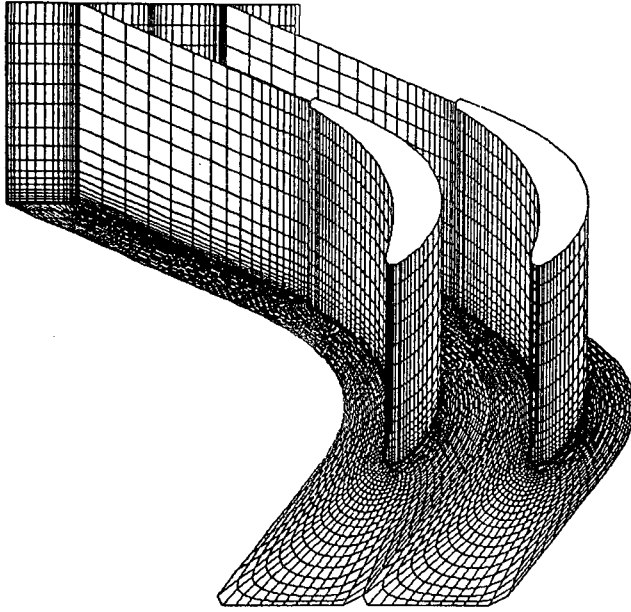
Fig. 2 Horseshoe vortex flow vs. computational grid system near the leading edge

Table 1 Geometric data of VKI linear cascade flow

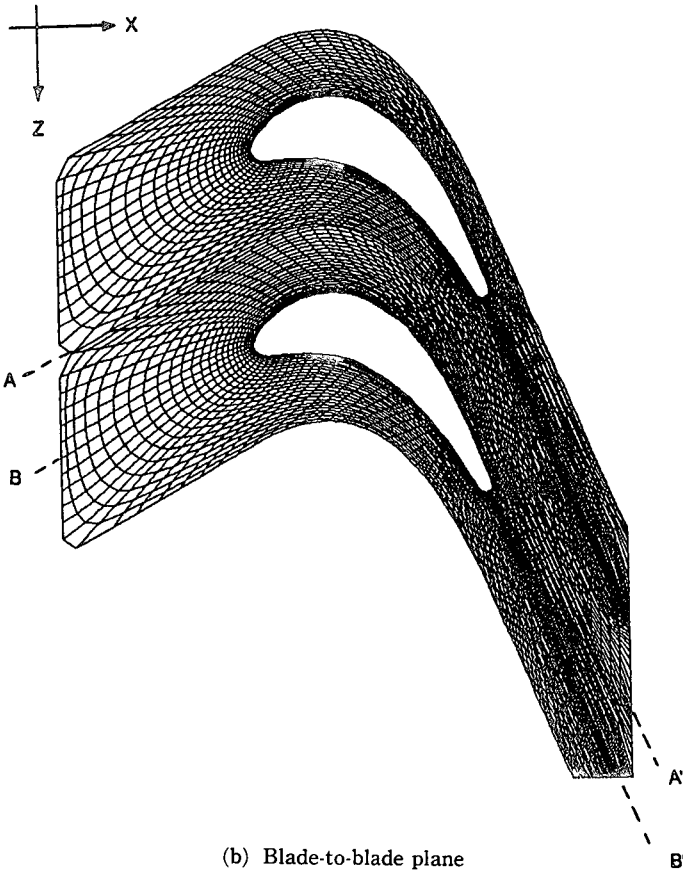
Aspect Ratio (h/c)	2.0
Solidity (c/s)	1.41
Stagger Angle ( $\beta_s$ )	33.3°
$\cos^{-1}(o/s)$	67.8°

Table 2 Flow conditions of VKI linear cascade flow

Inflow Angle ( $\beta_1$ )	30°
Inlet Mach no. ( $M_1$ )	0.268
Inlet Reynolds no. ( $Re_1$ )	$3.33 \times 10^5$
Exit Mach no. ( $M_{2, is}$ )	1.001



(a) Over-view



(b) Blade-to-blade plane

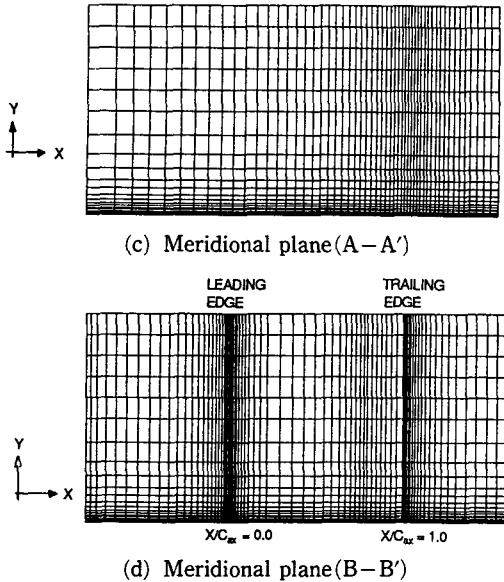


Fig. 3 Computational grid for VKI linear cascade

유동장 특성 중에서, 끝벽면 효과에 의한 2차 유동의 거시적 현상에 중점을 두어 수치해석 결과를 검토하고자 한다. 수치계산의 모델은 Kiock<sup>(15)</sup> 등 유럽의 4개 풍동에서 공동연구 한 VKI 선형 익렬인데, 익렬형상은 Table 1에 나타난 바와 같으며, 가로세로비 (aspect ratio)는 2.0으로 고정하였다. 유동조건은 Table 2에 나타난 바와 같이 입구 Mach수가 0.268, 입구 Reynolds수가  $3.33 \times 10^5$ 이며, 출구 등엔트로피 Mach수가 1.001인 천음속 영역이다. 출구압력은 입구 Mach수와 출구 등엔트로피 Mach수로부터 구해지며, 본 유동조건에서는 출구압력과 입구 총 압력비가 0.55이다. 본 계산 대상과 같은 익렬형상과 유동조건에서, 유정열<sup>(21)</sup> 등은 4단계 Runge-Kutta 적분기법을 사용하여 2차원 비점성 수치해석을 하였고, Choi와 Sohn<sup>(22)</sup>은  $k-\epsilon$  난류모델을 이용하여 2차원 점성유동해석을 하였다. 또한, 본 논문의 저자들은 LU-ADI 수치기법에 의한 2차원 익렬 유동 특성을 수치해석하였다.<sup>(12)</sup>

계산 격자점은 Fig. 3에 도시된 바와같이  $121(\xi) \times 32(\eta) \times 31(\zeta)$ 이고, 표면에는 80개의 격자점을 분포시켰다. 블레이드 및 끝벽면에서의 표면수직거리  $\Delta s_n \sim 2.0 \times 10^{-4}$ 으로, 박층 대수 난류모델의 적용이 가능하였다. Fig. 3(c,d)에서 보듯이, C-형 격자제는, 블레이드 끝단 뿐만 아니라, 블레이

드 선단에도 경계층 내부로 격자가 밀집되므로, 정성적인 면에서, H-형 격자제보다 선단 주위의 3차원 점성유동해석에 유리하다.

실제 3차원 익렬 유동장에서는, 입구 및 출구의 유동 상태는 대단히 복잡하다. 다단(multi-stage)인 경우, 정익과 동익간의 상호간섭에 의해 비정상 3차원 유동장이 형성되며, 익렬이 하나인 경우 (isolated row)에도, 실험장치 및 운전조건에 따라 입구의 유동상태가 다르다. 이러한 입구 및 출구의 유동조건(예를 들어, 경계층 두께, 입구 유동각분포, 난류강도)은 수치해석의 결과에 큰 영향을 주나,<sup>(23)</sup> 본 연구의 대상에서는 제외하였다. 본 계산에서는, 입구의 위치는  $X/C_{ax} = -0.9$ 에 두었다. 실험 결과<sup>(15)</sup>에서는 입구에서의 평균 속도 및 압력만 기술되어 있으므로, 본 계산에서는 임의로 경계층의 두께를 2% span으로 가정하고, 경계층 내부의 속도분포는 sine함수를 사용하였다. 터빈의 경우, 입구 유속이 작고, 유동진행 방향으로 압력이 감소하므로, 2차원 형상의 균일 입구 유동조건으로 적합할 것 같다. 출구의 위치는  $X/C_{ax} = 1.65$ 에 위치하고, 이상 출구 Mach수에 의해 결정된 출구정압은 전단면에서 일정하며, 나머지 유동변수는 내부의 유동변수로부터 선형 interpolation 하였다.

계산은 CRAY-2S에서 수행하였는데, 기억용량 (storage memory)은 4.8 MByte가 소요되었고, 1번 반복시간은 2.13초 정도 걸렸다. 정상상태로의 진행을 가속시키기 위해 Jacobian 행렬식의 값을 이용하여 다음과 같이 간단한 형태의 국부 가변시간간격법 (locally variable time steps)을 채택하였다.

$$\Delta t_{local} = \frac{\Delta t_{ref}}{1 + J^N} \tag{19}$$

수렴의 판정은 일반적으로 평균제곱근오차(L2 residual)의 값으로 한다. 본 유동장과 같이 복잡한 유동장의 경우는 최대오차의 변화를 살펴 볼 필요가 있다. Fig. 4의 수렴 이력에 나타난 바와 같이,  $\Delta t_{ref} = 1.0$ ,  $N = 0.25$ 의 국부 가변시간간격법을 사용하여 약 3000번의 반복계산후 평균제곱근 오차가  $10^{-8}$ 까지 떨어졌으며, 이때의 최대 CFL수는 약 28.2이었다. 최대오차는 평균제곱근오차와 비슷한 경향을 보이나, 중간에서 약간 불안정한 상태를 나타낸다. 정상상태로 간주한 3000번 반복 후 물리영역의 변수변화는 유효수자 3자리 즉 0



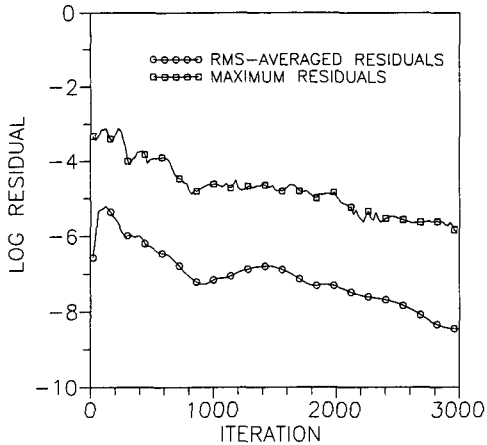
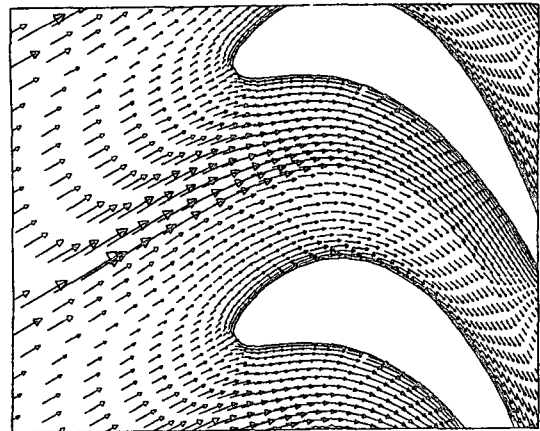


Fig. 4 Convergence history



(a) At the midspan (50.0% span)

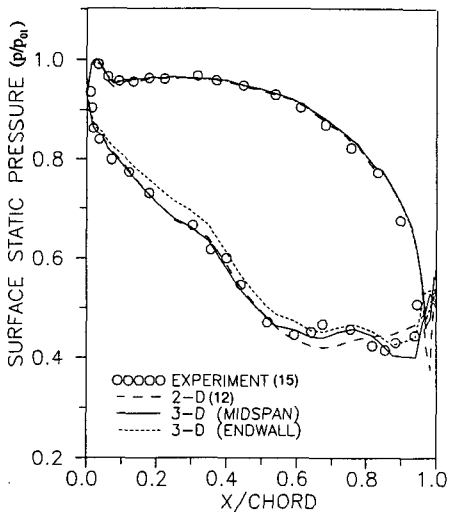
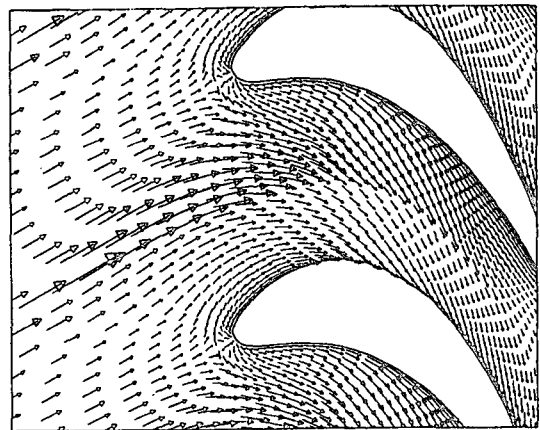


Fig. 5 Comparison of surface pressure distributions



(b) Inside the endwall boundary layer (0.5% span)

Fig. 6 Predicted velocity vector in the blade-to-blade plane

( $10^{-3}$ )이었다.

Fig. 5은 블레이드 표면의 정압분포를 나타낸 그림으로, 3차원 수치해결결과가 실험결과<sup>(15)</sup> 및 2차원 수치결과<sup>(12)</sup>와 비교되어 있다. 가압면에서는, 끝벽면과 대칭면의 차이가 거의 없고, 2차원 수치해석 및 실험에서 예측된 결과와 같은 결과를 나타내므로, 3차원 특성을 볼 수 없다. 그러나, 부압면의 전반부에서는, 대칭면에서의 3차원 수치해는 실험 결과 및 2차원 수치결과와 잘 일치하나, 경계층과 충격파가 상호작용을 일으키는 후반부는, 3차원 수치해가 2차원보다 실험에 더 근접한 결과를 보여준다. 끝벽면에 가까운 부압면은 대칭면보다 압력이

약간 높은데, 이는 끝면의 경계층에서, 말굽와류와 통로와류에 의한 단면방향의 2차 유동 영향으로 설명될 수 있다. 즉 단면(cross section)에서, 상대적인 압력차이에 의해 가압면→부압면의 끝면→부압면의 대칭면으로의 2차 유동이 형성됨을 예측할 수 있다.

대칭면과 끝면에서의 속도벡터가 Fig. 6에 나타나 있다. 대칭면의 유선형상(Fig. 6.a)은 2차원 결과와 거의 같다. 끝면에서의 유동 양상에서 3차원 유동 특성의 일부를 관찰할 수 있다. 입구의 경계층 유동이 둥근 선단과 끝벽면에 의해 말굽와류 유동을 야기시키며, saddle point가 통로 입구의 앞

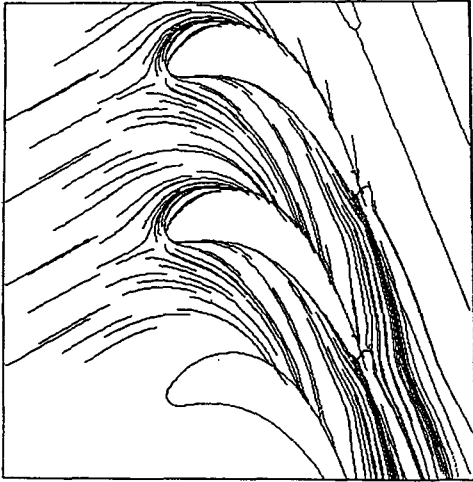


Fig. 7 Endwall limiting streamline

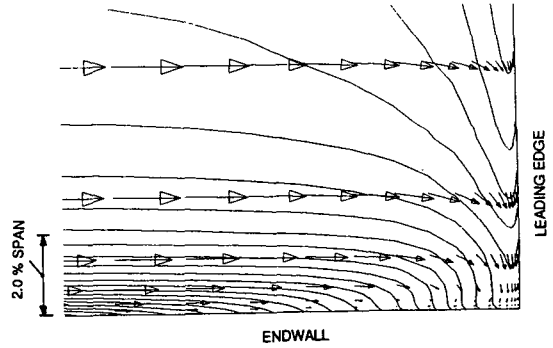


Fig. 8 Velocity vector and total pressure contours in the endwall boundary layer near the leading edge

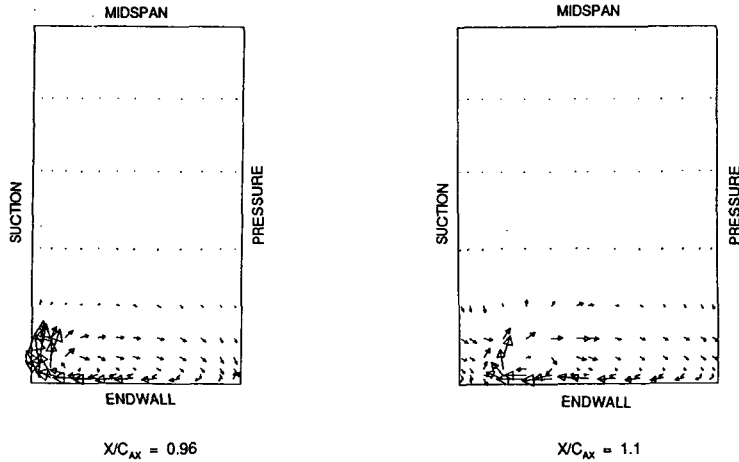


Fig. 9 Secondary flow vectors at the selected crosssectional planes near trailing edge

에서 발견된다. 블레이드 통로를 따라서 경계층 내부의 vortex filament가 휘어지고, 익렬내부에서 가압면과 부압면의 압력 차이가 생겨서 통로 와류 유동이 형성되는 것을 관찰할 수 있다. 벽면 부근의 경계층 내부(0.5% span)에서의 순간 유선(instantaneous streamline 또는 limiting streamline)이 Fig. 7에 도시되어 있다. 이 그림은 정상상태로 간주한 수렴해의 속도벡터를 연속으로 이은 것으로, 본 수치기법이 비정상 유동해를 구하므로, 순간 유선이라는 용어를 사용하였다.

끝면의 경계층이 뭉툭한 선단에 의해 말려 올라가서(rolling up), 와류 유동을 일으키는 말굽와류

현상이 Fig. 8에 도시되어 있다. 총 압력분포가 유동 양상과 유사성을 보임을 알 수 있다. 유사한 연구 결과<sup>(24)</sup>에 의하면, 입 출구의 압력 차이가 크고, 유동 각이 큰 경우에는 선단과 끝면이 교차하는 구석에 2차와류(secondary vortex)가 발생된다고 보고되었으나, 본 수치 결과에서는 나타나지 않았다.

익렬 꼬리부분의 2차유동 양상이 Fig. 9에 도시되어 있다. 2차 유동은 단면에서 대칭면( $\eta = \eta_{MAX}$ )의 속도성분 차이로 정의하였다. 표면의 압력분포에서 예측한 2차 유동현상과 일치함을 알 수 있다. 압력손실,  $\eta$ 는 입구의 총압력을 기준으로 다음과

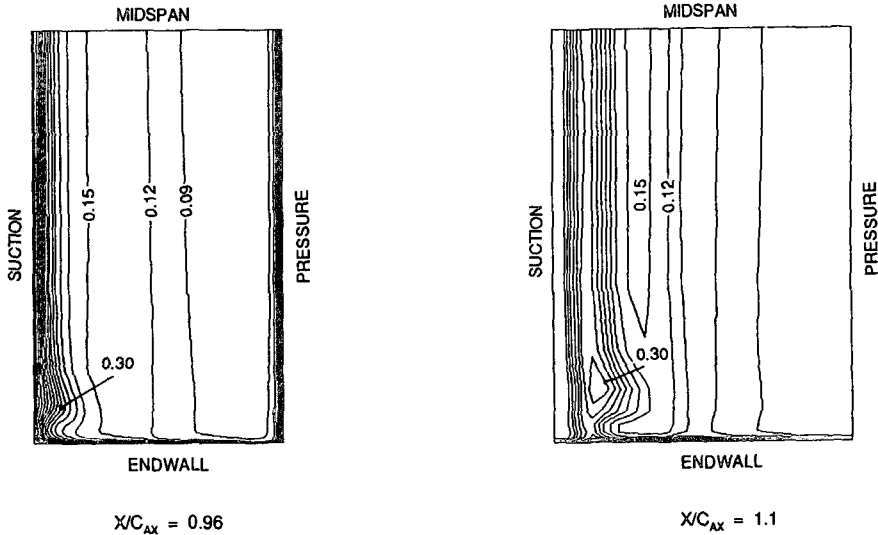


Fig. 10 Contours of total pressure loss coefficient at the selected cross-sectional planes near trailing edge

같이 정의하였다.

$$\eta = 1 - \frac{P_{t,local}}{P_{t,intet}} \quad (21)$$

단면에서의 2차 유동 양상은 Fig. 10의 단면압력손실분포와 관련이 깊다. 익렬 꼬리전면 ( $X/C_{ax} = 0.96$ )에서는 벽면과 부압면 구석부근에 약한 2차 유동이 형성되고, 와류의 중심에서 극부적인 최대 손실이 발생된다. 유동이 진행됨에 따라 후류의 영향으로  $X/C_{ax} = 1.1$  부근에서는 2차유동의 중심이 단면의 중심쪽으로 이동하고, 압력손실도 크며, 2차유동의 크기가 증가한다. 본 연구에서는 정성적인 특성은 잘 나타나고 있으나, 3차원 유동현상을 보다 정량적으로 관찰하기 위해서는, 주유동방향 ( $\xi$ )뿐만 아니라 경계층과 관련된  $\eta, \zeta$  방향의 격자수가 증가되어야 할 것으로 판단된다.

#### 4. 결 론

익렬 내부의 3차원 천음속 점성 유동장 특성을 수치적으로 연구하기 위하여, 기존의 2차원 익렬 유동 코드를 3차원으로 확장하고, 이를 3차원 익렬 유동 계산에 적용하여 다음과 같은 결과를 얻었다.

(1) LU-ADI 방법에 의한 본 3차원 내부 유동 코드는 3차원 압축성 익렬유동의 수치해석에 적합

하다.

(2) 중앙면 (midspan)에서의 3차원 수치해결과는 2차원 수치해 결과와보다 실험결과에 근접함을 보여 준다.

(3) 벽면에 의한 3차원 유동 특성인 말굽와류, 통로와류, 단면의 2차 유동현상 등이 수치적으로 증명되었다.

#### 후 기

본 연구는 산업과학기술연구소의 기초연구의 일부로 수행되었으므로, 관계자 여러분들께 심심한 감사를 드립니다.

#### 참고문헌

- (1) Davis, R.L., Ni, R.H. and Carter, J.E., 1987, "Cascade Viscous Flow Using the Navier-Stokes Equations," J. of Propulsion and Power, Vol. 3, No. 5, pp. 406~414.
- (2) Bassi, F., et al., 1989, "Secondary Flows in a Transonic Cascade : Comparison Between Experimental and Numerical Results," J. of Fluids Eng., Trans. ASME, Vol. 111, pp. 369~377.

- (3) Hah, C., 1984, "A Navier-Stokes Analysis of Three-Dimensional Turbulent Flows Inside Turbine Blade Rows at Design and Off-Design Conditions," J. of Eng. for Gas Turbines and Power, Trans. ASME, Vol. 106, pp. 421~429.
- (4) Jameson, A., Schmit, W. and Turkel, E., 1981, "Numerical Solutions of the Euler Equations by Finite-Volume Methods Using Runge-Kutta Time-Stepping Schemes," AIAA Paper 81~1259
- (5) Dawes, W.N., 1987, "A Numerical Analysis of the Three-Dimensional Viscous Flow in a Transonic Compressor Rotor and Comparison with Experiment," J. of Turbomachinery, Vol. 109, pp. 83~90.
- (6) Subramanian, S.V. and Bozzola, R., 1987, "Numerical Simulations of Three-Dimensional Flow Fields in Turbomachinery Blade Rows Using the Compressible Navier-Stokes Equations," AIAA Paper 87-1314.
- (7) Chima, R.V. and Yokota, J.W., 1990, "Numerical Analysis of Three-Dimensional Viscous Internal Flows," AIAA J., Vol. 28, No.5, pp. 798~806.
- (8) Denton, J.D., 1986, "The Use of a Distributed Body Force to Simulate Viscous Effects in Three-Dimensional Flow Calculations," ASME Paper 86-GT-144.
- (9) Knight, C.J. and Choi, D., 1989, "Development of a Viscous Cascade Code Based on Scalar Implicit Factorization," AIAAJ., Vol. 27, No.5, pp. 581~594.
- (10) Rai, M.M., 1987, "Unsteady Three-Dimensional Navier-Stokes Simulations of Turbine Rotor-Stator Interactions," AIAA Paper 87-2058.
- (11) Obayashi, S., et al., 1986, "Improvements in Efficiency and Reliability for Navier-Stokes Computations Using the LU-ADI Factorization Algorithm," AIAA Paper 86-O338, Reno, Nevada.
- (12) 정희택, 백제현, 1992, "2차원 익렬유동의 Navier-Stokes 해석," 대한기계학회논문집, 제 16권, 제2호, pp. 713~722
- (13) Baldwin, B.S. and Lomax, H., 1978, "Thin Layer Approximation and Algebraic Model for Separated Turbulent Flows," AIAA 16th Aero. Sci.Meeting.
- (14) Hung, C.M. and Buning, P.G., 1985, "Simulation of Blunt-Fin Induced Shock Wave and Turbulent Boundary Layer Interaction," J.Fluid Mech., Vol. 154, pp. 163~185
- (15) Kiock, R., et al., 1986, "The Transonic Flow Through a Plane Turbine Cascade as Measured in Four European Wind Tunnels," J. Eng. for Gas Turbines and Power, Trans. ASME, Vol. 108, pp. 277~284.
- (16) Gessner, F. and Po, J. K., 1976, "A Reynolds Stress Model for Turbulent Corner Flows-Part II : Comparison Between Theory and Experiment," J.Fluids Eng. (Trans. ASME), Vol. 98, pp. 269~277
- (17) Beam, R. and Warming, R.F., 1986, "An Implicit Finite-Difference Algorithm for Hyperbolic System in Conservation-Law-Form," J. of Comp. Phys., Vol. 22, pp. 87~110.
- (18) Steger, J.L., 1979, "Implicit Finite-Difference Simulation of Flow About Arbitrary Two-Dimensional Geometries," AIAA J., Vol. 16, No. 7, pp. 679~686.
- (19) Sweby, P.K., 1984, "High Resoution Schemes Using Flux Limiters for Hyperbolic Conservation Laws," SIAM J. Numer. Anal., Vol. 21, pp. 995~1011
- (20) Steger, J.L. and Sorenson, R.L., 1979, "Automatic Mesh Point Clustering Near a Boundary in Grid Generation with Elliptic Differential Equations," J. of Comp. Phys. Vol. 33, pp. 405~410
- (21) 이영창, 유정열, 1990, "2차원 비점성 익렬 유동에 대한 수치해석적 연구," 대한기계학회논문집, 제14권, 제4호, pp. 981~989
- (22) Choi, B.S. and Sohn, J.L., 1990, "Computational Analysis of Transonic Flow Inside Turbine Cascades," Proc. 2nd KSME-JSME Fluid Eng. Conf., Seoul, Korea
- (23) Boletis, E. and Sieverding, C.H., 1983, "Effects of a Skewed Inlet Endwall Boundary Layer on the 3D Flow Field in an Annular Turbine Cascade," AGARD CP 351
- (24) Sieverding, C.H., 1985, "Recent Progress in

the Understanding of Basic Aspects of Secondary Flows in Turbine Blade Passage," J. Eng.

Gas Turb. Power (Trans. ASME), Vol. 107, pp 248~257