

〈論 文〉

저레이놀즈수 $k-\epsilon$ 난류모형 개선에 관한 연구

김명호* · 신종근** · 최영돈***

(1992년 2월 28일 접수)

A Study on the Development of Low Reynolds Number $k-\epsilon$ Turbulence Model

M.H. Kim, J.K. Shin and Y.D. Choi

Key Words : Low Reynolds Number Turbulence Model(저레이놀즈수 난류모형), Full Fine Grid System(완전미세격자계), Limiting Behavior(극한특성), Standard Model Constant(표준모형상수), Pressure Diffusion(압력확산항)

Abstract

Fine grid computations were attempted to analyze the turbulent flows in the near wall low Reynolds number region and the numerical analyses were incorporated by a finite-volume discretization with full fine grid system and low Reynolds number $k-\epsilon$ model was employed in this region. For the improvement of low Reynolds number $k-\epsilon$ model, modification coefficient of eddy viscosity $f\mu$ was derived as a function of turbulent Reynolds number R_t and nondimensional length y^+ from the concept of two length scales of dissipation rate of turbulent kinetic energy. The modification coefficient $f\epsilon_2$ in ϵ transport equation was also derived theoretically. In the turbulent kinetic energy equation, pressure diffusion term was added in order to consider low Reynolds number region effect. The main characteristics of this low Reynolds number $k-\epsilon$ model were founded as : (1) In high Reynolds number region, the present model has limiting behavior which approaches to the high Reynolds number model. (2) Present low Reynolds number $k-\epsilon$ model does not need additional empirical constants for the transport equations of turbulent kinetic energy and dissipation of turbulent kinetic energy in order to consider wall effect. Present low Reynolds number turbulence model was tested in the pipe flow and obtained improved results in velocity profiles and Reynolds stress distributions compared with those from other $k-\epsilon$ models.

기 호 설 명

A^* : 모형상수
 $C_1, C_2, C_{k1}, C\epsilon, C_{1d}, C_{2d}, C_D, C_{d1}, C_{d2}, C\epsilon_0, C\epsilon_1, C\epsilon_2$
 $C\mu, C\mu_0, C_u$: 난류 모형상수
 $f\mu$: 와점성계수 수정계수
 $f\epsilon_2$: 난류운동에너지 소멸율의 소멸항 수정계수

k : 난류운동에너지
 k^+ : 무차원 난류 운동에너지 ($=k/U^2\tau$)
 L : 난류길이 척도
 L_D : 난류운동에너지 소멸율 길이 척도
 L_u : 난류확산길이 척도
 l_m : 혼합거리
 P_k : 난류운동에너지 생성률
 R : 반경
 R_e : 레이놀즈수 ($=UD/\nu$)

*정회원, 현대자동차 마복리 연구소
**정회원, 고려대학교 대학원
***정회원, 고려대학교 기계공학과

R_{ec} : 중심속도로 계산한 레이놀즈수 ($=U_c D/\nu$)

R_t : 난류 레이놀즈수 ($=\frac{k^2}{\nu \epsilon}$)

U : x 방향 국부평균 속도

u : x 방향 요동속도

$\overline{uv^+}$: 무차원 레이놀즈응력 ($=\overline{uv^+}/U^2$)

U : 마찰속도 ($=\sqrt{\tau_w/\rho}$)

$\overline{u_i u_j}$: 레이놀즈응력

V : y 방향 국부평균 속도

v : y 방향 요동속도

V_t : 난류특성 속도

x, y : 직교좌표

y^+, Y^+ : 벽면으로부터의 무차원거리 ($=yU_{\tau}/\nu$)

ϵ : 난류 운동에너지 소멸율

ϵ^+ : 무차원 난류 운동에너지 소멸율 ($=\epsilon\nu/U_{\tau}^3$)

$\tilde{\epsilon}$: 등방성 난류 운동에너지 소멸율

ϵ_w : 벽면에서의 ϵ 값

κ : von Karman의 상수

μ : 점성계수

ν : 동점성계수

Π : 압력확산항

ρ : 유체의 밀도

σ_k : 모형상수

σ_ϵ : 모형상수

τ_w : 벽면의 전단응력

1. 서 론

본 연구에서는 복잡한 3차원 유동을 정확히 해석해 줄 수 있는 일반성있는 난류모형의 개발에 관한 연구를 하였다. 이와같은 연구를 시작한 것은 전산해의 정확성과 프로그램의 일반성 증진을 위해 고려할 사항 중 가장 큰 영향을 미치는 것은 난류모형의 정확성과 일반성 증진의 문제이기 때문이다. 과거에 난류유동의 해석에 주로 사용되어 왔던 $k-\epsilon$ 모형은 복잡한 3차원 유동에서 그 정확도가 떨어져 사용하기 곤란한 것으로 알려져 있다.⁽¹⁾⁻⁽⁵⁾ 따라서 복잡한 3차원 유동을 정확히 해석하기 위해서는 더 차수가 높은 난류모형의 적용이 요구되고 있다. 현재 가장 발달한 난류모형의 하나인 레이놀즈응력방정식 모형이나 대수응력 모형 등의 2차 모멘트 난류모형(second moment turbulence model)을 적용하여 복잡한 3차원 난류유동을 해석할 때 항상 가장 큰 문제가 되는 것은 벽면인접부에서의

난류모형의 처리 문제이다. 이 벽면인접부에서의 난류모형이 정확하지 않으면 다른 구역에서 아무리 좋은 난류모형을 사용한다 하더라도 전체 난류 유동장에 대한 정확한 해를 얻을 수 없기 때문이다. 따라서 벽면인접부에 적용될 정확한 난류모형의 개발은 일반성있는 레이놀즈응력 방정식 모형의 개발에서 항상 큰 걸림돌이 되어왔다.

과거에 미세격자구역의 유동을 2층모형(two layer model)을 사용하지 않고 하나의 난류모형으로 해석하기 위한 다수의 저레이놀즈수 $k-\epsilon$ 모형⁽⁶⁾⁻⁽⁹⁾이 제안되었고 몇몇의 저레이놀즈수 대수응력모형⁽¹⁰⁾이나 레이놀즈응력 방정식 모형^{(11),(12)}이 제안되었다. 그러나 이 연구들에서의 모형상수들은 주로 실험에 바탕한 경험식을 사용하였고 또 그 상수들의 유도과정에 대한 이론적 근거가 빈약하여 모형의 일반성을 떨어뜨리고 있다.

Jones와 Launder⁽⁶⁾가 저레이놀즈수 $k-\epsilon$ 모형을 제안한 후 많은 저레이놀즈수 $k-\epsilon$ 모형들이 Launder 등,⁽¹³⁾ Launder와 Sharma,⁽⁷⁾ Lam과 Bremhost⁽⁸⁾ 등에 의해 제안되었는데 이 모형들은 전반적으로 Jones와 Launder의 모형과 같은 형태를 가지거나 약간 수정된 형태를 가지고 있다. 이들 모형들의 특징은 수정계수의 모형을 어떤 물리적 기본방정식으로부터 유도한 것이 아니라 난류현상의 물리적 특성에 대한 정성적 개념으로부터 식의 형태를 구성하고 이 수정된 난류모형식을 사용하여 2차원 평행평판유동이나 원관유동을 해석한 후 평균유동의 속도분포나 난류 운동에너지의 분포들을 관찰하여 전산 최적화에 의해서 그 모형상수를 결정하는 방법을 사용하였다. 따라서 이와같은 난류모형들은 일종의 경험식이라고 할 수 있어서 그 이론적 근거가 확고하지 못하다. 그 결과 이 모형들은 벽면인접부에서 레이놀즈응력 분포 등의 난류 특성들을 정량적으로 정확히 예측해 주지는 못하고 있다.

Myong,⁽⁹⁾ Myong 등⁽¹⁴⁾은 저레이놀즈수 구역에서 사용할 수 있는 와점성계수식을 이론적으로 유도하여 새로운 저레이놀즈수 난류모형을 제시하였는데 이 모형은 과거의 모형들보다 평행평판유동과 원관유동의 평균속도 분포나 난류특성들을 전반적으로 정확히 예측해 주었다. 그러나 Myong이 제시한 모형은 유도하는 과정에 있어서 도입된 가정들이 다소간의 불합리성을 갖고 있기 때문에 보다 정확한 이론을 사용하여 이러한 불합리성을 제거할

필요가 있다.

본 연구에서는 벽면인접부의 미세격자구역에서 정확성과 일반성이 큰 난류모형을 얻기 위해서 과거 모형의 유도 과정상에 발생한 불합리성을 제거함으로써 난류모형을 개선하는 연구를 하였다.

저레이놀즈수 영역에 대한 본 $k-\epsilon$ 모형은 벽면인접부에서 난류 운동에너지 소멸율에 대한 2개의 길이척도 개념으로부터 와점성계수의 수정계수 ($f\mu$)를 난류레이놀즈수 (R_t)와 벽으로부터의 무차원거리 (y^+)의 함수의 식으로 유도하였다. 그리고 난류 운동에너지 소멸율(ϵ)의 이송방정식에서 소멸항의 수정계수도 이론적으로 수정하였다. 그러나 모형의 일관성을 유지하기 위해 고레이놀즈수 영역에서 표준 $k-\epsilon$ 난류모형의 모형상수⁽¹⁶⁾들은 그대로 사용하였다.

2. 저레이놀즈수 $k-\epsilon$ 모형의 개선

2.1 과거 모형의 분석

레이놀즈응력의 난류모형에 대한 첫번째 시도는 Boussinesq⁽¹⁷⁾가 레이놀즈응력과 평균속도의 변형율과의 관계를 층류유동의 점성응력 (Viscous stress)과 평균속도 구배와의 관계식에서 유추하여 다음과 같은 식을 제안 한데서 기인한다.

$$-u_i u_j = \nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (1)$$

위의 식에서 ν_t 는 와점성계수로서, 점성계수 ν 와는 달리 유체의 물성치가 아니고 유동의 상태에 의존한다. 따라서 같은 유동장 내에서도 크게 변화하며 유동장의 변화에 따라서도 변한다. 이 와점성계수의 차원은 특성 난류속도 척도 V_t 와 난류 길이척도 L 의 곱으로 나타내진다.

$$\nu_t \sim V_t L \quad (2)$$

식(2)의 와점성계수 모형에서 V_t 와 L 을 모두 편미분방정식을 풀어서 구하는 방법이 2-방정식 모형이다. 2-방정식 모형은 여러가지 형태가 있으나 $k-\epsilon$ 모형이 가장 많이 사용되었다.

Jones와 Launder⁽⁶⁾는 저레이놀즈수 영역에서 적용되는 k 와 ϵ 의 이송 방정식을 다음과 같이 만들어 사용하였다.

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\nu + \nu_t / \sigma_k) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right)$$

$$+ \nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \bar{\epsilon} - 2\nu \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_j} \right)^2 \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial t} + U_j \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial x_j} \quad (3)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\nu + \nu_t / \sigma_\epsilon) \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial x_j} \right)$$

$$+ C_{e1} f_{1\nu t} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - C_{e2} f_2 \frac{\bar{\epsilon}^2}{k} + 2\nu \nu_t \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_k \partial x_j} \right)^2 \quad (4)$$

여기서 $\bar{\epsilon}$ 는 등방성 난류 운동에너지 소멸율로

$$\bar{\epsilon} = \epsilon - 2\nu \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_j} \right)^2 \quad (5)$$

와 같이 정의한다.

위의 방정식에서 주요 수정사항은 ϵ 방정식 소멸항의 상수를

$$C_{e2} = C_{e20} (1 - 0.3 \exp(-R_t^2)) \quad (6)$$

로 수정한 것과 벽면에서 ϵ 의 경계조건을 주기 어려움을 해소하기 위하여 난류운동에너지소멸율 ϵ 방정식을 등방성 난류운동에너지소멸율 $\bar{\epsilon}$ 의 방정식으로 대체한 것이고 그에 따라 k 방정식에서 이 변화를 흡수하기 위하여 $2\nu \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_j} \right)^2$ 항을 더해준 것이다. 그러나 벽면상을 제외하고는 $\bar{\epsilon}$ 과 $\epsilon - 2\nu \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_j} \right)^2$ 이 정확히 일치한다고 할 수 없으므로 이 방법은 약간의 문제점을 제기하고 있다.

식(3), (4)에서 k , $\bar{\epsilon}$ 이 계산되면 와점성계수는

$$\nu_t = f\mu C\mu \frac{k^2}{\bar{\epsilon}} \quad (7)$$

으로 계산한다. 식(7)에서 $C\mu$ 의 수정계수 $f\mu$ 의 정확한 모형이 이 난류모형의 정확성과 일반성에 가장 큰 영향을 준다.

저레이놀즈수 영역에서 $C\mu$ 의 수정계수에 대한 모형화를 최초로 시도한 것은 Jones & Launder⁽⁶⁾이었다. 그들은 수정계수 $f\mu$ 를 난류레이놀즈수 R_t ($=k^2/\nu\epsilon$)의 함수로 하여 다음과 같이 나타내었다.

$$f\mu = \exp \left[\frac{-3.4}{(1 + R_t/50)^2} \right] \quad (8)$$

그후 많은 연구자들에 의해 $f\mu$ 에 대한 모형이

제시되었는데 이들은 주로 $f\mu$ 를 R_t 와 벽으로부터의 무차원거리 $y^+ (\equiv yU\tau/\nu)$ 의 함수로 나타내었다.

그러나 이들이 제안한 수정계수식들은 어떤 이론적 근거에서 얻어졌다고 보다는 모형을 도입한 해석에서 얻어진 평균속도 분포를 실험결과와 비교함으로써 경험적으로 얻었고 이 식들 속에 있는 상수값들의 결정에서도 그러하였다. 그에 따라 그 수정계수의 일반성이 적어지게 되어 유동형태 등의 변화에 따라서 평균속도 분포나 레이놀즈응력 예측 등의 정확도가 크게 변화하는 결과를 초래하였다.

Myong,⁽⁹⁾ Myong과 Kasagi⁽¹⁴⁾는 저레이놀즈수 구역에서의 와점성계수의 수정계수를 경험식으로 얻지 않고 이론적으로 유도하였다. 그는 와점성계수를 난류확산에 관한 길이척도 L_u 를 사용하여

$$\nu_t = C_u \sqrt{k} L_u \quad (9)$$

로 나타내고 다시 L_u 를 난류에너지 소멸을 길이척도 L_D 와 벽면의 길이척도 감쇄함수 f_D 의 곱으로 나타내었다.

$$L_u = L_D f_D \quad (10)$$

$$f_D = 1 - \exp(-y^+/A^*) \quad (11)$$

한편 Norris와 Reynolds⁽¹⁸⁾는 벽면인접부에서 난류 운동에너지 소멸율을

$$\varepsilon = C_D \frac{k^{3/2}}{L_D} + C_{1d} \frac{\nu k}{L_D^2} \quad (12)$$

로 나타내었다.

난류 운동에너지 소멸율이 벽면인접부에서 식(12)로 나타내어지는 바와 같이 2개의 다른 함수식의 합으로 나타내어 지는데 Myong은 이 이론으로부터 난류 운동에너지 소멸율이 2개의 길이척도로 되어 있다고 가정하고 난류운동에너지소멸을 등가 길이척도(L_D)를 이 두 길이척도의 합인

$$L_D = C_{1d} \sqrt{\frac{\nu k}{\varepsilon}} + C_D \frac{k^{3/2}}{\varepsilon} \quad (13)$$

으로 나타낸 후 식(13)을 식(10)에서의 L_D 값으로 사용하였다. 이 이론에 따라서 식(10), (13)을 식(9)에 대입하고 정리하면

$$\begin{aligned} \nu_t &= C_u f \mu \frac{k^2}{\varepsilon} \\ &= C_u \left(1 + \frac{C_2}{\sqrt{R_t}}\right) (1 - \exp(-y^+/A^*)) \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (14) \end{aligned}$$

이 되어

$$f\mu = \left(1 + \frac{C_2}{\sqrt{R_t}}\right) (1 - \exp(-y^+/A^*)) \quad (15)$$

을 얻었다. 위의 식 등에서 $C_u = C\mu^{1/4}$ 이고 $C_D = C\mu^{3/4}$ 이며 $C_2 = \sqrt{2}\kappa/C\mu^{3/4}$ 의 관계가 있다. 한편 Myong은 벽면부근에서 혼합거리 모형에서 얻어진 식

$$R_t = 4.45y^+ \quad (16)$$

을 식(15)에 대입한 후 $y^+ = 150$ 에서 $f\mu$ 가 1이 되도록 함으로써 $A^* = 70$ 을 얻었다.

위에서 설명한 Myong의 와점성계수 수정모형은 경험식을 사용하지 않고 이론적으로 모형을 유도했다는 데에는 그 의의가 대단히 크다 하겠으나 이 이론의 유도과정에는 몇가지 개선할 점이 있다.

첫째는 서로 다른 난류의 길이척도의 난류가 서로 합쳐질 때 합쳐진 난류의 길이척도가 각각의 난류 길이척도의 산술적인 합이 아니라는 것이다. Leslie⁽¹⁵⁾의 난류 스펙트럼이론에 의하면 서로 다른 파동수(wave number)의 난류가 합쳐질 때 파동수들은 벡타삼각형을 이루며 합쳐진다고 하였다. 따라서 2개의 길이척도를 산술적으로 합치는 것은 정확한 등가길이척도를 구하는 방법이라 할 수 없다. 두 번째로 지적되는 것은 난류 운동에너지의 프란틀수를 표준모형에서의 1.0을 쓰지않고 1.4로 크게 하여 쓴 것이다. 이것은 난류모형 개발에서 기본요건으로 되어있는 고레이놀즈수 극한조건 즉 고레이놀즈수 영역에서 저레이놀즈수 모형이 고레이놀즈수 모형과 같아져야 한다는 조건이 성립되지 않아 이 모형사용에 대한 일반성에 제한을 가한다.

세 번째로 지적되는 사항은 ε 방정식 소멸항의 계수 C_{ε_2} 에 대한 수정계수 $f_{\varepsilon_2}(R_t)$ 의 모형이다. Hanjalic과 Launder⁽¹¹⁾는 벽면인접부에서 난류 운동에너지 소멸율의 소멸항 계수 C_{ε_2} 가

$$C_{\varepsilon_2} f_{\varepsilon_2}(R_t) = C_{\varepsilon_2} [1 - 2/9 \exp(-R_t/6)]^2 \quad (17)$$

으로 수정되어야 한다고 하였다. 그러나 Myong은 차원해석을 통해서 식(17)은 벽면인접부에서 난류 운동에너지 소멸을 방정식을 차원적으로 비동차로 만들기 때문에 이를 수정하기 위해서 f_{ε_2} 를 다음과 같이 수정해야 한다고 하였다.

$$f_{\varepsilon_2} = [1 - 2/9 \exp(-R_t/6)]^2 [1 - \exp(-y^+/Ca)]^2 \quad (18)$$

그러나 Myong은 식(18)에 C_d 값을 선정할 때 평행평판 유동이나 원관유동에서의 전산최적화에 의해서 5.0으로 정해주었다. Myong이 $f_{\epsilon 2}$ 에 대한 관계식으로 식(18)을 제안할 때 식(17)에서 보다 좀 더 이론적 근거에 바탕하여 식의 형태를 제안했으나 C_d 의 결정과정을 전산최적화에 의해 했다는 것과 복잡한 2차원 유동이나 3차원 유동에서는 y^+ 를 정확히 정의하기 어려운데 식(18)속에서는 y^+ 가 포함되어 있다는 것 등은 식(18)의 사용에 대한 일반성을 저하시키는 요인이 되어서 이를 보완하기 위한 연구가 요구되고 있다.

2.2 f_{μ} 모형의 개선

Myong⁽⁹⁾의 f_{μ} 에 대한 모형은 기존의 저레이놀즈수 $k-\epsilon$ 난류모형 중 이론적 근거가 확고한 모형 중의 하나이다. 그러나 이 모형의 정확성과 일반성을 더 높이기 위해서는 앞에서 설명한 바와 같이 Myong의 모형에 내재된 몇가지 문제점에 대한 보완이 요구된다. Myong 모형의 이론적 장점을 살리고 그 단점을 보완할 수 있는 방법으로 생각할 수 있는 것은 Norris와 Reynolds⁽¹⁸⁾가 제안한 벽면 인접부에서의 난류 운동에너지 소멸을 식(12)로부터 길이척도 L_D 에 관한 2차방정식

$$\epsilon L_D^2 - C_D k^{3/2} L_D - C_{1d}^2 k \nu = 0 \tag{19}$$

을 만들어 이 식을 풀어서 L_D 를 구하는 방법이다. 이 모형은 Leslie의 난류 스펙트럼이론을 위배시키지 않으며 저레이놀즈수 영역과 고레이놀즈수 영역에 공통적으로 적용될 수 있는 난류 운동에너지 소멸을 길이척도(L_D)를 구하는 방법으로 생각된다. 식(19)의 2개의 해 중에서 양의 해를 취하면

$$L_D = \frac{C_D k^{3/2}}{2\epsilon} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4C_{1d}^2}{C_D^2} \frac{1}{R_t}} \right) \tag{20}$$

이 된다. 식(20)을 식(10)에 대입하고

$$C_{2d} = \frac{4C_{1d}^2}{C_D^2} \tag{21}$$

의 관계를 이용하면 와점성계수의 수정계수식은

$$f_{\mu} = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{C_{2d}}{R_t}} \right) \left(1 - \exp\left(-\frac{y^+}{A^*}\right) \right) \tag{22}$$

이 된다. Myong은 식(14)에서 A^* 를 결정할 때 식(16)을 사용하여 $y^+=150$ 일때 f_{μ} 가 1이 되도록 결정했다. 그러나 Fig. 1에 나타나 있는 바와 같이

Patel 등⁽¹⁹⁾ 이 원관에 대한 Laufer⁽²⁵⁾의 실험값을 기초로 하여 제시한 벽면인접부에서의 f_{μ} 의 변화는 $y^+=100$ 부근에서 이미 0.96 정도가 되며, Patel 등과 같은 방법으로 Laufer의 실험값을 보다 고차항의 함수로 만들어 본 연구에서도 $k-\epsilon$ 모형 및 저레이놀즈수 대수응력 모형⁽²⁶⁾으로 계산해 본 결과 $y^+=70$ 부근에서 1로 접근하는 것을 알 수 있다. 따라서 제시된 실험값에 보다 잘 일치하는 수정계수를 얻기 위해서는 길이척도 감쇄함수로서 식(22)에 사용된 지수함수보다 급격히 1로 접근하는 다른 함수가 요구되어지며 이런 함수중의 하나는 쌍곡선함수(hyperbolic function)가 될 것이다.⁽²⁰⁾이 함수를 사용하여 식(22)를 수정하면 다음과 같다.

$$f_{\mu} = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{C_{2d}}{R_t}} \right) \tanh\left(\frac{y^+}{A^*}\right) \tag{23}$$

식(23)에서 $\kappa=0.4$ 로 가정할 때 $C_{2d}=47.4$ 가 되며 제시된 실험값들에 대해 수정계수 f_{μ} 가 가장 잘 일치하기 위해선 $A^*=60$ 정도가 요구되어진다. 또 식(23)을 C_{μ} 의 수정계수로 사용할 경우 전 유동장에 대한 C_{μ} 의 평균값 $C_{\mu 0}$ 가 0.09가 되도록 하는 새로운 보정상수가 필요하다. 원관에 대해 식(23)을 사용하여 계산해 본 결과 이 보정상수는 1.06으로 계산되어 결국 f_{μ} 의 값을 1.06배 상승시키는 효과를 가져왔는데 이것은 고레이놀즈수 영역에서 f_{μ} 가 1로 되어야 한다는 사실을 위배하는 것이 아니라 C_{μ} 의 값이 고레이놀즈수 영역에서 0.09보다 커져야 된다는 것을 간접적으로 시사하고 있다. Fig. 1에서 보는 바와 같이 Laufer의 실험값을

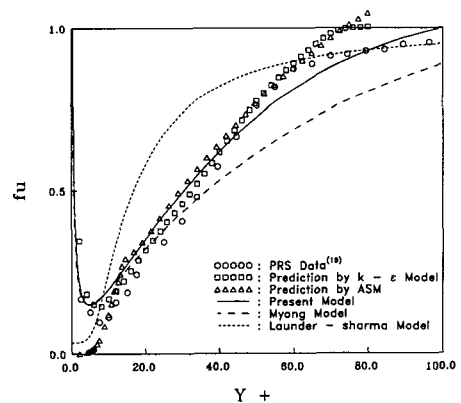


Fig. 1 Distribution of the function f_{μ} near the wall

기초로 하여 현재 계산된 $f\mu$ 값이 $y^+=70$ 이상에서 1보다 크게 유지되고 있으며 원관 및 평행평판 유동에서 평균속도 분포나 난류 특성들을 비교적 정확히 예측해 주고 있는 Myong 모형도 고레이놀즈수 영역에서 $f\mu$ 가 1보다 크게 계산되고 있는 것으로 보아 고레이놀즈수 구역에서 $C\mu$ 가 0.09보다 큰 값으로 계산되는 것이 분명 요구되어 진다.

따라서 최종적으로 $C\mu$ 의 수정계수는

$$f\mu = 1.06 \times \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{47.4}{R_t}} \right) \tanh\left(\frac{y^+}{60}\right) \quad (24)$$

로 얻어진다. 이 식이 본 연구에서 유도한 저레이놀즈수 영역에서의 $C\mu$ 에 대한 수정계수 식이다. Fig. 1은 본 연구에서 유도한 $f\mu$ 의 모형과 Myong의 모형, (9) Launder와 Sharma(7)의 모형 및 Laufer의 실험값을 이용한 $f\mu$ 의 분포(19),(26)를 y^+ 의 함수로 나타내어 비교한 것이다.

2.3 $f\varepsilon_2$ 모형의 개선

다음은 ε 방정식 소멸항의 수정계수 $f\varepsilon_2$ 의 모형을 이론적으로 유도하자. 벽에 인접하여 $y \rightarrow 0$ 이 되면 ε 방정식은

$$\nu \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial y^2} = C_{\varepsilon_2} f_{\varepsilon_2} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (25)$$

나타낼 수 있다. 한편 벽면인접부에서 난류요동치 u, w, v 와 레이놀즈응력 uv , 난류운동에너지 k , 난류운동에너지소멸율 ε 를 벽면으로부터의 거리 y 의 함수로 나타내면

$$u = a_1 y + a_2 y^2 + \dots \quad (26)$$

$$w = b_1 y + b_2 y^2 + \dots \quad (27)$$

$$v = c_2 y^2 + c_3 y^3 + \dots \quad (28)$$

$$k = ay^2 + by^3 + \dots \quad (29)$$

$$\varepsilon = 2\nu a + 4\nu by + \dots \quad (30)$$

$$-uv = a_1 c_2 y^3 + (a_2 c_2 + a_1 c_3) y^4 + \dots \quad (31)$$

이고, 여기서

$$a = -(a_1^2 + b_1^2) / 2 \quad (32)$$

$$b = (a_1 a_2 + b_1 b_2) \quad (33)$$

로 나타낼 수 있다. 따라서 $y=0$ 일 때 식(25)와 차원적으로 동차방정식이 되기 위해서는

$$f_{\varepsilon_2} \propto y^2 \quad (34)$$

이어야 한다. 따라서 이 조건을 만족시키기 위해서

는 기존의 f_{ε_2} 에 대한 모형인

$$f_{\varepsilon_2} = \left(1 - C_{d1} \exp\left(-\left(\frac{R_t}{C_{d2}}\right)^2\right) \right) \quad (35)$$

에 감쇄함수 $(1 - \exp(-\frac{y^+}{C_d}))^2$ 을 곱해주어야 한다.

f_{ε_2} 에 대한 기준모형을 Lanuder와 Sharma모형(7)으로 택하여 $C_{d1}=0.3$, $C_{d2}=1.0$ 으로 할 경우 수정된 f_{ε_2} 모형은

$$f_{\varepsilon_2} = (1 - 0.3 \exp(-R_t^2)) (1 - \exp(-\frac{y^+}{C_d}))^2 \quad (36)$$

이 된다. 다음은 식(36)의 C_d 를 이론적으로 구해 보자.

식(25)는 무차원수를 사용하여

$$\frac{\partial^2 \varepsilon^+}{\partial y^{+2}} = C_{\varepsilon_2} f_{\varepsilon_2} \frac{\varepsilon^{+2}}{k^+} \quad (37)$$

으로 나타낼 수 있으므로 C_d 는 만약 $\partial^2 \varepsilon^+ / \partial y^{+2}$, ε^+ 및 k^+ 가 알려지면 구할 수가 있게 된다.(20)

원관에 대해 Laufer(25)가 제시한 실험값을 이용하여 벽면부근에서 k^+ 및 ε^+ 를 고차항의 함수로 나타내면 다음과 같다.

$$k^+ = 0.05 y^{+2} \quad (38)$$

$$\varepsilon^+ = 0.09575 + 0.1145 y^+ + 0.00575 y^{+2} \quad (39)$$

식(38), (39)를 식(37)에 대입하여 계산하면

$$C_d = 4.63 \quad (40)$$

이 이론적으로 얻어진다. 이 C_d 값을 선정하는데 있어서 무엇보다도 가장 중요한 것은 벽면부근에서의 Laufer 실험값을 얼마나 정확하게 고차항의 함수로 표현할 수 있는냐는 것이다. 본 연구에서는 실험값들을 연결하는 가상선을 취해 고차항의 계수들을 구하였으며 이 가상선에 대한 타당성 검토는 C_d 값을 임의로 바꾸어가며 관 유동에 대한 계산을 반복 수행하여 최적의 난류특성을 예측토록 하는 즉, 전산최적화로 구한 C_d 값과의 오차가 어느 정도인가로 판단하였는데, 이렇게 구한 두 값들이 거의 일치하였기에 본 연구에서의 C_d 값 결정방법은 충분한 타당성을 갖고 있다고 하겠다.

따라서 본 연구에서의 C_d 값 결정과정이 Myong의 연구에서와 다른점은 Myong의 연구에서는 C_d 값을 결정할 때 단순히 전산최적화법에 의해서 구하였는데 반하여 본 연구에서는 이 값을 Laufer의

실험값을 근간으로 하여 이론적으로 유도하여서 난류모형의 일반성을 증진시킨데 있다.

2.4 압력확산항 모형의 유도

본 연구의 와점성계수모형을 쓸 경우 y^+ 가 40 이하에서 k 의 분포가 실험치보다 약간 낮게 예측되는데 그 원인의 하나로 생각되는 것은 난류운동에너지 방정식의 확산항 모형에서 압력확산항을 무시한데 있지 않나 생각된다. 난류운동에너지방정식의 난류확산항은 일반적으로

$$u_i \left(\frac{u_i u_j}{2} + \frac{p}{\rho} \right) = \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \tag{41}$$

같이 모형화⁽⁷⁾하는데, 이것은 압력확산항 $u_i \frac{p}{\rho}$ 의 효과를 무시하고 그 효과를 모두 $u_i \frac{u_j u_j}{2}$ 의 모형에 흡수시킨 것이다. 그러나 Shih와 Lumley,⁽²³⁾ Lumley⁽²⁴⁾에 의하면 벽면에서 멀리 떨어진 고레이놀즈수 영역에서는 압력확산항이 $\frac{u_i u_j u_j}{2}$ 보다 작아서 무시할 수 있으나 벽면에 가까와지면 이항이 오히려 $\frac{u_i u_j u_j}{2}$ 항보다 커지게 되어 이 항을 무시해서는 안되며 이 항의 크기는 벽으로부터의 거리 y 에 비례한다고 하였다. 압력확산항(II)을 고려할 경우 난류 운동에너지의 이송방정식은

$$U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + \text{II} + \nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_j}{\partial x_i} - \epsilon \tag{42}$$

이 된다. Shih와 Lumley⁽²³⁾가 제안한 II에 대한 모형식은 너무 복잡할 뿐 아니라 경험에 바탕한 식이어서 이론적 근거가 확고치 못하다. 이에 따라 이 모형이 복잡한 유동의 예측에서도 정확히 적용될 수 있는지에 대한 확증을 얻을 수 없다. 본 연구에서는 II의 모형을 좀 더 이론적으로 유도하였다. 식(42)의 y 가 0에 접근하는 경우 이송방정식의 각항들의 크기를 비교하면 대류항, 난류확산항, 난류에너지 생성항은 그 크기가 상대적으로 작아서 무시할 수 있다고 가정하면 난류운동에너지 방정식은

$$\nu \frac{\partial^2 k}{\partial y^2} + \text{II} - \epsilon = 0 \tag{43}$$

과 같이 나타낼 수 있다. 난류운동에너지와 난류운

동에너지 소멸율은 벽면인접부에서 식(29), (30)과 같이 나타내지는데 y 가 0에 접근하는 경우에는 일반적으로 난류모형의 개발에서 고차항들을 무시하고

$$k = ay^2 \tag{44}$$

$$\epsilon = 2av \tag{45}$$

를 가정하여 사용한다. 그러나 압력확산항의 효과를 고려하기 위해서는 식(44), (45)에 고차항을 하나 더 고려하여

$$k = ay^2 + by^3 \tag{46}$$

$$\epsilon = 2av + 4bvy \tag{47}$$

를 사용하여야 한다. 식(46), (47)를 식(43)에 대입하면

$$\text{II} = -2bvy \tag{48}$$

이 얻어진다. 한편 식(47), (48)을 식(43)에 대입하면

$$\nu \frac{\partial^2 k}{\partial y^2} = 2av + 6bvy \tag{49}$$

이 되므로 식(48), (49)와 $\epsilon_w = 2av$ 의 관계식에서

$$\text{II} = \frac{1}{3} \left(\epsilon_w - \nu \frac{\partial^2 k}{\partial y^2} \right) \tag{50}$$

이 얻어진다. 그러나 식(50)의 II에 대한 모형은 벽면인접부에서만 적용가능한 식이지 고레이놀즈수 구역에서는 적용할 수 없다. 왜냐하면 식(46), (47)의 k - ϵ 에 대한 가정은 벽면인접부에서만 적용될 수 있는 가정이기 때문이다. 따라서 II의 모형이 고레이놀즈수 영역에서 난류모형의 극한특성을 갖도록 하기 위해서 $(1 - \exp(-y^+))/y^+$ 를 곱해주면

$$\text{II} = \frac{1}{3} \left(\epsilon_w - \nu \frac{\partial^2 k}{\partial y^2} \right) \frac{(1 - \exp(-y^+))}{y^+} \tag{51}$$

이 된다. 식(51)이 본 연구에서 사용한 압력확산항에 대한 모형이다. 이 모형은 y^+ 가 커지면 자동적으로 0으로 수렴하므로 압력확산항의 고레이놀즈수 극한 특성을 만족시킨다. 압력확산항의 모형으로 본 연구에서는 식(51)을 유도했으나 이 식은 엄밀히 말해서 압력확산항뿐만 아니라 확산항과 생성항의 고차항들도 포함될 것으로 생각된다.

본 연구에서의 난류모형을 실제유동 해석에 적용할 때 큰 문제가 되는 것은 y^+ 의 계산이다. y^+ 는 2차원 평판유동이나 원관유동에서는 쉽게 계산할

수 있으나 재순환유동이 일어나는 유동 등 복잡한 유동 등에서는 계산하기 어렵다. 이 문제를 해결하기 위해서 본 연구에서는 평행평판 유동에 대한 Laufer⁽²²⁾의 실험결과를 사용하여 y^+ 를 난류레이놀즈수 R_t 의 함수로 나타내었고 그 결과는 Fig. 2와 같다.

본 연구에서는 이 실험값들을 하나의 곡선으로 나타내기에는 어려워서 그림에 나타나 있는 바와 같이 2개의 곡선식으로 나타내어 그 중 큰값을 사용하였다.

$$y^+ = 2.31 R_t^{1/3} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{47.9}{R_t}} \right)^{1/3} \quad (52)$$

$$y^+ = 0.1125 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{47.4}{R_t}} \right) R_t$$

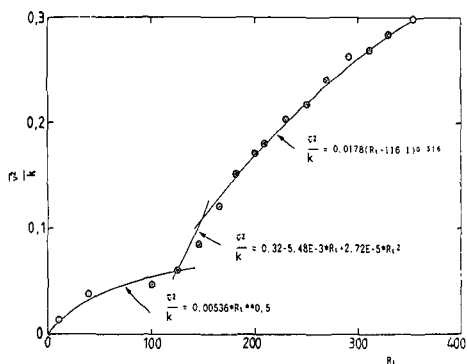


Fig. 2 $\frac{v^2}{k} - R_t$ relation in channel flow

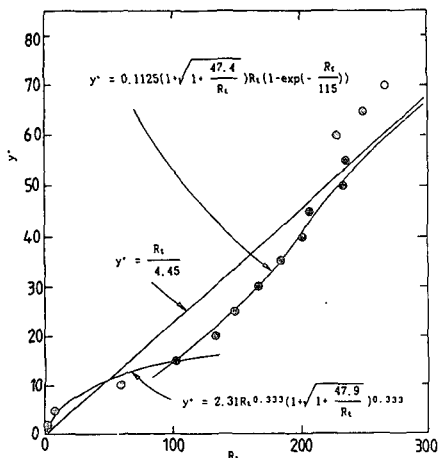


Fig. 3 $R_t - y^+$ relation in channel flow

$$\left(1 - \exp\left(-\frac{R_t}{115}\right) \right) \quad (53)$$

Fig. 2에서 직선 $y^+ = R_t/4.45$ 는 혼합거리 모형에서 이론적으로 유도된 관계식으로 본 연구에서의 y^+ 에 대한 관계식 (53)은 R_t 가 커질 때 이 직선에 접근하도록 하였다.

2.5 난류 운동에너지 프란틀수 σ_k 및 난류 운동에너지소멸율 프란틀수 σ_ϵ 의 결정

Myong의 저레이놀즈수 $k-\epsilon$ 모형에서는 난류 운동에너지의 프란틀수 σ_k 를 1.4로 설정한 데 반하여 본 연구의 저레이놀즈수 $k-\epsilon$ 모형에서는 σ_k 를 k 방정식에 대한 대수응력 방정식의 표현을 빌려 사용하였는데 이 값은 고레이놀즈수 영역에서 1.0으로 계산되므로 $k-\epsilon$ 표준모형 계수와 다를바가 없다. Myong 모형에서 σ_k 를 $k-\epsilon$ 표준모형의 계수⁽¹³⁾ 1.0으로 하지 않고 1.4로 한 이유로 생각되는 것은 그렇게 하지 않을 경우 y^+ 가 큰 원관 중심부의 고레이놀즈수 영역에서 k 값의 예측치가 실험치보다 약간 크게 예측되었기 때문인 것으로 판단된다. 그러나 σ_k 를 1.4로 변화시킴으로써 시험유동인 원관 유동에서의 k 값의 분포는 잘 예측할 수 있으나 저레이놀즈수 난류모형이 갖추어야 할 기본요건이라고 할 수 있는 고레이놀즈수 영역에서의 극한 특성은 만족되지 않는다. 즉 이 모형을 고레이놀즈수로 극한시키는 경우 고레이놀즈수 표준모형과 그 계수들이 달라지게 된다. 그에 따라 이 모형을 난류 운동에너지 프란틀수를 변경시키지 않은 상태에서 더 일반적인 복잡한 3차원 난류 유동해석에 그대로 정확히 적용할 수 있는지 여부가 확실치 않다.

본 연구에서는 일반적인 $k-\epsilon$ 모형에서 사용하는 $\sigma_k = 1.0$, $\sigma_\epsilon = 1.3$ 대신에 보다 일반적인 유동장에서 사용이 가능하며 또한 고레이놀즈수 영역에서 극한 특성을 만족 시키도록 대수응력 방정식에서 결정되는 σ_k 및 σ_ϵ 분포를 설정하여 해석에 적용하였다.

이 경우

$$\sigma_k = \frac{C_{\mu 0} f \mu}{C_{k1} \bar{v}^2 / k} \quad (54)$$

$$\sigma_\epsilon = \frac{C_{\mu 0} f \mu}{C_\epsilon \bar{v}^2} / k \quad (55)$$

으로 표현되는데 \bar{v}^2/k 은 Fig. 3에 나타난 값들을 사용하였으며, $C_{k1} = 0.22$, $C_\epsilon = 0.17$, $C_{\mu 0} = 0.09$

이다. 이렇게 구한 σ_k , σ_ϵ 값들은 벽면부근의 저레이놀즈수 영역에서 가장 값들이 크고 고레이놀즈수 영역으로 갈수록 $\sigma_k=1$, $\sigma_\epsilon=1.3$ 으로 고정되기 때문에 고레이놀즈수 구한 특성을 만족 시키므로 기존 $k-\epsilon$ 모형에서 사용하는 σ_k 및 σ_ϵ 과 큰 차이는 없으나, 벽면 부근에서 보다 정확한 σ_k 및 $\sigma_{k\epsilon}$ 을 제시해 줄 것으로 기대되어 이 값들을 사용하였다.

3. 검증결과 및 고찰

3.1 저레이놀즈 수난류모형의 시험을 위한 유동모형

본 연구에서 개선한 저레이놀즈수 난류모형들의 정확성을 시험하기 위해서 본 연구에서 개발된 모형과 과거의 난류모형을 사용하여 원관유동을 해석함으로써 평균속도 분포, 난류 운동에너지분포, 난류 운동에너지 소멸율분포, 레이놀즈응력 분포 등의 예측결과를 비교하였다.

Fig. 4는 원관유동의 유로형상을 나타낸다. 주유동방향속도를 U , 벽면에 수직한 방향속도를 V , 지면에 수직한 방향속도를 W 라 하였다. 한편, 시험은 완전발달된 유동에 대해서 하였고, 레이놀즈수는 원관 중심속도를 기준으로 하여 50,000으로 고정하였으며 그 해석결과를 Laufer⁽²⁵⁾의 실험결과, 그리고 Myong 등의 해석결과와 비교하였다. 시험한 원관유동의 반경은 0.05 m이었다.

3.2 검증결과 및 고찰

본 연구에서는 개선된 저레이놀즈수 $k-\epsilon$ 모형(이하에서는 본 $k-\epsilon$ 모형이라 한다)의 정확성을 검증하기 위해서 먼저 중심속도를 기준으로 계산한 레이놀즈수(Re_c)가 50,000인 완전발달된 원관유동에 대한 해석을 하여 얻어진 각종 난류특성과 속도분포를 Laufer의 실험결과, 그리고 Myong 모형에 의한 해석결과, 혼합거리 모형에 의한 해석결과, Launder-Sharma 모형(이하에서는 $L-S$ $k-\epsilon$ 모형이라 한다)에 의한 해석결과와 비교하였다.

Fig. 5는 본 $k-\epsilon$ 모형에 의해 예측한 난류운동에너지의 분포를 나타낸다. 실선은 압력확산항을 고려하여 해석한 경우이고, 점선은 고려하지 않은 경우이다. 이 그림은 y^+ 가 40이하에서 압력확산항을 고려한 경우가 고려하지 않은 경우보다 k 의 분포가 실험치에 잘 일치하며 y^+ 가 40이상에서는 압력확산항을 고려하지 않은 결과가 더 잘 일치함을

알 수 있다. 그러나 난류 유동속도분포를 정확히 예측하는데 더 큰 영향을 미치는 것은 y^+ 가 40이하인 벽면인접부이므로 난류유동의 해석에서 압력확산항을 고려하는 것이 더 정확한 유동해석을 위해서 유리하다는 것을 알 수 있다.

Fig. 6은 y^+ 가 80이하에서의 여러 난류모형에 의한 예측결과를 비교한 것이며 Fig. 7은 이 k 분포를

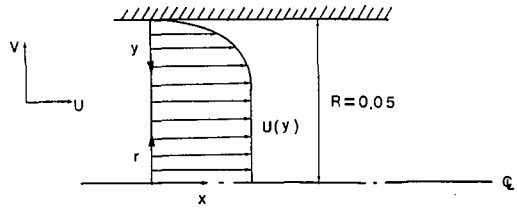


Fig. 4 Geometry of a tested pipe

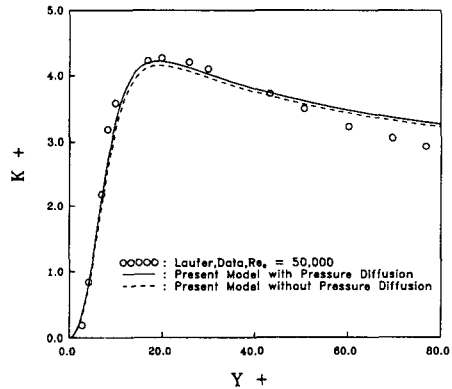


Fig. 5 Distribution of a turbulent kinetic energy in the wall region for pipe flow at $Re_c=50,000$

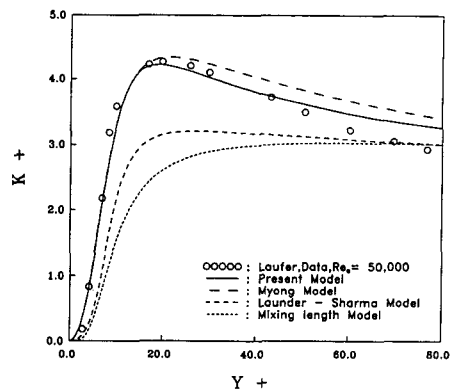


Fig. 6 Distribution of a turbulent kinetic energy in the wall region for pipe flow at $Re_c=50,000$

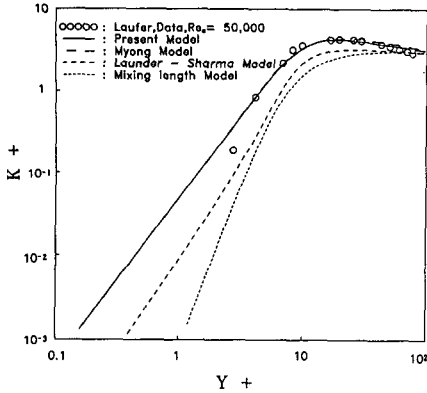


Fig. 7 Near-wall limiting behavior of turbulent kinetic energy in pipe flow at $Re_c=50,000$

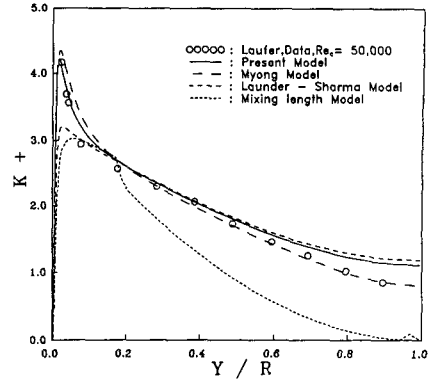


Fig. 8 Distribution of a turbulent kinetic energy in pipe flow at $Re_c=50,000$

대수도표에 나타낸 것이다. y^+ 가 80이하에서 $L-S$ $k-\epsilon$ 모형과 혼합거리 모형은 k 값의 분포를 실험결과보다 매우 낮게 예측하고 있어서 정확성이 크게 떨어짐을 나타내고 있다. 그러나 본 $k-\epsilon$ 모형과 Myong의 모형은 거의 같은 분포를 예측해 주나, 본 $k-\epsilon$ 모형이 좀더 실험치에 가깝다. 난류 유동 해석에서 정확한 국부평균 속도 분포의 예측을 위해서 가장 중요한 것은 y^+ 가 80이하, 특히 y^+ 가 40 이하에서의 k 분포와 ϵ 분포라고 할 수 있는데 본 $k-\epsilon$ 모형에 의한 해석결과가 과거의 모형들에 의한 해석결과 보다 y^+ 가 80이하에서 k 분포 예측을 잘해주었다 하는 것은 모형의 개선을 나타낸다. 특히 본 $k-\epsilon$ 모형에서는 y^+ 가 80 이하에서 k 분포를 실험치에 접근시키기 위해서 k 의 난류프란틀수 σ_k 를 Myong 모형에서와 같이 변화시키지 않고 고레이놀즈수 영역에서 표준모형 상수로 접근하는 σ_k 를 사용하고자도 좋은 결과를 얻었다는 데 의의가 있으며 이것은 본 모형의 일반성을 증진시키는 데 큰 역할을 하였다.

Fig. 8은 원관의 전단면에 대한 k 의 분포를 나타낸 것이다. 이 그림에 의하면 혼합거리 모형은 전구역에서 k 분포의 예측에 부정확성을 크게 해줄 수 있다. $L-S$ $k-\epsilon$ 모형은 y/R 이 0.1 이하에서는 실험결과보다 매우 낮은 k 분포를 예측해 주었으나, 그 이상에는 본 $k-\epsilon$ 모형과 거의 같은 k 분포를 예측하고 있으며 y/R 이 0.1보다 크고 0.4보다 작은 구역에서는 실험치와 잘 일치하고 있다. 따라서 $L-S$ $k-\epsilon$ 모형은 저레이놀즈수 영역과 고레이놀즈수 영역의 중간 천이영역에서는 비교적 정확한 예측값을 주나 저레이놀즈수 영역 및 원관 중

심부의 고레이놀즈수 영역에서는 그 정확성이 떨어지는 것을 알 수 있다. 한편 Myong의 모형에 의한 해석결과는 y/R 이 0.2이하에서는 본 $k-\epsilon$ 모형에 의한 해석결과보다 약간 부정확하지만 y/R 이 0.2 이상에서는 실험치에 비교적 잘 일치하는 결과값을 예측해 주고 있다. 이것은 Myong 모형에서 σ_k 를 1.4로 높임으로써 y/R 이 0.2 이상에서의 k 분포를 본 $k-\epsilon$ 모형보다 더 정확히 예측할 수 있었던 것으로 생각되나 y/R 이 0.2 이하에서는 실험값보다 큰 값을 예측해 주고 있어서 벽면부근의 저레이놀즈수 영역에서 정확성이 떨어지는 것을 나타내고 있다고 하겠다. 본 $k-\epsilon$ 모형은 y/R 이 0.4 이하에서는 실험값에 잘 일치하나 0.4 이상에서는 실험값과 약간의 차이를 두고 있다. y/R 이 0.4 이하에서 k 분포가 실험값에 잘 일치하는 이유는 C_μ 의 수정계수 f_μ 를 Laufer의 실험결과를 이용하여 비교적 f_μ 의 값을 잘 맞추었기 때문인 것으로 판단된다. y/R 이 0.4보다 큰 영역에서는 k 값이 실험값보다 크게 예측되는 것은 $L-S$ $k-\epsilon$ 모형도 마찬가지인데 여기에는 2가지 원인이 있다고 생각된다. 첫번째는 C_μ 의 수정계수 f_μ 가 고레이놀즈수 영역에서 1로 수렴되기 때문에 생기는 원인인데 이것은 결론부터 말하면 고레이놀즈수 영역에서 f_μ 가 1로 수렴함으로써 k 분포의 예측치를 실험값보다 크게 예측하는 결과를 초래 한다는 것이다. Fig. 8의 원관의 전구간에서 k 값을 보면 고레이놀즈수 영역에서 같은 난류상수를 사용한 $L-S$ $k-\epsilon$ 모형보다 본 $k-\epsilon$ 모형이 낮은 값을 예측하고 있으나 이는 본 $k-\epsilon$ 모형에서 f_μ 가 1.06 정도로 고레이놀즈수 영역에서 수렴되기 때문이다. 그러나 f_μ

는 1로 수렴해야 하는 특성을 갖고 있기 때문에 고 레이놀즈수 영역에서 C_{μ} 가 0.09보다 커질 것이 요구되며 전 유동장에서 평균값으로서의 C_{μ} 가 0.09로 유지되어야 하는 것을 전제로 할 때 f_{μ} 가 1보다 크다고 해서 큰 무리가 있다고 생각되지는 않는다. 두번째는 난류운동에너지 프란틀수 σ_k 를 낮은 값으로 선정함으로써 난류확산의 증가에 따라 예측값의 k 분포가 커지는 원인이 된다. 이것은 Myong 모형과 마찬가지로 본 $k-\epsilon$ 모형에서의 σ_k 분포를 1.4배 증가시키면 Fig. 9에서와 같이 고레이놀즈수 영역에서도 본 $k-\epsilon$ 모형이 실험치 및 Myong 모형과 비교적 잘 일치하는 결과를 보여주고 있기 때문이다.

전체적으로 볼 때 Myong 모형이 고레이놀즈수 영역에서 실험값에 잘 일치하는 이유는 고레이놀즈수 영역에서 f_{μ} 가 1.1 정도로 계산되고 있으며 난

류 운동에너지 프란틀수 σ_k 를 1.4로 사용하였기 때문인 것으로 판단되어진다. 그러나 본 $k-\epsilon$ 모형은 모든 상수들이 고레이놀즈수 영역에서 난류 극한 특성을 만족시키며 저레이놀즈수 영역에서는 어떤 모형보다도 실험치에 잘 일치하는 결과를 가져왔기 때문에 과거의 모형보다 개선된 효과를 충분히 갖고 있다고 본다. 따라서 현재의 본 $k-\epsilon$ 모형이 더욱 개선되기 위해서는 고레이놀즈수 영역에서 C_{μ} 의 변화와 σ_k 의 실제 분포도에 대한 분명한 규명이 선행되어야 할 것이다.

Fig. 10과 Fig. 11은 레이놀즈응력 \overline{uv} 에 대한 예측결과를 비교한 것이다. Fig. 10은 y^+ 가 80 이하에서 압력확산항을 고려할 때와 고려하지 않을 때를 비교한 것이다. 이 그림에 의하면 y^+ 가 40 이하에서는 압력확산항을 고려하지 않을 때가 더 정확하고 그 이상에서는 고려할 때가 더 정확하나 두

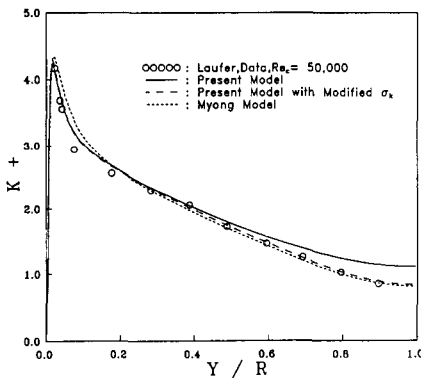


Fig. 9 Distribution of a turbulent kinetic energy in pipe flow at $Re_c=50,000$

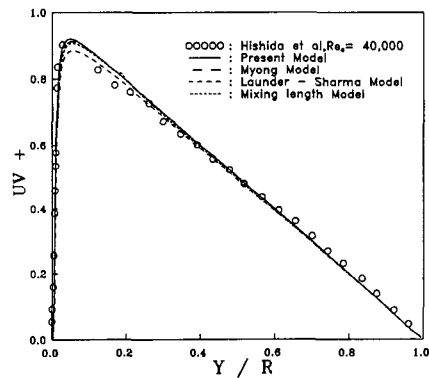


Fig. 11 Distribution of Reynolds stress in pipe flow at $Re_c=50,000$

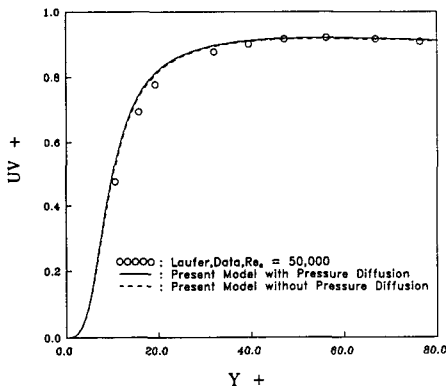


Fig. 10 Distribution of a Reynolds stress in the wall region for pipe flow at $Re_c=50,000$

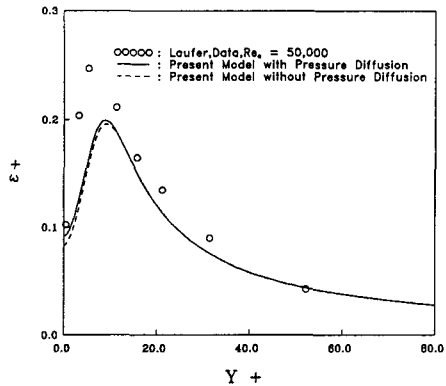


Fig. 12 Distribution of dissipation rate near the wall in pipe flow at $Re_c=50,000$

예측 결과값들의 차이는 거의 없기 때문에 압력확산항의 고려여부가 \overline{uv} 값에 대한 예측에 큰 영향을 주지는 않는다는 것이 분명하다.

그러나 Fig. 11에 나타나 있는 원관의 전단면에서의 \overline{uv} 응력의 예측결과를 Hishida의 실험값⁽²⁷⁾과 Myong 모형 $L-S$ $k-\epsilon$ 모형 그리고 혼합거리 모형에 의한 해석결과와 비교하면 본 해석결과는 Myong 모형에 의한 해석결과와 비슷한 결과를 주었으나 제시된 모형 모두는 실험값에 비교적 잘 일치하는 결과를 주었다. 따라서 \overline{uv} 분포만이 평균속도 예측에 직접 영향을 미치지 때문에 모든 모형이 난류특성들을 제외한 평균속도 분포를 예측하는데 있어서는 큰 차이가 없다고 하겠다.

Fig. 12는 난류 운동에너지 소멸율에 대한 본 $k-\epsilon$ 모형에 의한 해석결과를 나타낸다. 실선은 압력확산항을 고려한 경우이고 점선은 고려하지 않은 경우이다. 실험결과는 Laufer의 측정결과를 Townsend⁽²⁸⁾가 수정한 것이다.

Laufer⁽²⁵⁾의 원래 자료에는 $\nu\epsilon/U_r^4$ 이 벽에서 0으로 나와 있는데, 이것은 ϵ 이 벽에서 유한한 값을 갖는다는 일반적인 난류이론과 상치되어 옳지 않으며 Townsend가 수정한 결과는 $\nu\epsilon/U_r^4$ 가 0.1로 되어 있어 물리적으로 더 합당하다고 생각해서 이 결과를 이용하였다. 이 그림에 의하면 압력확산항을 고려한 경우가 실험치에 더 잘 일치함을 알 수 있다.

이상의 $k, \overline{uv}, \epsilon$ 에 대한 예측결과와 비교를 통해서 압력확산항을 고려하는 것이 난류운동의 더 정확한 예측을 위해 유리하다고 판단되어 본 연구에서의 이후의 연구에서는 모두 압력확산항을 고려하였다.

Fig. 13은 난류 운동에너지 소멸율에 대한 각 모형에 의한 해석결과를 비교한 것이다. 난류운동에너지소멸율은 y^+ 가 80 이하에서 모형에 따라 큰 차이를 보이고 있다. 혼합거리 모형은 전체적으로 ϵ 분포를 실험치에서 크게 벗어나게 예측하고 있어 정확성이 떨어짐을 알 수 있다. Fig. 6과 Fig. 13에 의하면 혼합거리 모형은 y^+ 가 80 이하에서 k 분포와 ϵ 분포를 모두 부정확히 예측하고 있다. 이것은 2차원 유동해석에서는 혼합거리 모형은 \overline{uv} 를 비교적 정확히 예측해 줌으로써 속도분포 예측은 비교적 정확히 해줄 수 있으나 기타의 난류특성 예측은 부정확하여 복잡한 2차원 유동이나 3차원 유동에서는 그 유동 예측의 정확성이 보장되지 않아서 이

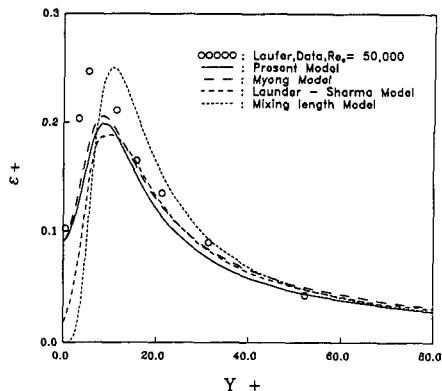


Fig. 13 Distribution of dissipation rate near the wall in pipe flow at $Re_c=50,000$

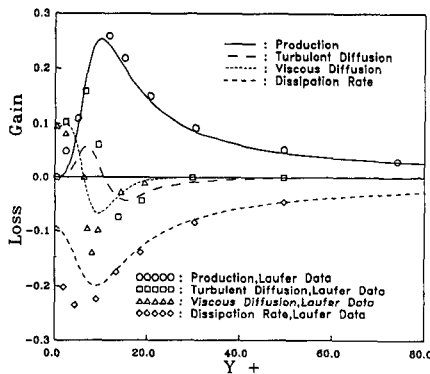


Fig. 14 Comparison of predicted energy budgets in the near wall region for pipe flow with Laufer's data⁽²⁵⁾

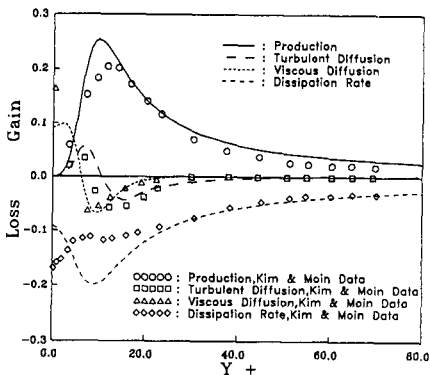


Fig. 15 Comparison of predicted energy budgets in the near wall region for pipe flow with Kim and Moin's prediction⁽²⁹⁾ by large eddy simulation

모형 적용에 대한 일반성이 크게 떨어지게 된다. $L-S$ $k-\epsilon$ 모형은 y^+ 가 15 이상에서는 ϵ 값을 비교적 정확히 예측하였으나 그 이하에서는 실험치보다 낮게 예측하였다. 반면, 본 $k-\epsilon$ 모형은 Myong 모형과 거의 유사한 결과를 보여 주었으나, y^+ 가 50 이하에서는 Myong 모형보다 낮게 예측하여서 실험치와의 차이가 더 커졌으나 y^+ 가 50 이상에서는 본 모형이 실험값에 더 잘 일치하는 결과를 보여주고 있다.

이상의 결과를 종합해보면 Myong 모형은 y^+ 가 80 이상에서 난류특성들을 비교적 정확하게 예측해 준 반면 $L-S$ $k-\epsilon$ 모형 및 혼합거리 모형은 \overline{uv} 를 제외하고는 전영역에서 난류특성들을 부정확하게 예측해 주었다. 그러나 본 $k-\epsilon$ 모형은 국부적으로 실험값과 차이가 있지만 전반적으로 y^+ 가 80보다 작은 영역에서 난류특성을 비교적 정확히 예측해 주었고 그 정확도는 과거의 모형보다 향상되었다. 특히 본 $k-\epsilon$ 모형에서는 모형상수들의 유도과정이 과거 모형들보다 확고한 이론적 근거를 가지고 있고 고레이놀즈수 극한특성도 만족되어 모형의 일반성도 크다는 것을 나타내준다.

Fig. 14, Fig. 15는 난류 운동에너지 방정식의 구성비율에 대한 본 $k-\epsilon$ 모형에 의한 예측결과를 Laufer⁽²⁵⁾의 실험결과, Kim-Moin⁽²⁹⁾의 대형와류모사법에 의한 해석결과와 비교한 것이다. Fig. 14를 살펴보면 본 해석결과는 난류운동에너지 생성항이 전구역에서 실험치와 잘 일치하고 있으며, 난류 운동에너지 소멸율항은 y^+ 가 15 이하에서 약간의 차이를 보이나 그 이상에서는 실험치와 잘 일치하고 있다. 점성확산항도 비교적 실험치와 잘 일치하나 난류확산항은 벽면인접부에서 차이가 크다. 그러나 y^+ 가 아주 작은 부근에서 난류확산항의 측정이 대단히 어렵기 때문에 그 측정결과들이 완전히 정확하다고 볼 수 없어서 이 그림만으로는 난류확산항 예측값에 대한 정확성을 논하기 어렵다. 실험결과와 부정확도를 고려할 때 전반적으로 본 $k-\epsilon$ 모형에 의한 난류 운동에너지 구성비율 예측의 정확도는 만족스럽다고 생각된다.

Fig. 15는 Kim-Moin의 해석결과와의 비교인데, 이 그림에서는 오히려 난류확산항과 점성확산항의 예측결과가 Kim-Moin의 해석결과와 잘 일치하고 있고 난류 운동에너지 생성항과 소멸율에는 오히려 차이가 크다. 난류 운동에너지 구성비율 예측의 정확도를 고찰할 때 Fig. 14와 Fig. 15를 함께 고려해

서 판단해야 하겠지만 Fig. 15 역시 해석결과이기 때문에 Fig. 14에 있는 실험결과와의 비교를 더 비중을 두어 해석하여야 할 것이다.

4. 결 론

본 연구에서는 벽면인접부의 저레이놀즈수 영역에 적용될 수 있는 정확성과 일반성이 큰 저레이놀즈수 난류모형의 개선을 위하여 과거의 저레이놀즈수 $k-\epsilon$ 모형을 개선하는데 관한 연구를 하였다. 먼저 와점성계수의 수정계수를 과거의 모형들보다 더 확고한 이론적근거에 바탕하여 유도하였고 난류 운동에너지소멸율 방정식의 소멸항의 수정계수도 이론적으로 유도하여 전산최적화 과정을 없게 하였으며 벽면인접부에서 난류운동에너지의 압력확산항을 고려하였다. 개선된 저레이놀즈수 $k-\epsilon$ 모형의 정확성을 검증하기 위해서 원관유동을 시험유동으로 해석하여 그 결과를 과거의 모형들을 사용한 해석결과, Laufer의 실험결과와 비교함으로써 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 본 해석에서 개선된 저레이놀즈수 $k-\epsilon$ 모형은 y^+ 가 80 이하의 원관유동에서 난류운동에너지 소멸율을 제외하고 난류운동에너지, 레이놀즈응력 등의 예측에서 전반적으로 Laufer-Sharma 모형, Myong 모형보다 실험치에 잘 일치하는 개선된 결과를 보여 주었으며 국부적으로는 과거의 모형보다 부정확한 결과를 주었으나 k 분포에 대해서는 y^+ 가 80 이하인 벽면인접부의 저레이놀즈수 구역에서는 과거의 모형보다 월등히 우수하였다.

(2) 혼합거리 모형은 원관유동의 난류특성 예측에서 전반적으로 부정확한 결과를 주었다.

(3) Laufer-Sharma의 저레이놀즈수 $k-\epsilon$ 모형은 대체적으로 y^+ 가 40 이상 80 이하인 저레이놀즈수와 고레이놀즈수의 중간 천이구역에서 난류특성을 정확히 예측해준 반면 Myong 모형은 y^+ 가 80 이상에서 정확성이 우수하였다.

(4) 본 연구에서의 저레이놀즈수 $k-\epsilon$ 모형의 개선은 모형상수들의 선정과정이 과거의 저레이놀즈수 $k-\epsilon$ 모형보다 합리적이며 전산최적화를 적게 사용하였고 원관유동에서의 난류특성 예측에서 과거의 저레이놀즈수 $k-\epsilon$ 모형에서보다 전반적으로 향상된 결과를 보여주어 일반성이 큰 난류모형이라 할 수 있다.

후 기

이 연구는 한국과학기술연구원 터보기체실과 한국기계연구소 유체연구실의 지원으로 이루어진 것이며 이에 깊은 사의를 포함한다.

참고문헌

- (1) Launder, B.E., 1982, "Modelling of Turbulent Flow in Gas-Turbine Blading: Achievement and Prospects," *Int. J. Heat and Fluid Flow*, Vol. 3, No.4., pp. 171~184.
- (2) Launder, B.E., 김명호, 문찬, 최영돈, 1988, "180°곡관을 갖는 정사각단면덕트에서의 난류유동 해석," *대한기계학회논문집*, 제12권, 제3호, pp. 607~621.
- (3) Choi, Y.D. Iacovides, H. and Launder, B.E., 1989, "Numerical Computation of Turbulent Flow in a Square Sectioned 180 Deg. Bend," *Trans of ASME, J. of Fluids Eng.*, Vol. 3, March, pp. 59~68.
- (4) Launder, B.E., 1989, "Second-Moment Closure: Present and Future?," *Int. J. Heat and Fluid Flow*, Vol. 10, No. 4, December, pp. 282~300.
- (5) 최영돈, Launder, B.E., 1985, "4각 단면의 180°곡관에서의 난류유동과 열전달 해석," *대한기계학회논문집*, 제9권, 제1호, pp. 91~108.
- (6) Jones, W.P. and Launder, B.E., 1972, "The Prediction of Laminarization with a Two-Equation Model of Turbulence," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 15, pp. 301~314.
- (7) Launder, B.E. and Sharma, B.I., 1974, "Application of the Energy Dissipation Model of Turbulence to the Calculation of Flow near a Spinning Disc," *Lett. Heat Mass Transfer*, Vol. 1, pp. 131~138.
- (8) Lam, C.K.G. and Bremhorst, K.A., 1981, "Modified Form of the $k-\epsilon$ Model for Predictiong Wall Turbulence," *Trans. ASME, J. Fluids Engng.*, Vol. 103, pp. 456~460.
- (9) Myong, H.K., 1988, "Fundamental Studies on Two-Equation Turbulence Model for Numerical Predictions of Wall-Bounded Shear Flow and Heat Transfer," Phd. Thesis, Tokyo University.
- (10) Shima, N., 1988, "Reynolds-Stress Model for Near-Wall and Low Reynolds Number Regions," *J.Fluids Engng.*, Vol. 10, pp. 38~44.
- (11) Hanjalic, K. and Launder, B.E., 1976, "Contribution Towards a Reynolds-Stress Closure for Low-Reynolds-Number Turbulence," *J. Fluids Mech.*, Vol. 74, Part 4, pp. 593~610.
- (12) Launder, B.E. and Shima, N., 1989, "Second Moment Closure for the Near Wall Sublayer: Development and Application," *AIAA Journal*, Vol. 27, No. 10, October, pp. 1319~1325.
- (13) Launder, B.E., Reece, G.J. and Rodi, W., 1975, "Progress in the Development of a Reynolds Stress Turbulence Closure," *J. Fluid Mechanics*, Vol. 68, pp. 537~566.
- (14) Myong, H.K., Kasagi, N. and Hirata, M., 1989, "Numerical Prediction of Turbulent Pipe Flow Heat Transfer for Various Prandtl Number Fluids with the Improved $k-\epsilon$ Turbulence Model," *JSME International Journal*, Vol. 32, No. 4, pp. 613~622.
- (15) Leslie, D.C., 1973, "Developments in the Theory of Turbulence," Oxford Press. p. 18.
- (16) Launder, B.E., Morse, A.P., Rodi, W. and Spalding, D.B., 1973, "Prediction of Free Shear Flows, A Comparison of the Performance of Six Turbulence Models," *Proc. Langley Free Shear Flows*, Conf. NASA Report SP 320, p. 361
- (17) Boussinesq, J., 1877, "Essay on the Theory of Flowing Water," French Academy of Sciences.
- (18) Norris, L.H. and Reynolds, W.C., 1975, "Turbulent Channel Flow with a Moving Wavy Boundary," *Stanford Univ., Dep. Mech. Eng. Rep. FM-10*.
- (19) Patel, V.C., Rodi, W. and Scheuerer, G., 1985, "Turbulence Models for Near-Wall and Low Reynolds Number Flows: A Review," *AIAA Journal*, Vol 23, No. 9, pp. 1308~1318.
- (20) Speziale, C.G., Abid, R. and Anderson, E.C., 1990, "A Critical Evaluation of Two-Equation

- Models for Near Wall Turbulence," NASA Contractor Report 182068, ICASE Report No. 90~46.
- (21) Reynolds, W.H. 1976, "Computation of Turbulent Flows," Annual Review of Fluid Mechanics, p. 8.
- (22) Laufer, J., 1951, "Investigation of Turbulent Flow in a Two Dimensional Channel," NACA Rept., p. 1053.
- (23) Shih, J.H. and Lumley, J.L., 1985, "Modeling of Pressure Correlation Terms in Reynolds Stress and Scalar Flux Equations," Report FDA-85-3, Sibley School of Mech. Aero. Engng, Cornell University.
- (24) Lumley, J.L., 1975, "Prediction Methods for Turbulent Flow: Introduction," Lecture Series No. 76, Von Karmann Inst., Rhode-st-Genese, Belgium.
- (25) Laufer, J., 1954, "The Structure of Turbulence in Fully Developed Pipe Flow," NACA Rept., p. 1174.
- (26) 김명호, 1991, "저레이놀즈수 난류모형 개발에 관한 연구," 고려대학교 박사학위 논문.
- (27) Hishida, M. and Nagano, Y., 1978, "Structure of Turbulent Temperature and Velocity Fluctuations in the Thermal Entrance Region of Pipe," Proc. 6th Int. Heat Transfer Conf., Toronto 2, pp. 531~536.
- (28) Townsend, A.A. 1976, "The Structure of Turbulent Shear Flow," 2nd Ed. Cambridge University Press.
- (29) Mansour, N.N., Kim, J. and Moin, P., 1988, "Reynolds-Stress and Dissipationrate Budgets in a Turbulent Channel Flow," J. Fluid Mech., Vol. 194, pp. 15~44.