

〈論 文〉

동적 구조물의 구조변화에 의한 진동해석 연구

현천성* · 이기형* · 정인성**

(1992년 5월 1일 접수)

A Study of Vibration Analysis due to Structural Changes of Dynamic Structure

Cheon Seong Hyun, Kee Hyung Lee and In Sung Chung

Key Words : Mass Identification (질량구명), Stiffness Matrix (강성행렬), Mobility Matrix (유동행렬), Incomplete Model (불완전모형), Pseudo Inverse Matrix (의사역행렬)

Abstract

This paper presents the theoretical development and qualitative evaluation of a new concept in the mathematical modeling of dynamic structures. We use both test data and analytical approximations to identify the parameters of an incomplete model. The model has the capability of predicting the response of the points of interest on the structure over the frequency range of interest and can be used to predict the changes in natural frequencies and normal modes due to structural changes. The theory was tested by running simulated tests on a relatively simple structure, identifying the parameters of the incomplete model, and using this model to predict the effects on frequency and mode shapes of several mass and stiffness changes. The conditions of the tests were varied by selecting different numbers of points of measurement, varying the frequency range, and by including assumed measurement error. It is recommended that the theoretical development be continued and that applications to more complex structures be carried out in order to develop a better understanding of the limitations and capabilities of the method. A successful, more definitive evaluation could lead to immediate practical applications.

기 호 설 명

A : 질량방정식에서 계수행렬	m_A : \bar{m} 에 대한 근사
B_R : 질량 구명에서 R 를 곱하는 행렬	m_T : 대각선 질량들의 합
B_m : 질량구명에서 m_A 를 곱하는 행렬	\bar{m} : M 의 미지요소들로 구성되는 벡터
C : 영향계수 행렬	N : 모드수
f : 힘벡터	n_e : 방정식 수
g : 구조 감쇄계수	n_v : 변수들의 수
K : 강성행렬	P : 관심점들의 수
M : 질량행렬	R : 질량방정식의 우항
m_i : i 번째 모드의 일반행렬	W : m_A 에서 신뢰에 관계되는 가중치 행렬
m_{ij} : M 의 요소	Y : 유동행렬
	y : 변위벡터
	\dot{y}_R : 속도벡터의 실수성분
	Z : 임피던스

*정회원, 전북대학교 기계공학과 대학원

**정회원, 전북대학교 기계공학과

- Δ : 어떤 변화
 \emptyset : 모드행렬
 \emptyset_i : 모달벡터 (i 번째 모드)
 Ω_i : i 번째 모드의 고유진동수
 ω : 강제진동수
 $+$: 하부 첨자-의도 역 (pseudo inverse)
 $[\backslash]$: 대각선 행렬

1. 서 론

동적 구조물에 있어 수학적 모델의 필요성은 확실하다. 순수한 해석적 모델은 구조물의 예비설계 단계에서 필요로 한다. 재료의 선택에 따라 다른 기본적인 설계평가에서, 성분의 배열은 Specimen 제조에 앞서 약간의 해결해야 할 문제가 있다. 구조적인 해석연구는 그러한 문제가 합리적인 확신으로 취급될 수 있다는 점에서 진전을 보았다.

결국 해석은 계의 가상 모델에 유일한 근거를 두었기 때문에 어느 임계구조물은 실제실험에 종속되어져야 한다.⁽¹⁾ 해석적 모델은 예비설계에서 중요한 만큼 이 단계에서도 중요하다. 정규 진동형 실험에서는 실제 환경과 똑같이 할 수 없고, 가능한 변화의 영향도 모두 실험할 수 없다.⁽³⁾

만일 동적 실험결과를 실제 구조물의 해석모델에 적용할 수 있다면 좋을 것이다.

동적계의 선형모델의 자유도 수는 독립인 공간 좌표의 수와 같고, 또한 계의 정규 모드의 수와 같다.⁽²⁾ 구조물의 어떤 점의 응답은 그점에서 정규 진동형의 각각의 응답의 중첩이다. 선형계에서 각각의 정규 진동형의 측정여건은, 단지 문제에서 정규 진동형의 고유진동수 근처 또는 그 이상의 진동수를 가지는 힘으로 달성된다. 따라서 실험 데이터가 구체적인 자유도 수를 갖는 선형모델의 유일한 규명을 위한 필요한 정보를 포함하기 위하여, 적용된 힘이 고유진동수의 같은 수를 통하여 기진된 진동수에서 의미있는 요소를 지녀야 하는 것이 요구된다. 기진진동수의 미소범위로부터 얻어진 데이터는 그러한 유일한 규명을 위한 충분한 정보를 포함하지 않는다.

유일한 규명을 하기에 가능한 조건을 가진 곳이 있다. 하나는 구조물이 관심점의 수가 적고 적당한 진동수 범위에 걸쳐 구조물을 기진시킬 수 있는 곳이다.⁽⁴⁾ 다른 조건은 운동의 주요 역할이 강제 응답에 기인한 것이고, 거기에는 단지 물리적 자유도

가 6개 있다.

본 연구에서 고려된 문제는 탄성체 구조물로 형성된 응용에서 좀더 공통된 상황에 관한 것이다. 유일한 선형해석모델의 규명에 필요한 정보제공을 위하여 충분히 넓은 진동수 범위에 걸쳐 응답을 측정하고, 구조물을 기진시키는 것은 불가능하고 비경제적이며 또는 일반적으로 바람직하지 못할 것으로 생각된다.

본 논문에서 “불완전 모델”의 개념을 사용한다.^(6,7,8,10,11) 이것은 좌표축보다 정규 진동형을 더 적게 가지고 있는 해석적 모델이며 단지 한정된 진동수 범위에서 유효하다. 그것은 해석적 근사와 함께 실험 데이터를 사용하여 변수가 어떻게 결정될 수 있는가를 나타낸다. 모델의 속성이 논의되고, 이들 중 어떤 것은 컴퓨터 모의시험 데이터를 사용하여 시험된다. 합리적인 질량행렬을 결정할 수 있고, 질량 및 강성변화들로 인한 진동수들 및 정규 진동형들의 변화를 예측하기 위하여 불완전 모델의 사용이 가능함을 나타낸다. 더 나아가 절차가 측정오차에 상대적으로 민감하지 않다는 것들도 나타난다.

본 연구에서는 유용한 해석 도구를 개발하고, 한층 더 나은 이론의 개발과 응용법이 구조물의 설계를 개선하고 최적화하기 위한 증가된 능력과 더 나은 이해를 줄 것으로 생각한다.

2. 이론해석

2.1 기본관계

스프링-질량 구조물의 감쇠모델의 행렬식은 다음과 같이 쓸 수 있다.⁽³⁾

$$M\ddot{\mathbf{y}}(t) + (1+ig)K\mathbf{y}(t) = f(t) \quad (1)$$

$\ddot{\mathbf{y}}$, \mathbf{y} , f 는 관심점 p 개의 각각에서 시간함수로서 주어진 가속도, 변위(기울기), 작용한 힘(모우멘트)을 나타내는 column 행렬(벡터)이다. M 과 K 는 모델의 질량과 강성계수를 나타낸 $P \times P$ 대칭 행렬이다. i 는 $\sqrt{-1}$ 이고 g 는 구조물의 감쇠계수이다. 가상 항은 감쇠가 속도를 가진 위상에 있으나, 변위에 비례한다는 것을 나타내기 위해 사용된다.

한 진동수 ω 에서 정상상태 사인파 진동 아래에서 식은 다음과 같이 된다.

$$[-\omega^2 M + (1+ig)K]\mathbf{y} = f \quad (2)$$

여기서 f 는 작용된 힘의 크기이고 y 는 변위의 크기로서 생각될 수 있다. 일반적으로 y 는 힘과 변위사이의 위상 때문에 복잡하게 된다.

속도항으로 이 식을 쓰면($\dot{y}=i\omega y$)

$$\left\{\frac{g}{\omega}K+i(\omega M-\frac{1}{\omega}K)\right\}\dot{y}=f \quad (3)$$

이되고 임피던스(속도) 행렬은 다음과 같이 주어진다.

$$Z=\frac{g}{\omega}K+i(\omega M-\frac{1}{\omega}K) \quad (4)$$

그리고, 유동(mobility) 행렬도 아래와 같이 주어진다.

$$Y=Z^{-1}=\left\{\frac{g}{\omega}K+i(\omega M-\frac{1}{\omega}K)\right\}^{-1} \quad (5)$$

해석을 통하여 직접적으로 얻어진 양이 임피던스 Z 이고, 반면에 시험에서 측정된 양이 유동성 Y 라는 것을 아는 것은 흥미있는 일이다.

식(2)와 일치하는 고유치 문제를 고려하면,

$$\{K-\Omega_i^2 M\}\phi_i=0 \quad i=1, 2, 3, \dots, P \quad (6)$$

가 된다. 여기서, Ω_i 는 고유진동수이고, ϕ_i 는 계의 정규 진동형이다. 이 식은 두가지 형태로 쓸 수 있다.

$$M^{-1}K\phi_i=\Omega_i^2\phi_i \quad i=1, 2, 3, \dots, P \quad (7)$$

또는,

$$CM\phi_i=\frac{1}{\Omega_i^2}\phi_i \quad i=1, 2, 3, \dots, P \quad (8)$$

여기서 영향계수 행렬 C 는 K^{-1} 와 같고, 직교관계는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \phi_i^T M \phi_j &= 0 & j \neq i \\ &= m_i & j = i \end{aligned} \quad (9)$$

$M^{-1}K$ 의 정규 진동형과 그것의 역인 CM 은 같다는 것과 개개의 고유치는 역수라는 것을 아는 것이 중요하다. $M^{-1}K$ 의 주요 모드는 높은 진동수를 갖는 것 중의 하나이고, CM 의 주요 모드는 낮은 진동수를 갖는 것 중의 하나이다.

$\Phi=[\phi_1\phi_2\dots\phi_P]$ 인 행렬을 사용하면, 다음식을 얻는다.

$$K=\sum_{i=1}^P \left[\frac{\Omega_i^2}{m_i} \right] M\phi_i\phi_i^T M \quad (10)$$

$$C=\sum_{i=1}^P \left[\frac{1}{\Omega_i^2 m_i} \right] \phi_i\phi_i^T \quad (17)$$

이들은 다음과 같이 주요한 역행렬의 항으로 나타낼 수 있다.

$$M^{-1}K=\sum_{i=1}^P \Omega_i^2 \left(\frac{1}{m_i} \phi_i\phi_i^T M \right) \quad (11)$$

$$CM=\sum_{i=1}^P \frac{1}{\Omega_i^2} \left(\frac{1}{M_i} \phi_i\phi_i^T M \right) \quad (12)$$

식(16)~(19)에 나타난 $\phi_i\phi_i$ 곱은 차수 P 이나 계수(rank)가 1인 정방행렬이다. 임피던스와 유동성은 다음과 같이 정규 진동형의 항으로 표현할 수 있으며,

$$Z=\frac{1}{\omega} \sum_{i=1}^P \frac{\Omega_i^2 \left\{ g+i\left(\frac{\omega}{\Omega_i}\right)^2-1 \right\}}{m_i} M\phi_i\phi_i^T M \quad (13)$$

유동성은 임피던스의 역으로 쓸 수 있다.

$$Y=\omega \sum_{i=1}^P \frac{g-i\left[\left(\frac{\omega}{\Omega_i}\right)^2-1\right]}{\left[\left(\frac{\omega}{\Omega_i}\right)^2-1\right]^2+g^2} \frac{1}{\Omega_i^2 m_i} \phi_i\phi_i^T \quad (14)$$

2.2 불완전 모델

고려중인 구조물은 g, M, K 에 의해 이론적으로 나타난다. (식 1) g, M 을 알고 있다고 생각하면, K 와 그것의 역 C 는 각각 고유벡터를 포함하는 행렬의 합으로 쓸 수 있다는 것을 보였다. (식 10)

$$K=\sum_{i=1}^P \frac{\Omega_i^2}{m_i} M\phi_i\phi_i^T M \quad (15)$$

$$C=K^{-1}=\sum_{i=1}^P \frac{1}{\Omega_i^2 m_i} \phi_i\phi_i^T \quad (16)$$

그리고 임피던스의 유동성은 유사한 형태로 쓸 수 있다. (식 21, 23)

$$Z=\frac{1}{\omega} \sum_{i=1}^P \frac{\Omega_i^2}{m_i} \left\{ g+i\left[\left(\frac{\omega}{\Omega_i}\right)^2-1\right] \right\} M\phi_i\phi_i^T M \quad (17)$$

$$Y=Z^{-1}=\omega \sum_{i=1}^P \frac{1}{\Omega_i^2 m_i} \frac{g-i\left[\left(\frac{\omega}{\Omega_i}\right)^2-1\right]}{\left[\left(\frac{\omega}{\Omega_i}\right)^2-1\right]^2+g^2} \quad (18)$$

모든 정방행렬(K, C, Z, Y, M)은 차수가 자유도수인 P 이고, ϕ 벡터는 P 개의 요소를 갖는다. 정방행렬 $\phi_i\phi_i^T$ 은 각각 $P \times P$ 이나 계수(rank)가 1이고, 각각 특이해를 갖는다. ϕ_i 들이 선형 독립적이기 때

문예, 이러한 단순 곱 P 의 선형조합의 계수(rank)는 P 가 되고, 합은 비특이해가 될 것이다.⁽⁴⁾

만약 g, M 과 계의 모든 정규 진동형이 알려졌다면, 계의 거동은 완전한 운동방정식을 구성함으로써 예측할 수 있다.

P 보다 더 적은 수의 항들을 사용하여 얻은 K, C, Z, Y 행렬들은 구조물의 거동과 그것의 어떤 수정을 예측하는데 사용할 수 있다. 불완전 합으로 기술된 해석적 모델은 불완전 모델로 불리어 진다. 이러한 행렬은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$K_{inc} = \sum_{i=1}^N \frac{\Omega_i^2}{m_i} M \phi_i \phi_i^T M \quad (19)$$

$$C_{inc} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\Omega_i^2 m_i} \phi_i \phi_i^T \quad (20)$$

$$Z_{inc} = \frac{1}{\omega} \sum_{i=1}^N \frac{\Omega_i^2}{m_i} \left\{ g + i \left[\left(\frac{\omega}{\Omega_i} \right)^2 - 1 \right] \right\} M \phi_i \phi_i^T M \quad (21)$$

$$Y_{inc} = \omega \sum_{i=1}^N \frac{1}{\Omega_i^2 m_i} \frac{g - i \left[\left(\frac{\omega}{\Omega_i} \right)^2 - 1 \right]}{\left[\left(\frac{\omega}{\Omega_i} \right)^2 - 1 \right]^2 + g^2} \phi_i \phi_i^T \quad (22)$$

식(19) 또는 (20)로부터 고유치방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있고,

$$M^{-1} K_{inc} \phi_j = \sum_{i=1}^N \frac{i^2}{m_i} \phi_i \phi_i^T M \phi_j = \Omega_j^2 \phi_j \quad j=1, 2, \dots, N \quad (23)$$

$$= 0 \quad j > N$$

CM에 대하여도 유사하게 된다. 그래서, 불완전 모델이 완전 모델에 상응하는 첫번째 N 개의 모드만을 포함한다고 말할 수 있다.

2.3 질량행렬의 규명

이전의 논의는 정규 모드를 알고 있는 것으로 가정했다. 질량행렬의 지식이 또한 요구된다는 것이 명백하다. 불완전 모델의 논의 훨씬 이전 과정에서, 질량행렬 규명에 대한 방법이 묘사될 것이다. 앞에서처럼, 첫번째 N 개의 고유진동수들과 정규 진동형은 시험을 통해 결정된다고 가정한다. 이 모드의 각각은 모든 관심점의 상대적 운동을 나타내는 P 개의 요소를 포함한다.

정규 진동형은 식(9)에 주어진 것처럼 질량에 관하여 직교이고, 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\sum_{i=1}^P \phi_{ki} \phi_{kj} \phi_{kk} + \sum_{k=1}^{P-1} \sum_{n=k+1}^P (\phi_{ki} \phi_{nj} + \phi_{ni} \phi_{kj}) m_{kn} = 0 \quad (24)$$

$$i=1, 2 \dots n-1, \quad j=i+1 \dots N$$

여기서 ϕ_{ki} 은 ϕ_i 의 k 번째 요소를 나타내고, m_{kn} 은 행렬 M 의 요소이다. 질량행렬은 대칭적이거나 꼭 대각선 요소만을 갖는 것이 아닌 것으로 가정한다. 실제적으로, 식(24)은 계수로 기지의 정규 모드요소들의 곱들을 갖는 미지수들로서 질량요소들을 갖는 $N(N-1)/2$ 개의 선형방정식들이다.

어떤 질량요소는 영(zero) 또는 어떤 한정된 값이 되는 것이 알려질 수 있다는 것이 가능하다. 만일 영(zero)이 된다면 대응하는 항은 식(24)에서 사라진다. 만일 특정 값에 제한된다면 대응하는 항은 식의 오른쪽에 놓이게 된다.

부가적으로 만일 일반화된 어떤 모달 질량 m_i 를 안다면, $j=i$ 에 대하여 식(9)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\sum_{k=1}^P \phi_{ki}^2 m_{kk} + 2 \sum_{k=1}^{P-1} \sum_{n=k+1}^P \phi_{ki} \phi_{ni} m_{kn} = m_i \quad (25)$$

또 다른 가능한 기지의 조건이 있다. 대각선요소 전체는 알고 있는 것으로 생각할 수 있다(예를 들면, 구조물의 전체 질량). 이것은 다음식으로 나타낼 수 있다.

$$\sum_{k=1}^P m_{kk} = m_T \quad (26)$$

식(24), (25)와 (26)은 아래와 같이 쓴다.

$$A \bar{m} = R \quad (27)$$

여기서, \bar{m} 은 M 의 미지의 요소로 구성된 열 행렬이다. A 는 식(24), 식(25)와 (26)으로부터 이러한 미지의 계수에 의해 구성된 계수이다. R 은 기지의 질량 및 가능하면 기지의 전체 질량에 일치하는 오른쪽 항으로 구성된 열 행렬이다.

여기서, A 는 $n_e \times n_v$ 행렬 (n_e 은 식의 수이고 n_v 은 변수의 수)이고 $n_e < n_v$ 이다. \bar{m} 은 $n_v \times 1$ 이고 R 은 $n_e \times 1$ 이다. 식은 무한개의 해를 갖는다. 즉, 진동형들이 직교성을 갖게 하는 무한개의 질량분포들이 있다. 사실, 같은 일반화된 질량 m_i 를 주는 무한개의 질량분포들이 존재할 수 있고 같은 C_{inc} 와 Y_{inc} 로 될 수 있는 가능성이 상당히 있다. (식 20, 21) 달리 말하면, 측정된 정규 진동형과 함께 사용된 다른 타당한 질량 분포가 사인파형의 힘에 대한 계의 동일한 응답을 예측할 수 있다.

그러나, 변수들에서 변화들의 영향들을 특별히 예측하기 위하여 다른 조건하에서 예측을 하기 위한 모델을 사용하는 것이 바람직하다면, 모델에 사용된 질량은 가능한 한 실제값 근처에 있어야 한다는 것이 분명하다. 실제값이 무엇인가에 대한 최선의 유용한 정보는 분석자에 의해 구해지는 근사치이다. 일반적으로, 이러한 해석치는 정규 진동형의 직교조건을 만족하지 못할 것이다.

열 행렬 m_A 를 정의하면, \bar{m} 의 근사치이고 식 (27)의 양변으로부터 $A m_A$ 을 빼면 다음과 같이 된다.

$$A(\bar{m} - m_A) = R - A m_A \quad (28)$$

가중치함수를 대각행렬 W 의 형태로 도입하면, 그 결과는 보다 큰 가중치함수들이 최소값으로 변화하려는 경향이 있을 것이다.

$$B_R = W^{-1}(A W^{-1})^+ = (W^{-1})^2 A^T \{A (W^{-1})^2 A^T\}^{-1}$$

$$B_m = I - B_R A$$

이라고 정의하면, 질량요소에 대한 식은 다음과 같이 된다.

$$\bar{m} = B_R R + B_m m_A \quad (29)$$

2.4 질량변화

해석 모델의 유용성 평가를 위한 기준(criteria)의 하나는 변화의 영향을 예측하는 능력이다. 본 절에서, 고유진동수와 정규 진동형에서 질량변화의 영향을 예측하기 위한 불완전 모델의 사용에 대해 논의한다.

강성행렬과 영향계수행렬은 계의 질량에 독립이다. 그러나, 정규 진동형으로 유도된 표현은 질량을 포함한다. (식 10) 그래서, 질량이 변할 때 정규 진동형과 진동수는 그 합이 불변의 상태로 유지되는 방식으로 변화해야 한다. 다시 말하면,

$$K = \sum_{i=1}^p \frac{\Omega_i^2}{m_i} M \phi_i \phi_i^T M = \sum_{i=1}^p \frac{(\Omega_i + \Delta \Omega_i)^2}{m_i + \Delta m_i}$$

$$(M + \Delta M) (\phi_i + \Delta \phi_i) (\phi_i^T + \Delta \phi_i^T) (M + \Delta M) \quad (30)$$

$$C = \sum_{i=1}^p \frac{1}{\Omega_i^2 m_i} \phi_i \phi_i^T = \sum_{i=1}^p \frac{1}{(\Omega_i + \Delta \Omega_i) (m_i + \Delta m_i)}$$

$$(\phi_i + \Delta \phi_i) (\phi_i^T + \Delta \phi_i^T) \quad (31)$$

이 된다. 여기서, Δ 's는 질량에서의 변화 ΔM 에

기인하는 변화들을 나타낸다.

위의 식들은 모든 모드에 대하여 합해질 때 정확하지만, 그들이 불완전 합, 즉 불완전 모델에 대하여서는 정확하지 않을 것이다. 두 요소 K 와 C 중에서 C_{inc} 가 질량변화에 덜 민감할 것으로 기대된다. 주요 항들이 C_{inc} 에 포함되고 K_{inc} 에서는 생략되었기 때문에, K_{inc} 가 불변의 K 에 대해서 보다 C_{inc} 가 불변의 행렬 C 에 더 가깝다.

이 가정은 $C_{inc}(M + \Delta M)$ 에 관한 행렬 반복을 사용하여, 수정된 계의 진동수들과 모드들을 계산함으로써 시험된다. 예측된 변화는 실제값에 아주 잘 일치한다.

2.5 강성변화

강성행렬에서 변화의 영향은 앞에서 논의된 질량변화와 같이 직접적으로 다루어질 수 없다. K 와 C 의 두 행렬은 강성이 변할 때 변해야 한다. K 의 주요 항들이 K_{inc} 에서 생략되기 때문에, 작은 ΔK 조차 K_{inc} 의 요소들보다 크기의 차수들 만큼 쉽게 더 커질 수 있으므로 $(M + \Delta K)_{inc} = K_{inc} + \Delta K$ 라고 가정하는 것은 타당한 것처럼 보이지 않는다.

다음과 같은 형태로 K 를 쓸 수 있다.

$$K = \sum_{i=1}^p \frac{\Omega_i^2}{m_i} M \phi_i \phi_i^T M \quad (32)$$

이 식은 ϕ_i 's가 $M^{-1}K$ 의 고유벡터 일때만 성립한다. 그렇지 않다면, $a_{ij} M \phi_i \phi_j^T M$ 형태의 연성항이 존재해야 한다. 그래서, 만일 $K + \Delta K$ 를 $M^{-1}K$ 의 고유벡터 향으로 표현한다면,

$$K + \Delta K = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p a_{ij} M \phi_i \phi_j^T M \quad (33)$$

이 된다. 이제 이 식에 ϕ_k^T 와 ϕ_n 를 앞과 뒤에 곱하면 ϕ_i 's의 직교성 때문에,

$$\phi_k^T (K + \Delta K) \phi_n = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p a_{ij} (\phi_k^T M \phi_i) (\phi_j^T M \phi_n)$$

$$= a_{kn} m_k m_n \quad (34)$$

이 된다. 그리고, $K \phi_n = \Omega_n^2 m \phi_n$ 이므로

$$(K + \Delta K)_{inc} = K_{inc} + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \left(\frac{\phi_i^T \Delta K \phi_j}{m_i m_j} \right) M \phi_i \phi_j^T M \quad (35)$$

이 된다. 이 식은 이제 계산될 수 있고, 새로운 고유진동수와 정규 진동형에 대한 근사를 얻기 위하여 $M^{-1}(K + \Delta K)$ 가 사용될 수 있는 것으로 가정

한다.

3. 수치해석

3.1 컴퓨터 프로그램

정성적인 평가에 주어진 어떤 가정들에 따르기 위하여 컴퓨터 프로그램을 개발하였다. 프로그램은 세가지 기능을 수행한다. 즉, (1)모의실험, (2)질량규명, (3)질량과 강성변화에 따른 모드와 진동수의 계산

아래에 일반적인 프로그램의 설명이 있다.

(1) 모의실험

모의실험을 위해 프로그램은 먼저 질량행렬 M , 강성행렬 K (또는, 선택적으로 영향계수행렬 C), 그리고 스칼라 감쇄계수 g 로 구성된 "실제 system"의 완전한 묘사를 받아들인다. 자유도의 "실제" 수는 (행렬의 차수) 20으로 제한한다.

모의실험은 한 점에서의 사인과 가진에 기인한 구조물상의 P 개의 점에서 공진응답의 측정들로 구성된다. 그래서, 시험의 시뮬레이션에 대하여 요구되는 데이터는 측정이 행해진 구동점, 가진진동수 및 측정오차로 구성된다.

N 개의 공진이 일어날 가진진동수는 본 프로그램 외부에서 계산되어 지는 것으로 가정한다. 측정오차는 고정된 기본오차에 균일하고 불규칙하게 분포된 것을 더한 것으로 간주되며, 각각은 정확한 측정의 백분율로서 표시되고, 과정은 다음과 같다.

① N 개의 공진진동수의 각각에서 "실제"계의 임피던스 계산

② 정확한 유동식을 얻기 위한 복소행렬의 역행렬 계산.

③ 구동점에 사용하는 열의 P 개의 측정점에 일치하는 요소의 저장

④ 이러한 값들을 구체적 측정오차에 적용

이 데이터는 실제시험에서 얻어질 데이터의 좋은 모의실험이 될 것이다. 프로그램의 다음 부분에서 요구되는 시험 데이터는 계의 정규 진동형이다. 고유진동수가 분리될 때 공진 근처의 유동식의 실수 성분 열은 정규 진동형의 훌륭한 근사가 될 것으로 알려져 있고, 식(14)으로부터 알 수 있다.

위의 과정에 대한 선택으로 프로그램은 입력으로 정규 진동형 들을 받아들일 것이다. 이러한 모드는 전의 오차들로 오염될 것이며, 뒤에 있는 프로그램의 Part II에 전달된다.

(2) 질량규명

본 논문의 2.3절에 주어진 과정이 수치적으로 수행되었다. 입력은 어떤 기지의 일반 질량 또는 질량요소 및 미지의 질량들로 구성된다. 각각의 미지의 질량에 대해서는 근사와 가중치함수가 적용된다. 덧붙여, 하나는 대각선 질량의 총합이 상수로 남는다는 것으로 구체화 할 수 있다. 입력에 근거한 A 행렬은 Am 과 W 같은 형태로 된다. "최선"의 질량분포에 대한 해는 식(29)에 의하여 얻어진다.

이점에서, 규명된 질량행렬이 형성되고, 일반화된 질량행렬 $(\phi^T M \phi)$ 는 불완전 강성과 영향계수 행렬(식, 19, 20)과 같이 계산된다. 규명된 불완전 모델의 공진응답과 고유진동수 및 정규 진동형이 계산된다.

(3) 질량 또는 강성변화

질량 또는 강성변화에 기인한 진동수와 모드에서 변화를 계산하기 위한 충분한 데이터가 있다. 프로그램은 질량행렬 또는 강성행렬의 변화를 받아들인

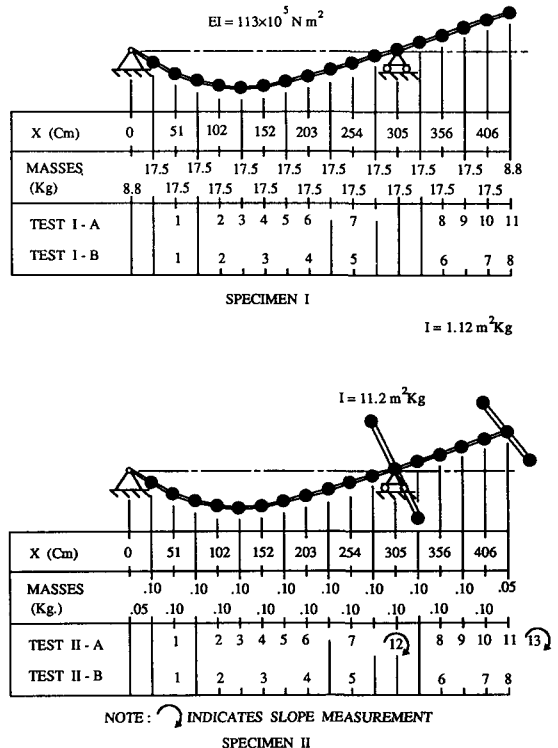


Fig. 1 Schematic representation of the simulated test specimens

다. 질량변화에 대하여 행렬 $M + \Delta M$ 이 구성되고, M 은 규명된 질량행렬이다. 제1차 N 개의 진동수와 모드는 2.4절에 논의된 것처럼 얻어진다.

강성변화는 식(27)에 주어진 것처럼 구성된다. N 개의 진동수와 모드는 $M^{-1}(K + \Delta K)_{inc}$ 로부터 반복적으로 계산된다. 변화들이 프로그램의 첫번째 두 부분의 재 계산없이 연속적으로 규명된 모델에

서 만들어지게 하도록 프로그래밍 한다.

3.2 모의시험

불완전 모델의 특성들을 고려하여 나타난 가설들을 시험하기 위해, 모의시험을 수행하기 위한 구조물을 선택하는 것이 필요하다. 방법이 실제적으로 적용가능하다는 확신을 주지 못하는 너무 단순한

Table 1 Approximate Mass Distributions

Sta. (cm)	Specimen I						Specimen II		
	True Mass	I	TestA II	III	W*	Test B	True Mass	Test A	Test B
0.4	8.8						8.8		
25.4	17.5						17.5		
51.	17.5	52.5	43.8	43.8	17.5	43.8	17.5	52.5	52.5
76.	17.5						17.5		
102.	17.5	26.3	26.3	22.8	175.	35.	17.5	26.3	26.3
127.	17.5	17.5	17.5	21.0	87.5		17.5	17.5	17.5
152.	17.5	17.5	17.5	17.5	17.5	35	17.5	17.5	17.5
178.	17.5	17.5	17.5	21.0	87.5		17.5	17.5	17.5
203.	17.5	26.3	26.3	22.8	175.	35	17.5	17.5	17.5
229.	17.5						17.5		
254	17.5	52.5	43.8	43.8	35	43.8	17.5	52.5	52.5
279.	17.5						17.5		
305.4	17.5						17.5		
330	17.5						17.5		
356	17.5	43.8	35	26.3	87.5	43.8	17.5	43.8	43.8
381	17.5	17.5	17.5	22.8	715		17.5	17.5	17.5
406	17.5	17.5	17.5	21.0	17.5	26.3	17.5	17.5	17.5
432.	8.75	8.75	8.75	8.75	175	8.75	8.75	8.75	8.75
I@305	0.						17500	17500	0.
I@432	0.						1750	1750	0.

ΔSupport

*W=1.0 expect for test 6 when it was used as shown and for tests 18-20 when it was used to minimize the dominance of the large magnitude of the inertias.

계는 선택하지 않았다. 반면에 계의 훌륭한 직관적인 이해와 적합화를 주지 못하는 너무 복잡한 계를 사용한 시험도 하지 않았다.

절충하여 평범한 결과를 남기 위한, 응답이 매우 잘 이해되고 너무 단순하지 않는 구조물을 선택하였다. 선택된 구조물은 균일 분포 하중으로 근사시키기 위하여 18개의 덩어리로 배열된 질량을 갖는 상수 EI의 단순하고 얇은 보를 선택하였다. 빔은 단지 굽힘 횡진동을 할 수 있다. 굽힘은 빔의 한쪽 끝과 약 70% 지점에서 구속되고, 약 30%가 매달린 상태로 있다. 0.0036 Kg.sec/cm의 구조물의 감쇠계수가 사용되었다.

모의시험 대부분은 이 계에 의하여 수행되었다. 이 계는 Specimen I로 지정한다. 몇몇 시험은 두 개의 회전관성을 더한 것, 즉 두번째 지점에 하나와 빔의 자유단에 하나, 이외는 위와 동일한 구조물상에서 수행되었다. 이 계를 Specimen II라 부른다. 이러한 빔이 Fig. 1에 도시되었다. 두 Specimen의 각각에 대하여, 시험측정이 선택된 두 분포는 시험 A와 B로 언급된다. 이러한 것들이 Fig. 1에 도시된다. 각각의 시험에서 계는 위치 152에서 구동되어지는 것으로 생각하였다.

각각의 Specimen과 시험에의 관계는 질량분포의 근사에 있다. Specimen I과 시험 A에 대하여 거

Table 2 Description of simulated tests

Test No.	Specimen (Fig.2)	Test	No. of Resonances or Modes	Mass Approx. (Table I)	Remarks*
1	I	A	4R**	I	
2	I	A	4M	I	
3	I	A	3R	I	
4	I	A	3M	I	
5	I	A	3R	I	Variable mass
6	I	A	3R	I	Weighting fun. (Table I)
7	I	A	3R	II	
8	I	A	3R	III	
9	I	A	3R	III	Variable mass
10	I	A	3R	III	
11	I	A	3R	III	5% Bias and
12	I	A	3R	III	±5% Random
13	I	A	3R	III	Measurement
14	I	A	3R	III	Error
15	I	A	3R	III	
16	I	B	3R		
17	I	B	3R		Variable mass
18	II	A	4R		Inertias
19	II	A	3R		weighted
20	II	A	2R	(Table I)	
21	II	B	4R		
22	II	B	3R		

*Unless so indicated, total mass held constant, no weighting, and no errors assumed

**R indicates resonant data used, M indicates actual mode shapes used

Table 3 Identified masses

Test ⁺ No.	Point of Measurement (Figure 1)											Var RMS
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
	Specimen I (Figure 1)											
A I*	52.5	26.3	17.5	17.5	17.5	26.3	52.5	43.8	17.5	17.5	8.8	
1	49.0	28.0	21.0	19.3	21.0	29.8	45.5	40.3	15.3	16.3	13.0	3.930
2	43.8	35.0	21.0	14.0	19.3	38.5	36.8	43.8	19.3	13.7	16.1	7.660
3	50.8	26.3	19.3	21.0	21.0	26.3	50.8	40.3	13.5	16.1	13.3	2.763
4	50.8	26.3	19.3	21.0	21.0	26.3	50.8	40.3	13.5	16.1	13.1	2.734
5	50.8	26.3	21.0	21.0	21.0	28.0	50.8	42.0	14.2	16.6	13.5	2.738
6	47.3	26.3	22.3	19.3	22.3	26.3	50.8	42.0	17.0	17.5	11.6	2.870
A II*	43.8	26.3	17.5	17.5	17.5	26.3	43.8	35.0	17.5	17.5	8.8	
7	43.8	26.3	19.3	19.3	19.3	26.3	42.0	33.3	15.9	17.0	10.7	1.423
A III*	43.8	22.3	21.0	17.5	21.0	22.3	43.8	26.3	22.3	21.0	8.8	
8	43.8	26.3	21.0	14.9	21.0	26.3	45.5	26.3	19.3	17.3	10.3	2.460
9	43.8	22.3	22.3	19.3	21.0	22.3	43.8	26.3	21.0	21.0	8.2	0.797
10	43.8	23.5	21.9	18.6	21.7	22.9	43.4	25.6	21.7	20.1	8.2	0.768
11	44.8	24.9	22.3	18.2	20.5	21.5	42.9	25.7	21.9	20.1	7.7	1.135
12	44.6	24.2	21.9	17.7	20.7	22.1	43.6	26.3	22.6	20.3	7.5	0.828
13	43.9	24.2	22.3	19.1	21.9	22.8	42.7	25.2	21.0	19.4	8.4	1.197
14	44.1	24.2	22.3	19.1	21.7	22.8	42.7	25.2	21.0	19.8	9.1	1.171
15	45.0	24.9	22.2	17.5	20.0	21.4	43.2	26.3	22.6	20.5	7.7	1.102
B*	43.8	35.0	35.0	35.0	43.8	43.8	26.3	8.8				
16	42.0	35.0	38.5	36.8	42.0	42.0	42.0	9.6				
17	42.0	35.0	38.5	36.8	42.0	42.0	24.5	9.6				
	Specimen II (Figure 1)											
A**	52.5	26.3	17.5	17.5	17.5	26.3	52.5	43.8	17.5	17.5	8.8	
18	42.0	28.0	24.5	21.0	15.6	24.5	61.3	45.5	17.5	12.4	14.0	5.348
19	52.5	26.3	19.3	19.3	19.3	28.0	52.5	42.0	15.8	17.2	11.7	1.574
20	52.5	26.3	17.5	17.5	17.5	26.3	52.5	43.8	17.5	17.5	8.9	0.030
B*	52.5	26.3	17.5	17.5	17.5	26.3	52.5	43.8	17.5	17.5	8.8	
21	127.8	-63.0	-14.0	71.8	47.3	-51.8	47.3	194.3	-54.3	-33.3	31.5	71.032
22	50.8	21.0	11.9	14.4	17.5	29.8	57.8	49.0	22.8	19.3	4.7	4.128

*Mass approximation used for tests following (see Table 1)

**Inertias not tabulated. Identified inertias were virtually exact See Table 2 for Description of test.

기에는 질량분포의 세 근사(I, II, III)를 사용했다. Table 1은 사용된 여러가지 질량 근사들을 나타낸다. 실행된 모의 시험이 Table 2에 설명되어 있다.

(1) 규명된 질량

모의시험에 근거한 프로그램에 의해 규명된 질량들이 Table 3에 주어진다. 데이터는 시험번호에 의해 기록된다. 시험의 설명에 대하여는 Table 2를 참고한다. 질량들은 분산이 관찰될 수 있고, 시험 10~15에 대한 것을 제외하고는 읽기 쉽도록 한 의미있는 Fig.1.4에 대한 Table에 주어진다. 이들은 시험 11-15가 5%의 시험측정오차와 진폭에 대하여 $\pm 5\%$ 불규칙성을 포함하는 것을 제외하고는 동일하다. 질량 그 자체에 더하여, Table은 다양한 rms의 향으로된 근사로부터 변화를 나타낸다.

이 데이터의 어떤 특성은 관찰되어질 수 있다. "최선"의 근사는 그들에 관한 보다 적은 변화를 갖는 것으로 나타난다. 이것은 보다 좋은 근사, 즉 그것을 만들기 요구되는 보다 작은 변화가 식들을 만족하기 때문에 기대되어지는 것이다. Specimen I, 시험 A의 경우에 근사 II와 III은 I이 지점에서 질량들을 포함하기 때문에 직관적으로 I보다 좋다. 변동들이 근사 II와 III에 대해서 상당히 작다는 것은 시험 1-6의 유사조건들을 시험 7~15의 것들과 비교해보면 명백하다. 효과적으로 같은 분포를 사용한 16, 17과 9, 10를 비교하면, 포인트 수가 적을수록 변동이 커질 것이라는 것을 암시한다. 이것에 대한 한가지 이유는 많은 수의 질량을 가지는 근사가 직관적으로 계를 좀더 잘 표현하고, 그 밖의 모든 것은 같기 때문이다.

이 영향에 대한 좀더 수학적인 이유가 또 있다. 거기에 존재하는 미지의 질량보다 적은 수의 식이 존재한다. 만약 이런 수들이 같다면, 그 질량은 독특한 것이 될 것이고, 근사에 관한 필요가 없게 된다. 미지수의 수가 증가될때, 해의 집합은 확장되고, 주어진 근사에 밀접한 이런 해들 중 하나를 알 수 있는 확률은 증가한다. 사용된 모드수가 감소될 때처럼, 미지수의 수가 같지만 방정식의 수가 감소할때, 똑같은 효과가 있다. 예를 들어, 시험 18, 19, 20을 보면, 4, 3, 2개의 모드에 관한 변동은 각각 5.348, 1.574, 0.030이다.

질량의 합에 대한 구속의 영향은 시험 3과 5, 9와 10, 16과 17를 비교하여 알 수 있는 바와 같이 거의 영향이 없다.

이러한 예에서, 공진응답 대신에 정확한 모드의 사용은 변화된 향으로 상당한 개선을 보여주지 못한다. 4개의 공진응답을 사용한 시험 1은 3.930의 변동을 가지는 반면 실제 정규 모드형이 사용된 것을 제외하고는 똑같은 시험 2는 7.660의 변동을 가진다. 3 모드가 사용된 것을 제외하면 1, 2와 일치하는 시험 3, 4에서, 결과는 실제적으로 서로 동일하였다.

Specimen II에 대한 시험 B, 즉, 고의적으로 서투른 시험과 근사는 큰 관성을 무시하고 이 점에서 기울기의 측정을 생략함으로써 만들어진다. 4개의 공진을 사용한 시험은 몇 개의 음수를 포함하는 매우 좋지 않은 질량을 얻는다. 그러나, 단지 세계의 공진이 사용되어질 때, 규명된 질량은 근사에 일반적으로 일치됨을 보인다. 실제 시험에서 실험 21로부터 나온 것과 같은 결과들은 해석에서 중요한 변수의 생략 때문이다.

측정오차의 영향은 다소 작다. 5개의 B의 동일 시험(11~15)에서 5%의 기본 오차와 5%의 불규칙(random)의 오차가 응답의 크기에 반영되었다. 이것은 0과 +10% 사이의 균일한 불규칙(random)의 분포와 동일하다. 각각의 경우에 변화는 작다. 각각의 질량 요소가 5번 시험에서 8%보다 더 크게 변한 것은 하나도 없다. 일반적으로 규명된 질량들은 신뢰할 만한 근사가 되는 것 같다(시험 21제의).

(2) 질량 변화의 영향

두개의 다른 덩어리진 질량이 구조물에 더해진 것으로 생각하고, 새로운 진동수와 모드가 Table 2에 기술된 시험에 대하여 계산되어졌다.

덩어리진 질량들이 지점들(변화 "A") 사이의 중간점과 보의 자유단(변화 "B")에서 더해진다. 이런 질량들은 175 Kg이다. 이것은 빔의 전체 질량에서 거의 60%의 증가를 나타낸다.

Table 4는 진동수 계산의 결과이다. 그 Table은 모의시험이 수행된 곳에서 진동수(원래 보의 진동수)와 수정된 보의 정확한 진동수 및 모의 시험의 각각에 대한 예측 결과를 보여준다.

일반적으로 결과는 변화량에 대해 놀라울 정도로 정확하고 상대적으로 민감하지 않다. Specimen I에 대한, 변화 B(영향의 좀더 극단적인 수단)에 대하여, 제1차 모드는 54%로 진동수를 변화시키고, 가장 서투른 예측이 정확한 값의 8% 이내에 있다.

제2차 모드가 약 17%로 진동수를 변화시키는 좀 더 전형적인 상황인 Specimen I 변화 A에 대하여, 가장 서투른 예측도 약 2.5% 이내에 있다. 데이터에 의해 더 좋은 질량 근사는 더 좋은 진동수 예측으로 결과된다. 시험 7-10의 결과(더 좋은 질량 분포)들은 시험 1-6보다 약간 더 좋게 됨

Table 4 Computed frequencies due to mass change

mode	1		2		3		4	
f*	8.32		18.65		49.06		96.12	
+A	B	A	B	A	B	A	B	
f**	6.05	3.82	15.46	14.77	48.37	47.06	79.53	78.81
1	6.03	4.09	15.67	14.85	48.46	47.31	84.65	85.17
2	6.33	4.12	15.69	14.85	48.49	47.31	83.81	84.43
3	6.29	4.08	15.69	14.87	48.52	47.48		
4	6.29	4.08	15.68	14.87	48.55	47.48		
5	6.33	4.12	15.71	14.88	48.53	47.48		
6	6.32	4.11	15.70	14.88	48.50	47.41		
7	6.19	3.97	15.60	14.84	48.50	47.43		
8	6.20	3.99	15.62	14.82	48.44	47.28	83.43	84.22
9	6.21	3.99	15.62	14.84	48.48	47.37		
10	6.21	3.99	15.62	14.84	48.48	47.37		
11	6.23	3.83	15.51	14.96	48.47	47.46		
12	6.10	3.89	15.81	14.69	48.48	47.46		
13	6.26	4.03	15.54	14.73	48.46	47.42		
14	6.25	4.05	15.76	14.99	48.49	47.35		
15	6.12	3.91	15.71	15.00	48.45	47.29		
16	6.17	3.95	15.59	14.84	48.53	47.50		
17	6.18	3.95	15.60	14.84	48.53	47.50		
f*	7.91		18.40		44.01		65.94	
f**	5.91	3.78	14.92	14.58	44.00	40.23	60.33	62.72
18	6.14	4.02	15.15	14.68	44.00	40.40	61.42	62.82
19	6.19	4.01	15.15	14.69	44.00	40.69		
20	6.06	3.94	15.07	14.72				
21	5.01	2.92	14.30	14.37	43.99	40.36	63.46	64.48
22	5.88	3.73	14.91	14.56	43.99	40.01		

*Frequency before changes, i.e. frequency tested.

**Exact frequency after changes.

+Addition of 175 kg at Sta 152 ("A") or Sta 432 ("B").

을 보여준다.

이 영향의 더 좋은 도시가 시험 21에 나타나 있는데, 이것은 의도적으로 좋지 않은 질량 분포로 주어졌다.

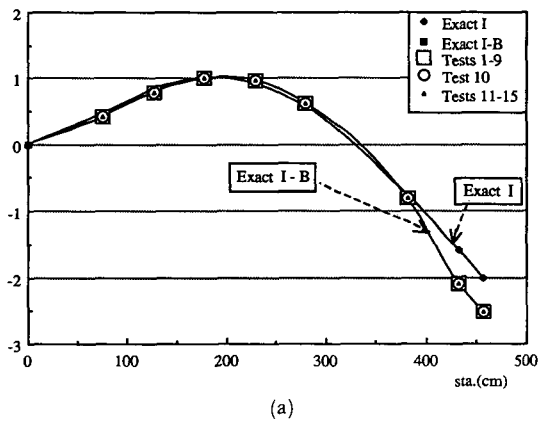
비록 이 모델이 관심 범위의 진동수에서 공진 응답과 또한 사인과 응답을 예측할지라도, 질량변화에 기인한 진동수에서 변화를 예측하는 능력은 미숙한 근사로 반대의 영향을 받는다.

단지 3개의 공진이 사용된 것을 제외하고 21과 같은 시험 22는 예측된 진동수가 우수하기 때문에, 위 결론과 대조적인 것으로 보인다. 이러한 예측이 더 좋은 질량 근사에 대한 것보다 더 좋다는 사실은 우연의 일치이다. 그러나, 3개의 공진 데이터가

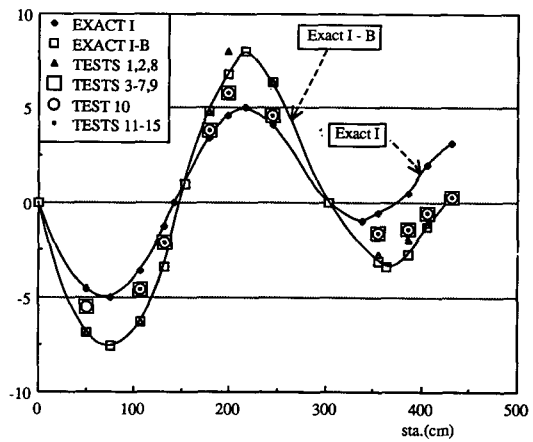
4개의 공진 데이터보다 좋은 결과를 준다는 것은 놀라운 것이 아니다. 이 영향은 질량의 규명과 관련되어 논의됐다. 제한된 데이터로부터 식의 수가 미지의 수에 접근할 때, 좀더 서투른 질량 근사에 대한 예측은 더 급속히 나빠질 것이라고 추측할 수 있다.

측정오차의 영향은 시험 11~15로부터 작다는 것을 알 수 있다. 예측된 진동수에서 최대의 분산은 비록 측정오차가 0과 10% 사이에서 불규칙하게 분포되어 있다고 해도 약 2.5%이다.

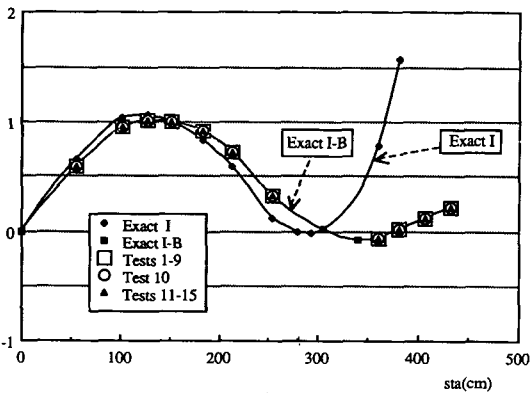
예측된 정규 진동형은 일반적으로 상당히 수락할 만한 곳에서 예측한 고유진동수와 유사한 방법으로 응답한다. Fig. 2는 제1차 세 모드에 대하여



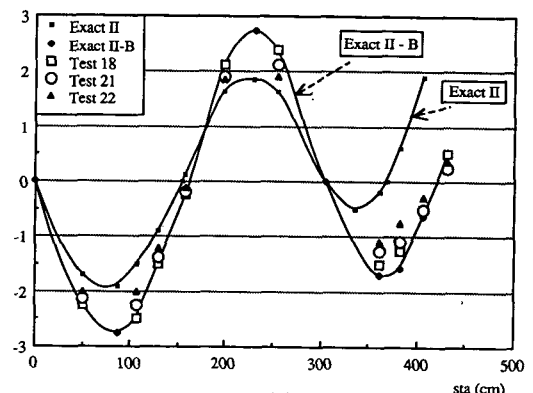
(a)



(c)



(b)



(d)

Fig. 2 (a) Computed mode changes due to mass change first mode, specimen I change B
 (b) Computed mode changes due to mass change second mode, specimen I, change B
 (c) Computed mode changes due to mass change third mode, specimen I, change B
 (d) Computed mode changes due to mass change third mode, specimen II, change B

Specimen I에서 변화 B의 영향을 설명한 것이다. Fig. 들은 본래 모드와 정확한 새로운 모드를 보여준다. 그들은 둘다 모의시험에서 구동점인 152

에서 같게 되도록 정규화 된다. 모드 1과 모드 2에 대하여 시험 1-9의 결과는 모두 정확한 곡선에 매우 접근한다. 정확한 곡선과 시험10(같은 조건이지만 오차 없음)에 비교한 오차를 포함하는 시험 11~15에서 얻어진 분산은 상당히 만족스럽다.

제3차 모드에 대한 결과들이 흥미있는데, 단지 3개의 모드를 포함하는 데이터에 근거한 결과는 적당한 모드형을 예측하지 못한다. 거기에는 또한 진동수 데이터에서 약간의 경향이 있고(시험 1, 2, 8, 18), 이 영향에 대한 이유가 추측될 수 있다. 새로운 모드가 같고 인접한 구 모드의 성분을 포함하는 것으로 가정하면, 측정된 가장 큰 모드의 예측이 다음으로 큰 구 모드의 중요한 영향을 빠뜨릴 것으로 예상할 수 있다.

Fig. 2d는 세 시험(18, 21, 22)에 대한 specimen II, 변화 B의 제3차 모드를 설명한다. 시험 18은 4개의 모드를 사용한 Specimen II에 대한 "좋은" 근사이고, 실제 모드에 잘 일치함을 보여준다. 시험 21, 22는 4개와 3개의 모드들에 대해 각각 "나쁜" 근사를 준다. 이들 두개가 이 모드의 진동수를 매우 잘 예측하는 반면에, 4개의 모드 데이터는 3개의 모드 데이터보다 상당히 좋은 세번째 모드를 준다. 이것은 앞에서 기술한 효과와 잘 일치한다.

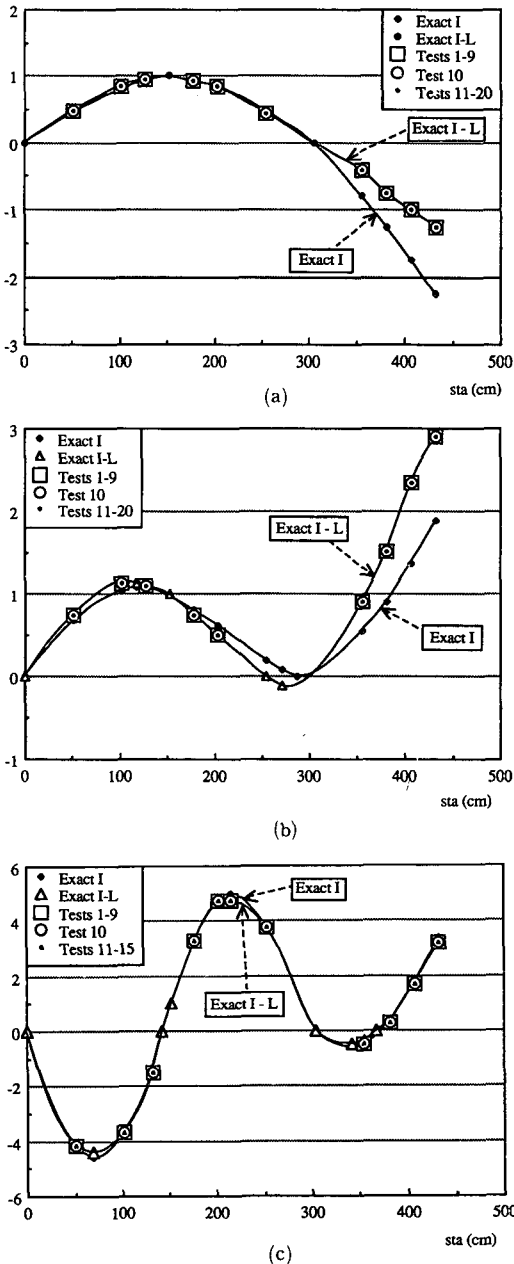


Fig. 3 (a) Computed mode changes due to stiffness change first mode, specimen I, change L
 (b) Computed mode changes due to stiffness change second mode, specimen I, change L
 (c) Computed mode changes due to stiffness change third mode, specimen I, change L

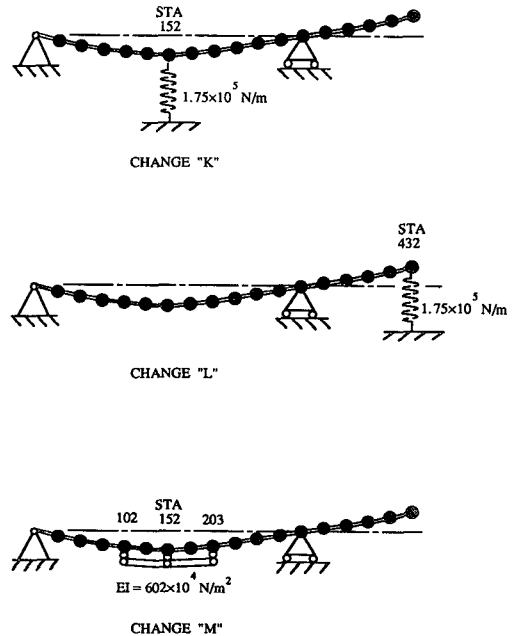


Fig. 4 Stiffness changes

단지 표본 모드가 설명되는 동안에, 이들은 모든 인 것이다. 네번째 모드는 이용 가능한 적은 양의 계산이 수행된 곳에서 얻어진 것들의 매우 전형적 데이터 때문에 보여지지 못한다.

Table 5(a) Computed frequencies due to stiffness change

mode	1		2		3		4	
f*	8.32		18.65		49.06		96.12	
+K	L	K	L	K	L	K	L	
f**	9.34	11.25	19.32	21.23	49.07	49.20	96.26	96.49
1	9.20	10.97	19.21	20.80	49.07	49.9	96.22	96.39
2	9.19	10.93	19.29	20.76		49.18	96.22	96.40
3	9.21	11.00	19.22	20.84		49.19		
4	9.21	11.00	19.22	20.85		49.19		
5	9.19	10.96	19.21	20.78		49.18		
6	9.20	10.97	19.21	20.80		49.19		
7	9.27	11.13	19.26	21.03	49.07	49.20		
8	9.26	11.13	19.26	21.03	49.07	49.20		
9	9.26	11.10	19.26	20.99	49.07	49.20		
10	9.26	11.11	19.26	20.99	49.07	49.20		
11	9.24	11.34	19.28	21.13		49.21		
12	9.34	11.16	19.23	21.25		49.22		
13	9.22	11.02	19.26	21.02		49.20		
14	9.24	11.08	19.21	20.80		49.20		
15	9.32	11.26	19.25	20.99		49.22		
16	9.28	11.14	19.27	21.05	49.07	49.20		
17	9.28	11.14	19.27	21.05	49.07	49.19		
f*	7.91		18.40		44.01		65.94	
f**	8.86	10.80	19.11	20.66	44.01	44.41	66.03	66.15
18	8.73	10.53	19.00	20.29	44.01	44.36	66.02	66.12
19	8.75	10.57	19.01	20.34	44.01	44.37		
20	8.78	10.68	19.05	20.51				
21	9.47	11.89	19.75	22.77	44.01	44.82	66.01	66.11
12	8.89	10.87	19.14	20.77	44.01	44.52		

*Frequency before changes, i.e. frequency tested.

**Exact frequency after changes.

+ Addition of 1.75×10^5 N/m, spring to ground at Sta 152 ("K") or Sta 432 ("L"). See Figure 4.

Table 5(b) Computed frequencies due to stiffness change 'M'

mode	1	2	3	4
f*	8.32	18.65	49.06	96.12
f**	8.92	19.32	49.13	99.86
Test No.				
1	8.83	19.26	49.18	99.86
3	8.87	19.33	49.19	
6	8.86	19.32	49.20	

*Frequency before changes.

**Exact frequency after change M. See Figure 4.

(3) 강성 변화의 영향

같은 결론이 질량변화처럼 강성변화를 고려하여 얻어질 수 있다. 강성변화가 세번째 모드상에서 매우 작은 영향을 주고, 어떤 결론도 얻어질 수 없기 때문에 의심스럽다.

강성변화의 두 종류가 고려되었다. 첫번째 형태는 질량이 추가된 같은 점의 각각에서 지면에 스프링을 더한 것으로 구성되었다. 이 점은 지점(변화 "K")와 빔의 끝(변화 "L") 사이의 중간점이다. 스프링 상수는 $1.75 \times 10^5 \text{ N/m}$ 이다. ΔK 는 K행렬의 대각선요소에 일치하는 변화로 구성되었다. (Fig. 4) 2.5절에서 논의된 것처럼, 전 $(K + \Delta K)$ inc 행렬이 계산되었고, 진동수와 모드는 $M^{-1}(K + \Delta K)$ inc의 반복으로 얻어졌다. 진동수 계산의 결과는 Table 5(a)에 주어지고 Specimen 모드는 Fig. 3에 나타낸다.

다른 강성변화는 Fig. 4에 나타낸 것처럼 균일 빔의 부가로 구성된다. 즉 9개 항으로 구성된 K행렬로 결과된다. 결과가 Table 5(b)에 주어진다.

모든 강성 변화는 시험 21를 제외한 진동수와 정규 진동형과 진동수에 있어 구조물의 변화의 영

향을 예측하는 데에는 유용하다.

(2) 불완전 모델의 변수는 측정된 형식의 데이터와 질량 행렬의 "이상적인" 근사로부터 결정될 수 있다.

(3) 규명된 질량행렬은 가정이 합리적으로 명확할 때, 가정된 값과 근사적으로 같게 될 것이다.

(4) 실제값의 근사는 아니다. 규명된 강성행렬은 강성의 영향의 효과를 예측하는 데 사용될 수 있다.

(5) 규명된 영향 계수행렬은 실제값에 근사이다.

(6) 정규 진동형과 고유진동수에서 질량과 강성 변화의 영향은 불완전 모델의 개념을 발전시킨 기술에 의해 평가될 수 있다. 이런 예측은 질량 근사와 측정오차에 대해 지나치게 민감하지는 않다.

(7) 본 연구에 사용된 과정은 극히 적은 점과 많은 모드가 사용될 때 좋지 않은 경향일 수 있다. 이 조건이 미지의 것처럼 비대각선 질량을 포함하는 것으로 단순하게 옮겨 될 수 있다.

일반적으로 정성적인 연구의 결과는 매우 양호하다. 개념의 좀더 명확한 평가는 이론적 관점과 좀더 복잡한 구조물의 좀더 자세히 설명된 컴퓨터 실험으로 이루어질 수 있다.

4. 결 론

참고문헌

다음의 일반적인 결론은 구조물상에서 시험된 데이터에 기초를 두었다.

(1) 동적 구조물의 불완전 모델의 개념은 적어도 정규 진동형과 진동수에 있어 구조물의 변화의 영

(1) Flannelly, W.G., McGarvey, J. H. and Berman, A. 1970, "A Theory of Identification of the Parmeters in the Equation of Motion of a Structure Through Dynamic Test-ing," To be Present-

- ed at the Symposium on Structural Dynamics, University of Technology, Loughborough, England., Mach 23~25
- (2) Kennedy, C.C. and Panu, C.D.P., 1947, "Use of Vectors in Vibration Measurement and Analysis", Journal of the Aeronautical Sciences, November, Volume 14 No. 11.
 - (3) Scanlan, R. H. and Rosenbaum, R. 1951, "Introduction to the Study of Aircraft Vibration and Flutter," The Mavmillan Company, New York.
 - (4) Bodewig, E. 1956, Matrix Calculus, Interscience Publishers, Inc., New York.
 - (5) Rosanoff, R. A. and Ginsburg, T.A. 1965, "Matrix Error Analysis for Engineers," Proceedings of the Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, AFFDL-TR-66-80, Wright-Patterson Air Force Base, Dayton, Ohio.
 - (6) Greville, T.N.E. January 1959, "The Pseudoinverse of a Rectangular or Singular Matrix and its Application to the Solution of Systems of Linear Equations," SIAM Review, Volume 1, No. 1.
 - (7) Ewins, D.J. 1984, "Modal Testing : Theory and Practice," Imperical College of Science and Technology, London, England.
 - (8) NASA/Army Rotorcraft Technology, 1988, Volume I-Aerodynamics, and Dynamics and Aeroelasticity, NASA Conference Publication 2495.
 - (9) Gaylard, M. E. 1987, "Measurements Associated with Smoothed Frequency Response, Part II : Identification of Stiffness and Masses in a Dynamic Structure," Journal of Sound and Vibration 113(2), pp.291~305.
 - (10) Daniel, J. Inman, Buffalo, 1990, "Identification of the Damping Matrix from Incomplete Modal Testing Results," AIAA-90-1204-cp, pp. 121~129.
 - (11) Alex Berman and Willian G. Flannelly, 1971, "Theory of Incomplete Models of Dynamic Structures," AIAA Journal, Vol. 9, No. 8, pp. 1481~1487.