

〈論 文〉

내부공진을 가진 원판의 비선형 강제진동해석

김철홍* · 이원경**

(1992년 6월 4일 접수)

Nonlinear Analysis of a Forced Circular Plate with Internal Resonance

Cheol Hong Kim and Won Kyoung Lee

Key Words : Combination Resonance(조합공진), Internal Resonance(내부공진), Mid-Plane Stretching(중간평면의 신장), Method of Multiple Scales(다중시간법)

Abstract

An analysis is presented for the combination resonance of a clamped circular plate, which occurs when the frequency of the excitation is near the combination of the natural frequencies, that is, when $\Omega \approx 2\omega_1 + \omega_2$. The internal resonance, $\omega_3 \approx \omega_1 + 2\omega_2$, is considered and its influence on the response is studied. The clamped circular plate experiencing mid-plane stretching is governed by a nonlinear partial differential equation. By using Galerkin's method the governing equation is reduced to a system of nonautonomous ordinary differential equations. The method of multiple scales is used to obtain steady-state responses of the system. Results of numerical investigations show that the increase of the excitation amplitude can reduce the amplitudes of steady-state responses. We can not find this kind of results in linear systems.

1. 서 론

현대 구조물들은 대형화와 경량화되는 추세를 보이고 있으며 한층 유연하게 되었다. 또한, 구조물의 운동상태와 작동조건도 종래와 비교할 수 없을 정도로 복잡해져서 정적 및 동적 특성을 연구하는데 있어 미소변위를 전제로 정립된 선형 이론으로는 해석이 불가능한 대변형(large deflection) 및 비선형진동(nonlinear oscillation)이 유발되는 경우가 많아졌다.

경계가 고정된 판(plate)이 변형할 때, 판의 중간평면의 신장은 판의 동적응답에 미치는 영향이 크게 되며 변형도와 변위와의 관계가 비선형이 된다. 이러한 중간평면의 비선형신장(nonlinearstre-

tching of mid-plane)을 동반한 기하학적 비선형성은 판에 대한 비선형 편미분방정식으로 표현된다. 또한, 운동의 진폭이 증가함에 따라 진동이 곡률(curvature)의 큰 변화를 일으키면 곡률과 변위사이의 비선형성도 고려하여야 한다.

보의 비선형 신장 이론에 상응하는 von Kármán의 비선형 판이론은 판의 응답에 있어서의 중간평면의 신장 효과를 구하는데 적합한 것으로 알려져 있다.⁽¹⁾ 예를 들면 Yamaki⁽²⁾는 모서리(edge)가 모두 지지와 핀으로 고정된(clamped-hinged) 직사각형 원형 평판들에 대해 Galerkin 방법을 적용, 조화균형법(harmonic balance method)으로 근사해를 구하였다. Nowinski⁽³⁾는 von Kármán 방정식의 동적 유사성(the dynamic analogue of the von Kármán)을 원판의 비선형 자유 횡진동 연구에 적용하였으며, Ramachandran⁽⁴⁾은 혼합된 경계조건들을 포함한 원판의 큰 진폭의 진동에 대해 해석하

*영남대학교 정밀기계공학과 대학원

**정회원, 영남대학교 정밀기계공학과

었다. Kung과 Pao⁽⁶⁾도 역시 꺾쇠로 고정된 원판에 대해 Yamaki와 마찬가지로 Galerkin 방법을 적용하였고, 그들의 연구에 대한 해석적 해와 실험적 data를 비교하여 서로 완전히 일치함을 보여 주었다. 또한, Huang과 Sandman,⁽⁷⁾ Huang⁽⁸⁾은 각각 꺾쇠로 고정된 원판과 등방성 core를 가진 직교이방성 원판에 대해 단순조화응답(simple harmonic response)로 가정, Kantorovich 평균 방법(the averging method of Kantorovich)을 사용하여 비선형, 공간, 경계치 문제(nonlinear, spatial, boundary value problem)를 수치적으로 해석하였다. Rehfield⁽⁹⁾는 큰 진폭의 운동에 대한 지배적분방정식(governing integral equation)을 유도하기 위해 섭동법(perturbation method)과 Hamilton's principle를 사용하고 Galerkin 방법을 적용, 원판의 응답을 구하였다.

Nayfeh 등⁽¹¹⁾ 및 이원경과 소강영⁽¹²⁾은 선형, 자유진동 모드(linear, free-oscillation modes) 항들의 급수전개에 의해 표현되는 변형을 고려하여 내부공진(internal resonance)을 가진 보에 대한 응답을 구하였으며, Sridhar 등⁽¹³⁾는 다자유도계에 대한 sub-harmonic, super-harmonic과 combination resonance의 존재를 보여 주었으며, hinged-clamped 된 보에 대한 수치적 예를 통해 내부공진의 영향을 연구하였다. 또한 Lee와 Ghang⁽¹⁴⁾은 두 모드 근사에 의하여 보의 흡인영역을 구함으로써 정상상태 응답이 초기조건에 달려 있음을 보여 주었다. 판에 대해서는 Sridhar 등^(15~16)이 von Kármán방정식을 이용하여 가진 진동수의 하나가 고유진동수 근처에 있을 때의 조화 가진에 대한 대칭, 비대칭 응답을 연구, 두개의 모드를 포함한 보의 내부공진과 3개의 모드를 가진 판의 내부공진과의 중요한 차이를 보여 주었다. 최근에는 Hadian과 Nayfeh⁽¹⁸⁾가 원판의 대한 모드의 상호작용을 연구, Hopf bifurcation의 존재를 보여 주었다.

본 연구에서는 중간평면의 비선형 신장을 고려한 원판의 강제진동을 해석하기 위해 Fig. 1과 같은 경계조건 즉 꺾쇠로 고정된(clamped) 경우를 생각한다. 이 경우에 고유진동수 사이엔 $\omega_1 + 2\omega_2 \approx \omega_3$ 의 관계가 존재하는데 이 관계가 내부공진 조건이 됨이 입증된다. 원판에 작용하는 가진력으로는 조화가진을 가정하고 가진진동수가 $2\omega_1 + \omega_2$ 에 가까운 경우 즉 조합공진(combination resonance)일 때를 고려한다.

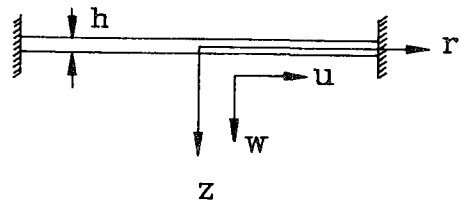
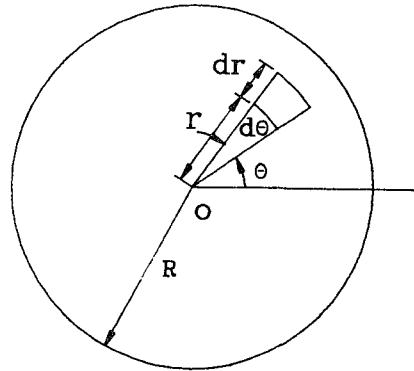


Fig. 1 A schematic diagram of a circular plate

지배방정식이 비선형 편미분방정식과 경계조건으로 주어지는 비선형구조물의 진동문제의 완전해를 구하는 것은 통상 불가능하므로 기존의 연구들은 주로 수치적방법, 해석적방법 및 두 방법을 적절히 조합한 방법등을 이용하여 근사해를 추구해 왔다. 여기서 수치적인 방법이라 함은 FEM이나 FDM을 말하며, 해석적 방법에서는 공간과 시간의 함수인 진동응답을 구하기 위하여 해를 공간만의 함수와 시간만의 함수의 급수전개로서 다음과 같이 해가 표시될 수 있다고 가정한다.

$$W(r, t) = \sum_{i=1}^N \phi_i(r) \psi_i(t)$$

Galerkin 방법을 이용하여 편미분방정식과 경계조건에 의해 지배되는 경계치 문제를 일반화 좌표(generalized coordinates)에 대한 초기치문제로 변환한다. 여기서 r 은 평형상태에서의 위치, t 는 시간, $\phi_i(r)$ 는 가정된 모드(assumed modes), ψ_i 는 일반화 좌표(generalized coordinates)이며 N 은 가정된 모드의 수이다. $\psi_i(t)$ 를 구하기 위해 여기서는 다중시간법(method of multiple scales)을 이용하여 비자율계(a nonautonomous system)를 자

을계 (an autonomous system)로 변환한 후 비자율계의 정상상태해 (steady-state solution)에 해당하는 자율계의 평형점을 구한다.

2. 원판의 운동방정식과 기초해석

균질한 원판의 대칭응답을 얻기 위해 다음과 같은 수학적 모형에서 출발하기로 한다.⁽¹⁷⁾

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \nabla^4 W = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) - 2c \frac{\partial w}{\partial t} + f(r, t) \quad (1)$$

$$\nabla^4 F = -\frac{Eh}{2r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial w}{\partial r} \right]^2 \quad (2)$$

여기서 $w(x, t)$ 는 증간평면의 변형, ρ 는 밀도, $D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$, c 는 감쇠계수, $f(r, t)$ 는 외력, E 는 Young's modulus, ν 는 Poisson ratio, F 는 응력함수 (the stress function)이며 그리고

$$\nabla^4 = \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right]^2 \quad (3)$$

이다.

F 와 반경방향의 변위 (the radial displacement) u , 그리고 변형 w 사이의 관계는

$$Eh \left[\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \right] = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \quad (4)$$

이며

$$Eh \frac{u}{r} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \nu \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} \quad (5)$$

이다.

위 식 (1)~(5)를 무차원 변수를 사용하여 표현하면 편리하다. 별표로 표시되는 무차원 변수를 아래와 같이 정의한다.

$$r = Rr^*, \quad t = R^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}} t^*, \quad w = \frac{h^2}{R} w^*,$$

$$u = \frac{h^4}{R^3} u^*$$

$$c = \frac{24(1-\nu^2)}{R^4} \sqrt{\rho h^5 D} c^*, \quad f = \frac{D h^2}{R^5} f^*,$$

$$F = \frac{E h^5}{R^2} F^*$$

여기서 R 은 원판의 반경이다. 이들 변수를 식 (1)~(5)에 대입하고 편의를 위하여 별표를 제거하면 아래와 같이 얻게된다.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \nabla^4 w = \varepsilon \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) - 2c \frac{\partial w}{\partial t} \right] + f \quad (6)$$

$$\nabla^4 F = -\frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial w}{\partial r} \right]^2 \quad (7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial w}{\partial r} \right]^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \quad (8)$$

$$\frac{u}{r} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \nu \frac{\partial F}{\partial r} \quad (9)$$

여기서 ε 은 $[12(1-\nu^2)]h^2/R^2$ 이다. ε 이 영 (zero)으로 접근할 때 모든 무차원 변수는 $O(1)$ 이 된다.

경계를 따라 꺾쇠로 고정된 (clamped) 원판의 경계조건은 모든시간 t 에 대해

$$r=1 \text{에서} \quad w=0, \quad u=0, \quad \partial w / \partial r = 0 \quad (10)$$

이다.

식 (8)과 (9)를 사용하면 다음과 같은 F 에 대한 방정식을 얻을 수 있으며,

$$\frac{1}{2} \left[\frac{\partial w}{\partial r} \right]^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - r \frac{\partial^3 F}{\partial r^3} \quad (11)$$

식 (9)와 (10)을 사용하면 F 에 대한 경계조건

$$r=1 \text{에서} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \nu \frac{\partial F}{\partial r} = 0 \quad (12)$$

과 같이 된다.

Galerkin법을 이용하기 위하여 다음과 같이 가정하자.

$$w(r, t; \varepsilon) = \sum_{m=1}^{\infty} \phi_m(t; \varepsilon) \phi_m(r) \quad (13)$$

여기서 ϕ_m 은 일반화 좌표 (generalized coordinate)이며 ϕ_m 은 선형 비감쇠 자유진동의 고유모드이다. 즉, ϕ_m 은 다음의 고유치문제로부터 구할 수 있는 고유함수 (eigenfunction)이다.

$$\nabla^4 \phi_m - \omega_m^2 \phi_m = 0 \quad (14)$$

$$\phi_m(1) = 0, \quad \phi_m'(1) = 0, \quad \phi_m(0) < \infty$$

여기서 ω_m 은 판의 고유진동수이다.

식 (7), (8), (9), (13)을 식 (6)에 대입하고 양변에 $r\phi_n$ ($n=1, 2, 3, \dots, N$)을 곱하고 r 에 대해서 적분한 후 고유함수의 직교성을 이용하여 정리하면 다음과 같은 일반화 좌표 $\phi_n(t)$ 에 대한 비선형, 비자율 2계 연립 상미분방정식 (set of coupled, nonlinear, nonautonomous, second-order, ordinary differential equations)을 얻게 된다.

$$\frac{d^2\psi_n}{dt^2} + \omega_n^2\psi_n = \varepsilon \left[-2c_n \frac{d\psi_n}{dt} + \sum_{m,p,q=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \Gamma_{nmpq} \psi_m \psi_p \psi_q \right] + f_n(t) \quad (15)$$

여기서

$$c_n = \int_0^1 cr\phi_n dr, \\ f_n(t) = \int_0^1 r\phi_n f(r, t) dr, \\ \Gamma_{nmpq} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\int_0^1 \phi_p' \phi_q' J_1(\zeta_k r) dr \int_0^1 \phi_n' \phi_m' J_1(\zeta_k r) dr}{\zeta_k^2 - 1 + \nu^2} J_1^2(\zeta_k)$$

여기서 감쇠항은 각 모드에 독립적으로 기여한다고 (modal damping) 가정하며 외력은 다음과 같이 가정한다.

$$f_n(t) = 2K_n \cos \Omega t$$

즉, 가진진폭 K_n 은 $O(1)$ 이며, $\Omega \approx 2\omega_1 + \omega_2$ 인 경우의 조화가진 (harmonic excitation)를 고려하기로 한다.

모든 시간에 걸쳐서 타당한 (uniformly valid) 근사해를 구하기 위하여 다중시간법 (method of multiple scales)을 사용하기로 한다. 우선 ψ_n 을 다음과 같이 정의된 여러 시간들의 함수로 가정하고

$$T_n = \varepsilon^n t \quad (16a)$$

다음과 같이 전개될 수 있다고 가정한다.

$$\psi_n(t; \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \psi_{nj}(T_0, T_1, \dots), \\ n=1, 2, \dots \quad (16b)$$

이 때 시간에 관한 미분은 다음과 같이 변환된다.

$$d/dt = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots, \quad (17a)$$

$$d^2/dt^2 = D_0^2 + \varepsilon 2D_0 D_1 + \dots, \quad (17b)$$

여기서 $D_j = \partial/\partial T_j$ 이다.

식(17)을 식(15)에 대입하고 ε 의 동일한 차수의 계수들을 같게 두면 다음을 얻을 수 있다.

$$\varepsilon^0; D_0^2 \psi_{n0} + \omega_n^2 \psi_{n0} = 2K_n \cos \Omega T_0 \\ n=1, 2, \dots \quad (18)$$

$$\varepsilon^1; D_0^2 \psi_{n1} + \omega_n^2 \psi_{n1} = -2D_0 D_1 \psi_{n0} - 2c_n D_0 \psi_{n0} \\ + \sum_{m,p,q=1}^{\infty} \Gamma_{nmpq} \psi_{m0} \psi_{p0} \psi_{q0}, \\ n=1, 2, \dots \quad (19)$$

$$\varepsilon^2; \quad \vdots$$

식(18)의 해는 다음과 같이 주어진다.

$$\psi_{n0} = A_n(T_1, T_2, \dots) \exp(i\omega_n T_0) \\ + \Lambda_n \exp(i\Omega T_0) + cc \\ n=1, 2, \dots \quad (20)$$

여기서 cc 는 왼쪽항의 공액 복소수이며 Λ_n 는 다음과 같다.

$$\Lambda_n = \frac{K_n}{\omega_n^2 - \Omega^2}$$

현재로서 A_n 은 미지의 복소함수이지만 고차 단계에서의 근사에서 해의 유계조건 즉 불멸항 (secular terms)이 소거되어야 한다는 조건으로부터 구해진다. 식(20)을 식(19)에 대입하면 다음을 얻게 된다.

$$D_0^2 \psi_{n1} + \omega_n^2 \psi_{n1} = -2i\omega_n (D_1 A_n \\ + c_n A_n) \exp(i\omega_n T_0) \\ - 2ic_n \Lambda_n \omega \exp(i\Omega T_0) \\ + \sum_{m,p,q=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \left[\Gamma_{nmpq} \sum_{j=1}^{27} S_j \exp(i\lambda_j T_0) \right] + cc \\ n=1, 2, \dots \quad (21)$$

여기서 S_j 과 λ_j 는 부록 A.1의 Table.1에 나타나 있다.

ψ_{n1} 으로부터 불멸항을 소거하기 위해선 $\exp(i\omega_n T_0)$ 의 계수가 0이 되도록 A_n 이 결정되어야 한다. 이 계수는 ω_n 의 다음의 조건

$$\omega_n \approx \pm \omega_m \pm \omega_p \pm \omega_q \text{ (모든 부호가 -가 되는 경우는 제외)} \quad (22)$$

을 만족할 때 비선형항을 포함하게 된다. 즉 식(22)을 만족할 때 제는 내부공진을 가지게 된다.

3. 정상상태 응답

이 장에서는 이제까지의 해석을 기초로 해서 실제 문제의 정상상태 (steady-state) 응답을 구해 본다. 원판의 주위가 꺾쇠로 고정된 경우의 고유치 문제 (14)의 해는 다음과 같다. (Fig. 2)

$$\phi_m = C_m [J_0(k_m r) I_0(k_m) - J_0(k_m) I_0(k_m r)]$$

여기서 k_m 은 다음 특성방정식의 근이다.

$$J_0'(k) I_0(k) - J_0(k) I_0'(k) = 0 \\ \omega_m = k_m^2 \quad (23)$$

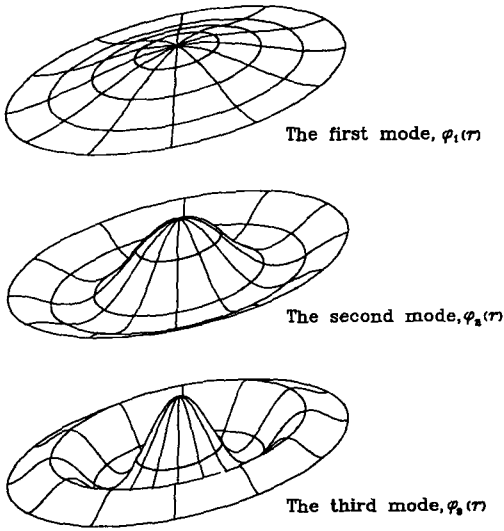


Fig. 2 Eigenfunctions of the circular plate

또한, C_m 은 다음과 같이 정규화(normalize) 함으로써 구해진다.

$$\int_0^1 r\phi_m^2 dr = 1$$

여기서 r 은 가중함수(weighting function)이다.

식(23)에서 다음과 같은 처음 다섯개의 고유진동수가 얻어진다.

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 10.2158, \quad \omega_2 = 39.7710 \\ \omega_3 &= 89.1040, \quad \omega_4 = 158.1830, \quad \omega_5 = 247.0050 \end{aligned}$$

이 고유진동수와 내부공진 조건 (22)을 관찰하면 $\omega_1 + 2\omega_2 \approx \omega_3$ 임을 알 수 있으며 이탈변수(detuning parameter)를 이용하여 다음과 같이 표현한다.

$$\omega_1 + 2\omega_2 = \omega_3 + \varepsilon\sigma_1 \tag{24}$$

여기서 내부공진은 3개의 모우드를 포함하고, $\varepsilon\sigma_1$ 는 0.6538이다.

식(11)과 식(12)으로부터

$$\frac{\partial F}{\partial r} = G \tag{25}$$

로 두면 이의 경계조건은 아래와 같이 된다.

$$r=1 \text{에서 } \frac{\partial G}{\partial r} + \nu G = 0 \tag{26}$$

식(25)과 식(13)을 식(11)에 대입하면

$$r^2 \frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + r \frac{\partial G}{\partial r} - G = -\frac{1}{2} r \left[\sum_{m=1}^{\infty} \phi_m \phi'_m \right] \tag{27}$$

을 얻게 된다. 함수 G 는 직교 고유함수의 급수 전개로써 나타낼 수 있다. $[r^2 d^2/dr^2 + rd/dr - 1]J_1(\zeta_m r) = -\zeta_m^2 r^2 J_1(\zeta_m r)$ 이므로, G 는 다음과 같이 나타내는 것이 편리하다.

$$G(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \eta_m(t) J_1(\zeta_m r) \tag{28}$$

여기서 ζ_m 은 식(26)을 만족하여야 하며, 다음 식의 근이 된다.

$$\zeta J_0(\zeta) - (1 + \nu) J_1(\zeta) = 0 \tag{29}$$

$\nu = 1/3$ 일 때, 윗 식은 아래와 같은 처음 18개의 근을 가진다.

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= 1.545, \quad \zeta_2 = 5.266, \quad \zeta_3 = 8.497, \quad \zeta_4 = 11.68 \\ \zeta_5 &= 14.84, \quad \zeta_6 = 18.00, \quad \zeta_7 = 21.15, \quad \zeta_8 = 24.30 \\ \zeta_9 &= 27.45, \quad \zeta_{10} = 30.59, \quad \zeta_{11} = 33.74, \quad \zeta_{12} = 36.88 \\ \zeta_{13} &= 40.03, \quad \zeta_{14} = 43.17, \quad \zeta_{15} = 46.31, \quad \zeta_{16} = 49.46 \\ \zeta_{17} &= 52.60, \quad \zeta_{18} = 55.74 \end{aligned}$$

본 연구에서는 $\Omega \approx 2\omega_1 + \omega_2$ 인 경우에 대해 고찰하기로 하고 이탈변수(detuning parameter)를 이용하여 다음과 같이 표현한다.

$$\Omega = 2\omega_1 + \omega_2 + \varepsilon\sigma_2 \tag{30}$$

공진조건 (24)과 (30)을 식(21)에 대입한 후 불멸항을 소거하면 다음을 얻게 된다.

$n=1$ 일때 :

$$\begin{aligned} -2i\omega_1(A_1' + c_1 A_1) + A_1 \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{1j} A_j \bar{A}_j \\ + Q_1 \bar{A}_2^2 A_3 \exp(-i\sigma_1 T_1) \\ + 2H_{11} A_1 + 2F \bar{A}_1 \bar{A}_2 \exp(i\sigma_2 T_1) = 0 \end{aligned} \tag{31a}$$

$n=2$ 일때 :

$$\begin{aligned} -2i\omega_2(A_2' + c_2 A_2) + A_2 \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{2j} A_j \bar{A}_j \\ + Q_2 \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 \exp(-i\sigma_1 T_1) \\ + 2H_{22} A_2 + F \bar{A}_1^2 \exp(i\sigma_2 T_1) = 0 \end{aligned} \tag{31b}$$

$n=3$ 일때 :

$$\begin{aligned} -2i\omega_3(A_3' + c_3 A_3) + A_3 \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{3j} A_j \bar{A}_j \\ + Q_3 A_1 A_2^2 \exp(i\sigma_1 T_1) + 2H_{33} A_3 = 0 \end{aligned} \tag{31c}$$

$n \geq 4$ 일때 :

$$-2i\omega_n(A_n' + c_n A_n) + A_n \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{nj} A_j \bar{A}_j$$

$$+2H_{nn}A_n=0 \quad (31d) \quad \text{식 (34a)에서}$$

여기서 계수는 다음과 같으며 그 구체적인 값은 부록 A. 2~A. 4에 나타나 있다.

$$Q_1=(2\Gamma_{1223}+\Gamma_{1322})=Q_3$$

$$Q_2=2Q_1$$

$$H_{nk}=\sum_{m,j=1}^{\infty}(2\Gamma_{nmkj}+\Gamma_{nkmj})\Lambda_m\Lambda_j$$

$$F=\sum_{j=1}^{\infty}(2\Gamma_{121j}+\Gamma_{112j})\Lambda_j$$

그리고 A_n 을 다음과 같이 두면 편리하다.

$$A_n=\frac{1}{2}a_n\exp[i\beta_n], \quad n=1, 2, \dots \quad (32)$$

식 (32)를 식 (31a)에서 (31d)까지 대입하고 그 결과를 실수부와 허수부로 분리하면 다음식을 얻게 된다.

$n=1, 2, 3$:

$$\omega_1(a_1'+c_1a_1)+Qa_2^2a_3\sin\mu_1+\frac{1}{2}Fa_1a_2\sin\mu_2=0 \quad (33a)$$

$$\begin{aligned} \omega_1a_1\beta_1'+\frac{1}{8}a_1\sum_{j=1}^{\infty}a_{1j}a_j^2+Qa_2^2a_3\cos\mu_1 \\ +H_{11}a_1+\frac{1}{2}Fa_1a_2\cos\mu_2=0 \end{aligned} \quad (33b)$$

$$\begin{aligned} \omega_2(a_2'+c_2a_2)+2Qa_1a_2a_3\sin\mu_1 \\ +\frac{1}{4}Fa_1^2\sin\mu_2=0 \end{aligned} \quad (33c)$$

$$\begin{aligned} \omega_2a_2\beta_2'+\frac{1}{8}a_2\sum_{j=1}^{\infty}a_{2j}a_j^2+2Qa_1a_2a_3\cos\mu_1 \\ +H_{22}a_2+\frac{1}{4}Fa_1^2\cos\mu_2=0 \end{aligned} \quad (33d)$$

$$\omega_3(a_3'+c_3a_3)-Qa_1a_2^2\sin\mu_1=0 \quad (33e)$$

$$\begin{aligned} \omega_3a_3\beta_3'+\frac{1}{8}a_3\sum_{j=1}^{\infty}a_{3j}a_j^2+Qa_1a_2^2\cos\mu_1+H_{33}a_3=0 \end{aligned} \quad (33f)$$

$n \geq 4$:

$$\omega_n(a_n'+c_n a_n)=0 \quad (34a)$$

$$\omega_n a_n \beta_n' + \frac{1}{8} a_n \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} a_j^2 + H_{nn} a_n = 0 \quad (34b)$$

여기서

$$8Q=Q_1 \quad (35a)$$

$$\mu_1=\beta_1+2\beta_2-\beta_3+\sigma_1 T_1 \quad (35b)$$

$$\mu_2=2\beta_1+\beta_2-\sigma_2 T_1$$

이며 계수 a_{ij} 는 부록 A. 2에 나타나 있다.

$$a_n \propto \exp(-ic_n T_1), \quad n \geq 4$$

따라서 a_1, a_2, a_3 를 제외한 모든 a_n 은 충분히 시간이 지나면 소멸하고 만다. 우리는 시간이 충분히 지나고 난 후의 해(long-term behavior)에만 관심이 있으므로 이 $a_n (n \geq 4)$ 을 논의에서 제외하면 다음을 얻게 된다.

$$a_1'=-c_1 a_1-\frac{Q}{\omega_1} a_2^2 a_3 \sin \mu_1-\frac{1}{2 \omega_1} F a_1 a_2 \sin \mu_2 \quad (36a)$$

$$a_2'=-c_2 a_2-\frac{2 Q}{\omega_2} a_1 a_2 a_3 \sin \mu_1-\frac{1}{4 \omega_2} F a_1^2 \sin \mu_2 \quad (36b)$$

$$a_3'=-c_3 a_3+\frac{Q}{\omega_3} a_1 a_2^2 \sin \mu_1 \quad (36c)$$

$$\begin{aligned} \beta_1'=-\frac{1}{8 \omega_1} \sum_{j=1}^3 a_{1j} a_j^2-\frac{Q}{\omega_1 a_1} a_2^2 a_3 \cos \mu_1 \\ -\frac{H_{11}}{\omega_1}-\frac{1}{2 \omega_1} F a_2 \cos \mu_2 \end{aligned} \quad (36d)$$

$$\begin{aligned} \beta_2'=-\frac{1}{8 \omega_2} \sum_{j=1}^3 a_{2j} a_j^2-\frac{2 Q}{\omega_2} a_1 a_3 \cos \mu_1 \\ -\frac{H_{22}}{\omega_2}-\frac{1}{4 \omega_2 a_2} F a_1^2 \cos \mu_2 \end{aligned} \quad (36e)$$

$$\beta_3'=-\frac{1}{8 \omega_3} \sum_{j=1}^3 a_{3j} a_j^2-\frac{Q}{\omega_3 a_3} a_1 a_2^2 \cos \mu_1-\frac{H_{33}}{\omega_3} \quad (36f)$$

$$\mu_1'=\beta_1'+2\beta_2'-\beta_3'+\sigma_1 \quad (36g)$$

$$\mu_2'=2\beta_1+\beta_2'-\sigma_2 \quad (36h)$$

여기서 식 (36a, b, c)를 관찰하면 다음과 같은 2가지의 가능성이 존재함을 알 수 있다. 즉 (i) $a_1=a_2=a_3=0$, (ii) $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0, a_3 \neq 0$ 인 경우이다.

우리는 (ii) 경우에 대해 관심있으므로 식 (36d, e, f, g, h)을 조합하면 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \mu_1'=\sigma_1+\frac{1}{8} \sum_{n=1}^3\left(\frac{\alpha_{3n}}{\omega_3}-\frac{2 \alpha_{2n}}{\omega_2}-\frac{\alpha_{1n}}{\omega_1}\right) a_n^2 \\ +Q\left(\frac{a_1 a_2^2}{\omega_3 a_3}-\frac{4 a_1 a_3}{\omega_2}-\frac{a_2^2 a_3}{\omega_1 a_1}\right) \cos \mu_1 \\ +\left(\frac{H_{33}}{\omega_3}-\frac{2 H_{22}}{\omega_2}-\frac{H_{11}}{\omega_1}\right) \\ -F\left(\frac{a_1^2}{2 \omega_2 a_2}+\frac{a_2}{2 \omega_1}\right) \cos \mu_2 \end{aligned} \quad (37a)$$

$$\begin{aligned} \mu_2'=-\sigma_2-\frac{1}{8} \sum_{n=1}^3\left(\frac{2 \alpha_{1n}}{\omega_1}+\frac{\alpha_{2n}}{\omega_2}\right) a_n^2 \\ -2 Q\left(\frac{a_2^2}{\omega_1 a_1}+\frac{a_1}{\omega_2}\right) a_3 \cos \mu_1-\left(\frac{2 H_{11}}{\omega_1}+\frac{H_{22}}{\omega_2}\right) \end{aligned}$$

$$-F\left(\frac{a_2}{\omega_1} + \frac{a_1^2}{4\omega_2 a_2}\right)\cos\mu_2 \quad (37b)$$

진폭 a_n 과 위상 μ_n 에 대한 자율 상미분방정식 (autonomous ordinary differential equation)으로 표현된 식(36a, b, c)와 식(37)로부터 정상상태 ($a_1' = a_2' = a_3' = \mu_1' = \mu_2' = 0$)에서의 응답을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\omega_1 c_1 a_1 + Q a_2^2 a_3 \sin\mu_1 + \frac{1}{2} F a_1 a_2 \sin\mu_2 = 0 \quad (38a)$$

$$\omega_2 c_2 a_2 + 2Q a_1 a_2 a_3 \sin\mu_1 + \frac{1}{4} F a_1^2 \sin\mu_2 = 0 \quad (38b)$$

$$\omega_3 c_3 a_3 - Q a_1 a_2^2 \sin\mu_1 = 0 \quad (38c)$$

$$\begin{aligned} \sigma_1 + \frac{1}{8} \sum_{n=1}^3 \left(\frac{\alpha_{3n}}{\omega_3} - \frac{2\alpha_{2n}}{\omega_2} - \frac{\alpha_{1n}}{\omega_1} \right) a_n^2 \\ + Q \left(\frac{a_1 a_2^2}{\omega_3 a_3} - \frac{4a_1 a_3}{\omega_2} - \frac{a_2^2 a_3}{\omega_1 a_1} \right) \cos\mu_1 \\ + \left(\frac{H_{33}}{\omega_3} - \frac{2H_{22}}{\omega_2} - \frac{H_{11}}{\omega_1} \right) \end{aligned} \quad (38d)$$

$$-F\left(\frac{a_1^2}{2\omega_2 a_2} + \frac{a_2}{2\omega_1}\right)\cos\mu_2 = 0 \quad (38d)$$

$$\begin{aligned} \sigma_2 + \frac{1}{8} \sum_{n=1}^3 \left(\frac{2\alpha_{1n}}{\omega_1} + \frac{\alpha_{2n}}{\omega_2} \right) a_n^2 \\ + 2Q \left(\frac{a_2^2}{\omega_1 a_1} + \frac{a_1}{\omega_2} \right) a_3 \cos\mu_1 + \left(\frac{2H_{11}}{\omega_1} + \frac{H_{22}}{\omega_2} \right) \\ + F \left(\frac{a_2}{\omega_1} + \frac{a_1^2}{4\omega_2 a_2} \right) \cos\mu_2 = 0 \end{aligned} \quad (38e)$$

그리고 β_1' , β_2' 와 β_3' 는 식(36d, e, f)에서 얻을 수 있다 그러나, β_1 , β_2 와 β_3 는 아래와 같이 초기조건에 의해 결정되는 상수(τ_n)들에 의해서만이 구해질 수 있다.

$$\beta_n = \beta_n' T_0 + \tau_n \quad n=1, 2, 3 \quad (39)$$

정상상태 변형을 구하기 위해 식(32)를 식(20)에 대입하고 이것을 다시 식(16b)에 대입한 다음 (13)식에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} w(r, t) = & \phi_1(t) \phi_1(r) + \phi_2(t) \phi_2(r) \\ & + \phi_3(t) \phi_3(r) \\ = & \varepsilon^0 \{ \phi_{10}(t) \phi_1(r) + \phi_{20}(t) \phi_2(r) \\ & + \phi_{30}(t) \phi_3(r) \} \\ & + \varepsilon^1 \{ \phi_{11}(t) \phi_1(r) + \phi_{21}(t) \phi_2(r) \\ & + \phi_{31}(t) \phi_3(r) \} \\ & + \varepsilon^2 \{ \phi_{12}(t) \phi_1(r) + \phi_{22}(t) \phi_2(r) \\ & + \phi_{32}(t) \phi_3(r) \} \\ & \vdots \end{aligned} \quad (40)$$

여기서

$$\begin{aligned} \phi_{10} = & A_1 \exp(i\omega_1 T_0) + A_1 \exp(i\Omega T_0) + cc \\ = & \frac{1}{2} a_1 \exp[i(\beta_1 + \omega_1 T_0)] \\ & + \frac{1}{2} a_1 \exp[-i(\beta_1 + \omega_1 T_0)] \\ & + A_1 \exp(i\Omega T_0) + A_1 \exp(-i\Omega T_0) \\ = & a_1 \cos[\omega_1 \beta_1 + T_0] + 2A_1 \cos(\Omega T_0) \end{aligned}$$

마찬가지로 ϕ_{20} , ϕ_{30} 를 구해서 식(32)에 대입하고 정리하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} w(r, t) = & a_1 \cos[\beta_1 + \omega_1 T_0] \phi_1(r) \\ & + a_2 \cos[\beta_2 + \omega_2 T_0] \phi_2(r) \\ & + a_3 \cos[\beta_3 + \omega_3 T_0] \phi_3(r) \\ & + 2 \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \phi_n(r)] \cos(\Omega T_0) + O(\varepsilon) \end{aligned} \quad (41)$$

그래서 식(39)을 식(41)에 대입하면 정상상태에서의 변형은 다음과 같이 표현된다.

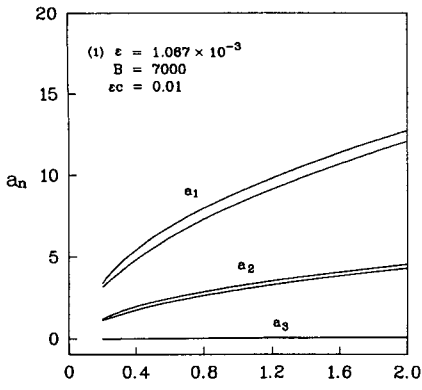
$$w(r, t) = w_n(r, t) + w_1(r, t) + O(\varepsilon) \quad (42)$$

여기서

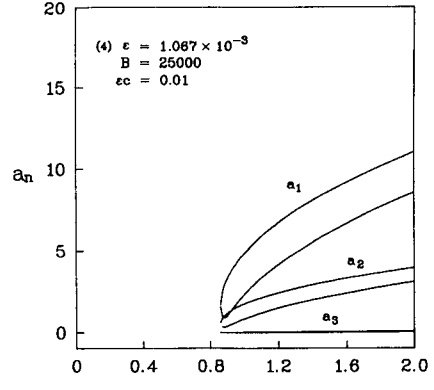
$$\begin{aligned} w(r, t) = & a_1 \cos[(\omega_1 + \varepsilon \beta_1') T_0 + \tau_1] \phi_1(r) \\ & + a_2 \cos[(\omega_2 + \varepsilon \beta_2') T_0 + \tau_2] \phi_2(r) \\ & + a_3 \cos[(\omega_3 + \varepsilon \beta_3') T_0 + \tau_3] \phi_3(r) \\ w_1(r, t) = & 2 \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \phi_n(r)] \cos(\Omega T_0) \end{aligned}$$

이다. 여기서 T_0 은 t 이다.

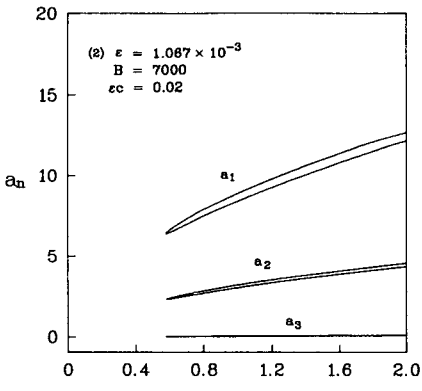
변형 $w_n(r, t)$ 은 세 고유진동모드로 구성되어 있으며 식(38)로부터 비선형항을 무시하였을 경우 즉 선형계의 경우에는 그 진폭 a_1 , a_2 , a_3 가 0이 됨을 알 수 있다. 다시 말하자면 이 변형은 비선형항 때문에 생겨난 변형이므로 편의상 비선형 변형(deflection of nonlinear system)이라고 부르기로 한다. 한편 변형 $w_1(r, t)$ 는 가진력의 진동수와 같은 진동수를 가지는 변형이며 선형계의 강제진동 응답에 해당하므로 선형 변형(deflection of linear system)이라고 부른다. 이 문제에서는 가진력의 진동수 Ω 가 고유진동수 ω_n 중의 하나의 근방에 있는 것이 아니라 이들의 특별한 조합인 $2\omega_1 + \omega_2$ 근방에 있으므로 $w_1(r, t)$ 은 비공진 응답(nonresonant response) A_n 에 기인한 항임을 유념해야 한다. 본 연구에서는 비선형 변형 $w_n(r, t)$ 의 진폭 a_1 , a_2 , a_3 가 여러 매개변수 즉 감쇠계수, 가진진동수, 가진진폭에 따라 어떻게 변화하는가를 조사하기로 한다.



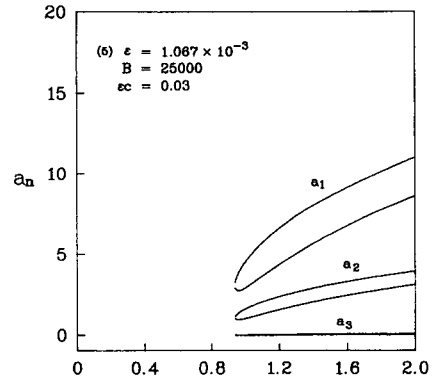
(a)



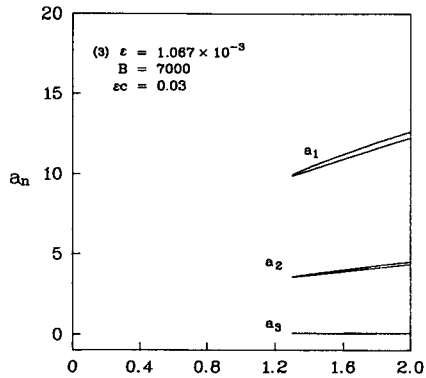
(d)



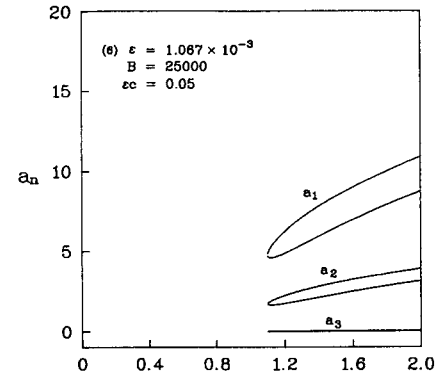
(b)



(e)



(c)



(f)

Fig. 3 Variation of a_1 , a_2 and a_3 with the excitation frequency

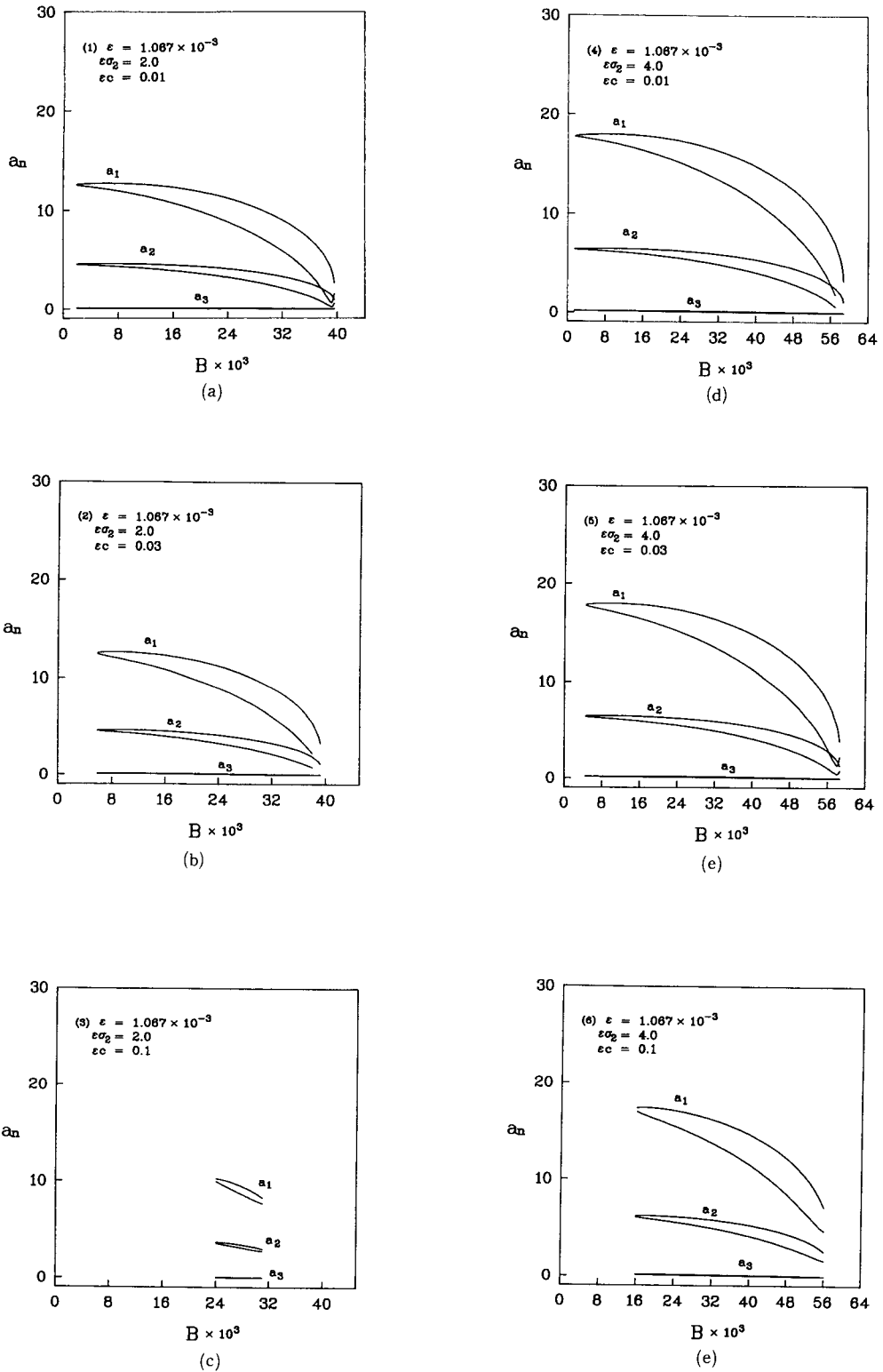


Fig. 4 Variation of a_1 , a_2 and a_3 with the excitation amplitude

4. 수치 예 및 검토

정상상태 응답을 구하기 위해서 먼저 식 (38)에 나타난 여러 계수값을 먼저 구하여야 한다. 우선 무한급수의 형태로 표현되는 0차 1종 Bessel 함수 (J_0 ; the Bessel function of the first kind of order 0), 1차 1종 Bessel 함수 (J_1 ; the Bessel function of the first kind of order 1)와 수정 0차 1종 Bessel 함수 (I_0 ; the modified Bessel function of the first kind of order 0), 수정 1차 1종 Bessel 함수 (I_1 ; the modified Bessel function of the first kind of order 1)의 값을 얻기 위하여 몇 개의 급수항까지 포함시켜야 할 것인지를 결정하기 위해 함수값의 계산 결과를 기존의 mathematical table

(19)과 비교해 볼 필요가 있었다. 이를 통하여 J_0 는 19항, J_1 는 21항, I_0 와 I_1 는 19항까지의 급수전개를 고려하였을 때 Table과 거의 같은 값을 얻을 수 있었다. 따라서 본 연구에서는 J_0 , J_1 와 I_0 , I_1 으로 이루어진 고유치문제의 해와 가진진폭과 가진진동수에 의해 결정되는 Λ_n 그리고 무한개의 덧셈으로 표현되면서 또한 J_1 , I_1 로 이루어진 Γ_{nmpq} 에 대한 값을 얻기위해 우선 기존 연구들(15,17,18)에서 구한 Γ_{nmpq} 의 값들과 비교, 여러 Bessel함수의 적절한 급수항을 알아 보았다. Γ_{nmpq} 를 구하기 위해서는 J_0 , J_1 는 100항 정도, I_0 , I_1 는 50항 정도까지의 급수전개로 그 값들을 구할 수 있었다(부록 A. 2). 다음으로 앞에서 얻은 Bessel 함수의 급수항들을 이용하여 본 연구에서 나타나는 H_{nk} 와 F 에 대한 계수값을 구하였다(부록 A. 4). 이와 같이 구한 계수값을 이용하여 비선형 대수방정식 (38a)~(38e)

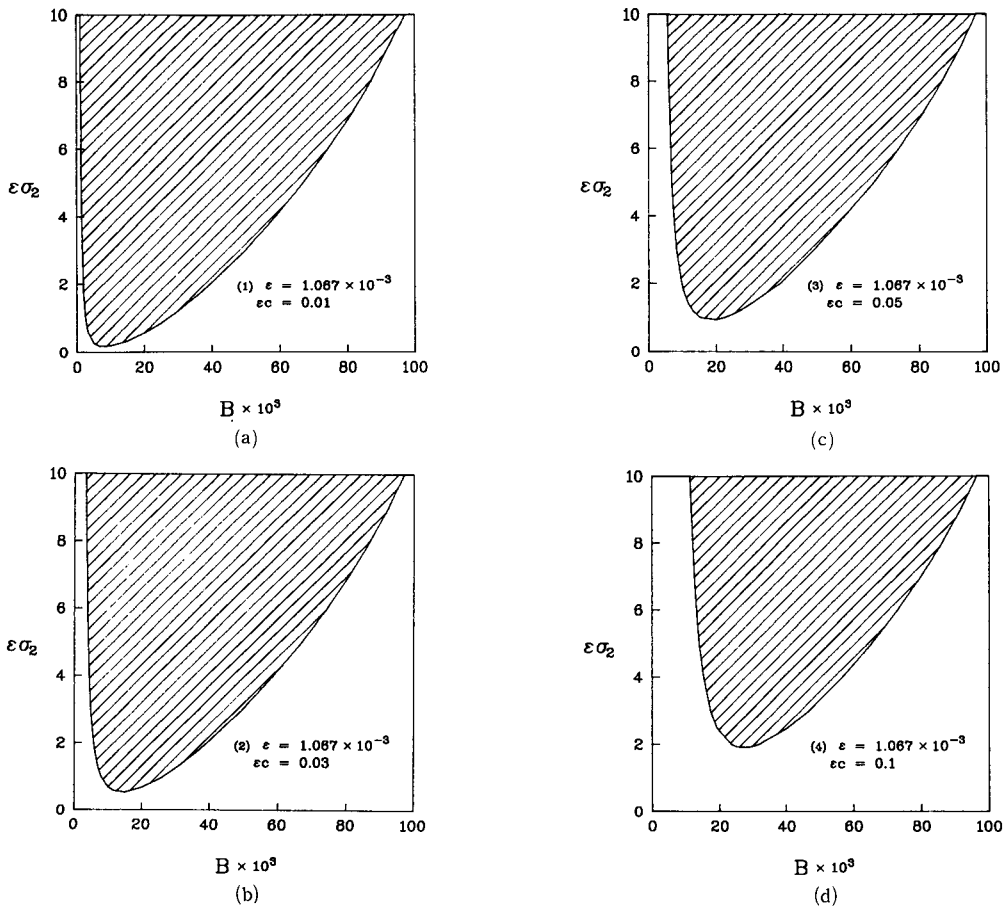


Fig. 5 Bifurcation diagram in parameter plane

의 해를 Newton-Raphson 방법으로써 구하였다(부록 B). 또한 본 연구에서는 $\varepsilon = 1.067 \times 10^{-3(15,18)}$ 으로 두었다.

Fig. 3(a~f)은 여러 감쇠계수 εc 와 가진진폭 B 의 경우에 각 모드의 진폭 a_1, a_2, a_3 를 가진진동수를 결정하는 이탈변수(detuning parameter) $\varepsilon \sigma_2$ 의 함수로 나타내었다. 각 응답은 쌍으로 나타나는데 진폭이 큰 응답을 upper branch, 진폭이 작은 응답을 lower branch 응답이라고 한다. 관찰에 의하여 가진진동수가 증가함에 따라 a_1, a_2 가 증가하며 a_3 는 거의 0에 가까움을 알 수 있다. 또한 감쇠계수가 증가함에 따라 응답이 존재하는 가진주파수의 최소치가 증가함을 알 수 있다.

Fig. 4(a~f)은 여러 εc 와 $\varepsilon \sigma_2$ 의 경우에 각 모드의 진폭을 가진진폭의 함수로 나타낸 것이다. 가진진폭이 증가할수록 각 모드의 진폭이 감소하는 경향을 보여준다. 앞에서 언급했다시피 식(42)의 정상상태 변형 $w(r, t)$ 는 비선형항 때문에 생겨난 비선형 변형 $w_n(r, t)$ 와 선형계의 강제진동응답에 해당하는 선형 변형 $w_1(r, t)$ 로 구성되어 있다. 본 연구에서는 우선 정상상태에서의 비선형 변형 $w_n(r, t)$ 만을 연구 대상으로 삼고 있다. 즉, 가진진폭이 증가함에 따라 비선형 변형 $w_n(r, t)$ 의 진폭 a_1, a_2, a_3 가 감소한다 하더라도 선형 변형 $w_1(r, t)$ 의 진폭 Λ_n 의 일부는 증가할 수도 있는 것이다. 다시 말하자면 가진력을 통해 원판에 공급된 에너지는 비선형 변형과 선형 변형으로 모습을 드러내게 되는데 가진진폭을 증가시키므로써 증가한 공급에너지는 비선형 변형이 감소하더라도 선형 변형이 증가한다면 에너지의 균형을 유지하게 될 것이다. 물론 이러한 추정을 확인하기 위해서는 가진진폭이 증가함에 따라 Λ_n 이 어떻게 변화하는가를 조사해 보아야 할 것이다. 이러한 선형 비공진 응답은 장차의 연구에서 더욱 자세히 이루어져야 하리라고 본다. 한편 Sridhar 등^(15~16)과 Hadian 및 Nayfeh⁽¹⁸⁾은 $\Omega \approx \omega_3$ 인 경우를 연구한 결과 가진진폭이 증가함에 따라 진폭 a_1 과 a_2 는 감소하였으나 진폭 a_3 는 증가함을 확인하였다. 그러나 이 경우에는 선형 응답이 존재하지 않으므로 에너지 균형의 개념에 잘 부합되는 결과라고 할 수 있다.

이상에서 살펴본 바와 같이 정상상태에서의 비선형 변형응답의 존재유무는 매개변수에 달려 있다. 따라서 매개변수들의 어떤 조합에서 이 변형이 존재하는 지를 알아보기 위하여 Fig. 5(a~d)를 그렸다. 이 $B-\varepsilon \sigma_2$ 평면에서 빗금친 부분은 이 변형 $w_n(r, t)$ 의 존재영역이며 이 밖에서는 비선형 변형은 존재하지 않고 오로지 선형 변형 $w_1(r, t)$ 만이 존재하게 된다. 결론적으로 이 빗금친 영역에서만 운동방정식 (15)의 비선형항이 계에 영향을 미치며 이 영역 밖에선 이 비선형항의 존재가 계에 아무런 영향을 미치지 못함을 의미한다.

5. 결 론

중간평면의 비선형신장을 가진 원판의 강제진동해석을 위하여 내부공진($\omega_3 \approx \omega_1 + 2\omega_2$)과 조화 가진력의 진동수가 원판의 고유진동수의 조합($\omega \approx 2\omega_1 + \omega_2$)으로 표현되는 경우 즉 조합공진을 고려하여 해석한 결과 원판의 변형은 비선형항 때문에 생겨난 변형 즉 비선형 변형과 선형계의 강제진동응답에 해당하는 변형 즉 선형 변형으로 구성됨을 알 수 있었다. 그 중에서 비선형 변형에 대하여 고찰한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 가진진동수가 증가함에 따라 첫번째 및 두번째 모드의 진폭 a_1, a_2 는 증가하며 세번째 모드의 진폭 a_3 는 거의 0에 가깝다. 또한 감쇠계수가 증가함에 따라 응답이 존재하는 가진주파수의 최소치가 증가한다.

(2) 가진진폭이 증가할수록 각 모드의 진폭이 감소하는 경향을 보이는 데 이것은 선형계에서는 볼 수 없는 현상이다.

(3) 감쇠계수, 가진진동수, 가진진폭 등의 매개변수가 적절한 값을 가지는 경우에는 비선형항의 존재가 계에 아무런 영향에을 미치지 못할 수도 있다.

후 기

본 연구는 한국과학재단의목적기초연구비(1989-1992)의 지원에 의한 것임.

부록 A

Table 1 Coefficients S_j and λ_j in equation (21)

$$\sum_{m,p,q=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_{nmpq} [\sum S_j \exp(i\lambda_j T_0)]$$

j	S_j	λ_j	j	S_j	λ_j
1	$A_m A_p A_q$	$\omega_m + \omega_p + \omega_q$	15	$A_q \bar{A}_m \bar{A}_p$	$-2\Omega + \omega_q$
2	$A_m A_p \bar{A}_q$	$\omega_m + \omega_p - \omega_q$	16	$A_m A_p \bar{A}_q$	$\Omega + \omega_m + \omega_p$
3	$A_m \bar{A}_p A_q$	$\omega_m - \omega_p + \omega_q$	17	$A_m A_p \bar{A}_q$	$-\Omega + \omega_m + \omega_p$
4	$\bar{A}_m A_p A_q$	$-\omega_m + \omega_p + \omega_q$	18	$A_p A_q \bar{A}_m$	$\Omega + \omega_p + \omega_q$
5	$2A_m \bar{A}_p \bar{A}_q$	ω_m	19	$A_p A_q \bar{A}_m$	$-\Omega + \omega_p + \omega_q$
6	$2A_p \bar{A}_p \bar{A}_q$	ω_p	20	$A_q \bar{A}_m \bar{A}_p$	$\Omega + \omega_q + \omega_m$
7	$2A_q \bar{A}_p \bar{A}_q$	ω_q	21	$A_q \bar{A}_m \bar{A}_p$	$-\Omega + \omega_q + \omega_m$
8	$3A_m \bar{A}_p \bar{A}_q$	Ω	22	$A_m A_p \bar{A}_q$	$\Omega + \omega_m - \omega_p$
9	$A_m \bar{A}_p \bar{A}_q$	3Ω	23	$A_m \bar{A}_p \bar{A}_q$	$-\Omega + \omega_m - \omega_p$
10	$A_m \bar{A}_p \bar{A}_q$	$2\Omega + \omega_m$	24	$A_p \bar{A}_q \bar{A}_m$	$\Omega + \omega_p - \omega_q$
11	$A_m \bar{A}_p \bar{A}_q$	$-2\Omega + \omega_m$	25	$A_p \bar{A}_q \bar{A}_m$	$-\Omega + \omega_p - \omega_q$
12	$A_p \bar{A}_q \bar{A}_m$	$2\Omega + \omega_p$	26	$A_q \bar{A}_m \bar{A}_p$	$\Omega + \omega_q - \omega_m$
13	$A_p \bar{A}_q \bar{A}_m$	$-2\Omega + \omega_p$	27	$A_q \bar{A}_m \bar{A}_p$	$-\Omega + \omega_q - \omega_m$
14	$A_q \bar{A}_m \bar{A}_p$	$2\Omega + \omega_p$			

Table 2 Variations of the coefficients appearing in equations (33a) through (33f) with the number of terms in Γ_{nmpq}

Coefficients	Values	
	2 terms	10 terms
$\alpha_{11} = 3\Gamma_{1111}$	-162.2283	-162.2283
$\alpha_{12} = 2(2\Gamma_{1212} + \Gamma_{1122}) = \alpha_{21}$	-848.4089	-883.8612
$\alpha_{13} = 2(2\Gamma_{1313} + \Gamma_{1133}) = \alpha_{31}$	-1428.699	-1644.867
$\alpha_{22} = 3\Gamma_{2222}$	-4991.609	-5552.414
$\alpha_{23} = 2(2\Gamma_{2323} + \Gamma_{2233}) = \alpha_{32}$	-10333.23	-14220.76
$\alpha_{33} = 3\Gamma_{3333}$	-27916.23	-34403.25
$Q_1 = 2\Gamma_{1223} + \Gamma_{1322} = Q_3$	-331.0542	-556.7445
$Q_2 = 2Q_1$	-662.1084	-1113.489

3. 본 연구에서는 수치 예를 위해 다음과 같이 분포하중이 균일하게 작용한다고 가정한다.

$$2K_n = B \int_0^1 r \phi_n(r) dr$$

$B=5000$, $\epsilon\sigma_2=1.0$ 인 경우에

$$\frac{2K_1}{B} = 0.515310, \quad \frac{2K_2}{B} = -0.290774,$$

$$\frac{2K_3}{B} = 0.200317$$

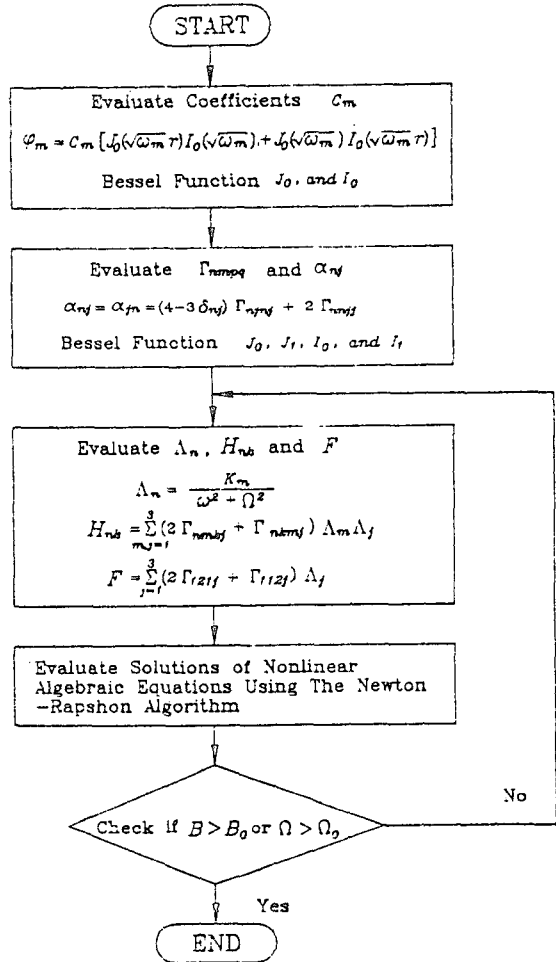
4. 그 외의 상수값들 :

$B=5000$, $\epsilon\sigma_2=1.0$ 인 경우에

$H_{11} = -65.4781$, $H_{22} = -778.154$,

$H_{33} = -1834.45$, $F = -117.689$

부록 B



1. 참고문헌

- (1) 김치환, 1988, "횡방향 전단변형과 수직변형을 고려한 기하학적 비선형 판이론", 서울대학교 학

공공학과 박사학위논문.

- (2) Yamaki, N., 1961, "Influence of Large Amplitudes on Flexural Vibrations of Elastic Plates," ZAMM, Vol. 41, pp. 501~510.
- (3) Nowinski, J. L., 1962, "Nonlinear Transverse Vibrations of Circular Elastic Plates Built-in at the Boundary," Proceeding 4th U.S. National Congress Applied Mechanics, pp. 325~334.
- (4) Ramachandran, J., 1974a, "Large Amplitude Vibrations of Circular Plates with Mixed Boundary Conditions," Computers and Structures, Vol. 4, pp. 871~877.
- (5) Crose, J. G. and Ang, A. H. S., 1969, "Nonlinear Analysis Method for Circular Plates," Journal of the Engineering Mechanics Division., Vol. 95, pp. 979~999.
- (6) Kung, G. C. and Pao, Y. H., 1972, "Nonlinear Flexural Vibrations of a Clamped Circular Plate," Journal of Applied Mechanics, Vol. 39, pp. 1050~1054.
- (7) Huang, C. L. and Sandman, B. E., 1971, "Large Amplitude Vibrations of a Rigidly Clamped Circular Plate," International Journal of Nonlinear Mechanics, Vol. 6, pp. 451~468.
- (8) Huang, C. L., 1973, "Finite Amplitude Vibrations of an Orthotropic Circular Plate with an Isotropic Core," International Journal of Nonlinear Mechanics, Vol. 8, pp. 445~457.
- (9) Rehfield, L. W., 1974, "Large Amplitude Forced Vibrations of Elastic Structures," AIAA Journal, Vol. 12, pp. 388~390.
- (10) Nayfeh, A. H., 1981, Introduction to Perturbation Techniques. New York: John Wiley and Sons.
- (11) Nayfeh, A. H., Mook, D. T. and Sridhar, S., 1974, "Nonlinear Analysis of the Forced Responses of Structural Elements," Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 55, pp. 281~291.
- (12) 이원경, 소강영, 1991, "내부공진을 가진 보의 비선형 강제진동해석", 대한기계학회논문집 제15권 제6호, pp. 1897~1907.
- (13) Sridhar, S., Nayfeh, A. H. and Mook, D. T., 1975, "Nonlinear Resonances in a Class of Multi-Degree-of-Freedom Systems," Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 58, pp. 113~123.
- (14) Lee, W. K. and Ghang, M. R., 1992, "Domains of Attraction of a Forced Beam by Interpolated Mapping," ASME Applied Mechanics, Materials and Aerospace Summer Meeting, Tempe, Arizona, April 28-May 1.
- (15) Sridhar, S., Mook, D. T. and Nayfeh, A. H., 1975, "Nonlinear Resonances in the Forced Responses of Plates. Part I : Symmetric Responses of Circular Plates," Journal of Sound and Vibration, Vol. 41, pp. 359~373.
- (16) Sridhar, S., Mook, D. T. and Nayfeh, A. H., 1978, "Nonlinear Resonances in the Forced Responses of Plates. Part II : Asymmetric Responses of Circular Plates," Journal of Sound and Vibration, Vol. 59, pp. 159~170.
- (17) Nayfeh, A. H. and Mook, D. T., 1979, Nonlinear Oscillations, New York: John Wiley and Sons.
- (18) Hadian, J. and Nayfeh, A. H., 1990, "Modal Interaction in Circular Plates," Journal of Sound and Vibration, Vol. 142, pp. 279~292.
- (19) Spiegel, M. R., 1968, Mathematical Handbook of Formulas and Tables, U. S. A.: McGraw-Hill, Inc., pp. 244~247.