

〈論 文〉

고체추진제 연소의 압력파에 대한 반응 :  
용융층영향하의 비정상상태 해석

이 형 인\*

(1992년 5월 21일 접수)

Response of Solid-Propellant Combustion to Pressure Wave:  
Transient Analysis with Melt-Layer Effects

Hyoung-In Lee

**Key Words :** Solid Propellant Combustion(고체추진제연소), Pressure Response(압력반응),  
Melt Layer(용융층), Transient Analysis(비정상상태해석)

Abstract

Solid propellant combustion is investigated for its response to several imposed pressure histories. For this purpose, it is assumed that combustion takes place in a premixed gas evaporated from a uniform melt of solid propellant. One-dimensional unsteady problem is then numerically solved for a pressure coupling, with a steady state as an initial state. The results in response to pressure of finite sinusoidal waves show that unsteady mass fluxes are sometimes quite different from those predicted by the classical quasisteady burning law of Vieille. In addition, abnormal mass flux excursions are captured for a large pressure exponent and a lower melting point.

기 호 설 명

$A$ : 열확산도의 비, $(\lambda_c \bar{\rho}_m \bar{C}_m) / (\lambda_m \bar{\rho}_c \bar{C}_c)$	$L$ : 용융층의 두께
$\bar{C}_c$ : 고체추진제의 비열	$n$ : 기체연소의 압력지수
$\bar{C}_g$ : 기체의 비열	$M$ : 기화질량유속
$C_g$ : 비열비, $\bar{C}_g / \bar{C}_c$	$N$ : 용융질량유속
$\bar{C}_m$ : 용융층의 비열	$P$ : 연소실 압력
$C_m$ : 비열비, $\bar{C}_m / \bar{C}_c$	$Q_g$ : 기체반응열
$E_g$ : 기체의 활성화에너지	$Q_m$ : 용융잠열
$f$ : 주파수	$Q_v$ : 기화열
$G$ : 고체의 온도구배	$R$ : 일반기체상수
$H$ : 용융층의 온도 구배	$t$ : 무차원시간, $\bar{t} / \bar{\tau}$
$\bar{T}$ : 고체의 특성길이, $\bar{\lambda}_c / (\bar{C}_c \bar{M}^*)$	$T$ : 온도
	$T_g$ : 기체의 화염온도
	$T_o$ : 추진제의 분위기온도
	$T_m$ : 추진제의 용융점
	$T_s$ : 기화온도
	$U$ : 수정된 용융층의 이송속도

\*정회원, 삼성종합기술원 컴퓨터 응용 연구실

$V$	: Riccati 함수
$W$	: 고체내의 함수, 식(26)
$x$	: 용융층의 무차원좌표, $\overline{x}/\overline{l}$
$y$	: 고체의 무차원좌표, $\overline{y}/\overline{l}$
$Y_s$	: 기체반응물질성분의 질량분율
$z$	: 수정된 용융층좌표, $x/L$
$\beta$	: 고체내의 근사적 무한한 위치
$\Delta t$	: 시간차분
$\gamma$	: 기체의 비열비
$\Gamma$	: 밀도비, $\overline{\rho}_m/\overline{\rho}_c$
$\Lambda$	: 열전도도비, $\overline{\lambda}_m/\overline{\lambda}_c$
$\overline{\rho}_c$	: 고체추진체의 밀도
$\overline{\rho}_m$	: 용융층의 밀도
$\overline{\lambda}_c$	: 고체추진체의 열전도도
$\overline{\lambda}_m$	: 용융층의 열전도도
$\tau$	: 고체의 특성시간, $(\overline{\lambda}_c \overline{\rho}_c)/[\overline{C}_c(\overline{M}^*)^2]$
$\zeta$	: 고체의 수정된 좌표, 식(29b)

#### 하첨자

$c$	: 고체추진체
$g$	: 기체
$m$	: 용융층
$s$	: 용융층-기체의 계면
$v$	: 증발

#### 상첨자

$i-1$	: 직전의 시간
*	: 정상상태
	: 차원량

## 1. 서 론

로켓의 고체추진체의 연소과정은 로켓 연소실내의 특성인 압력 및 유동장등과 밀접한 관계가 있다. 고체추진체가 상변화를 통하여 기화함에 따라 생성된 기체는 반응과정을 거쳐 에너지를 방출한다. 고체추진체의 표면이 근사적으로 평면이라고 보면, 고체-기체의 계면부근에서의 기체유동은 계면에 접선인 속도성분과 수직인 속도성분으로 나누어 볼 수 있다. 이 중에서, 수직속도는 추진체의 기화량에 비례하며 연소실의 측면에서 보아서 분출(transpiration)이 된다. 반면에, 접선속도는 분출

에 의해 연소실의 선단에서 후단의 노즐부로 갈수록 기체의 평균 속도가 증가함에 따라 고체·기체의 계면의 표면주위에 여기(excitation)되는 속도이다. Beddini<sup>(1)</sup>는 고체가 직접 기체로 상변화를 일으키는 추진체의 표면주위에서 난류유동장, 온도장의 상호작용을 해석하였다. 로켓의 추력은 수직속도에 비례하는데, 수직속도가 연소실내의 압력이 커질수록 증가하는 것을 압력연성(pressure coupling)이라 한다. 한편, 수직속도가 집선속도에 따라 증가하는 것을 속도연성(velocity coupling) 또는 침식연소(erosive burning)라 한다.

속도연성에 관하여는 적어도 이차원의 유동을 고려하여야 하므로 해석이 단순하지 않다.<sup>(2)</sup> 또한, 대부분의 로켓의 연소해석에서 속도연성의 효과는 수직속도-압력의 압력연성의 관계식에 수정항을 첨가하는 방법으로 고려하고 있다.<sup>(3)</sup> 따라서, 본고에서는 좀 더 근본이 되는 압력연성에 대하여 고찰하고자 한다. 고체추진체의 기화를 기술함에 있어서는, 흔히 고체에서 기체로 직접적으로 열분해(pyrolysis)를 통해 승화된다고 가정하고 있다. 그러나, 본고에서는 상당한 종류의 고체추진체에 있어서 보고된 바와 같이,<sup>(4)</sup> 고체추진체가 먼저 용융상태로 된 후에, 용융층이 증발을 통하여 기화하는 것으로 단순화 한다. 실제로는 용융층이 균일한 두께로 고체위에 위치하는 것은 아니고, 다차원적인 복잡한 계면에 부분적으로 존재하여 이에 따른 기체상태의 반응도 확산화염에 의한 연소로 봄이 정확하다. Beckstead 등<sup>(5)</sup>이 실제의 복잡한 연소현상을 설명하기 위해 화염에 대한 상당히 복잡하지만 다소 임의적인 모델을 도입하는 방향을 택하는데 반하여, 본고에서는 고체-용융층-기체의 단순모델에 부합하는 예혼합화염의 기체연소를 가정한다.

고체-용융층-기체의 상변화에 따른 본 문제는 고전적인 Stefan 문제보다 다소 복잡한 형태를 가지나, 이에 대한 일차원 비정상상태의 거동에 대한 이론<sup>(6)</sup> 및 수치해법은 비교적 잘 발달되었다. 특히, 좌표를 상변화 경계층에 고정시킴에 따라 나타나는 이송속도는 공간좌표에 무관하고 오직 시간에만 의존하므로, 이를 이용하여 공간좌표에 대하여 이차도함수를 갖는 열방정식을 본질적으로 한개의 일차도함수를 갖는 미분방정식으로 바꾸는 Riccati 변환을 이용한 해법이 Meyer<sup>(7)</sup>에 의해 발견되었다. 본고에서는 용융질량과 기화질량을 시간에 대한 함수로 구하는 데에 주안점을 두었는데, 이와

비슷하게 시간에 따라 변하는 세구역을 가진 문제가 참고문헌(8)에서 다루어져 있다.

로켓추진에 있어서 연소와 유동의 안정성이나 비정상상태의 과정을 고려할 경우에는, 고체추진제에 관련된 시간척도와 로켓의 연소실에 관련된 시간척도의 상대적인 크기에 따라 두가지의 경우를 들 수 있다. 그중의 한 경우로서, 연소실이 비교적 작으면 연소실내의 상태량들은 고체추진제의 특성시간척도로 볼 때 공간적으로 균질하게 하나의 덩어리로서 진동하는 양태를 보이게 되는데 이를  $L^*$ -불안정이라 부른다. 참고문헌(9)에서는 본고에서 고려한 상변화모델을 사용하여 이러한  $L^*$ -불안정에 대한 선형안정성을 검토하였다. 다른 경우로서, 연소실이 비교적 크면 연소실내의 상태량들은 고체추진제의 시간척도로 볼 때 공간적으로 비균질하여 연소실내에 파의 생성과 전파가 성립한다. 두번째 경우, 연소실내의 파동의 전파를 다루는 관점에서 보면 고체추진제의 표면은 분출 및 연소현상으로 말미암아 단단하다는 경계조건을 적용할 수 없고, 앞서 지적한 압력연성과 속도연성의 두 측면을 고려하여야 한다.<sup>(10)</sup> 본고에서 취급되는 압력연성만을 고려할 때, 종래부터 사용되어 오던 Vieille의 식은 연소기체의 생성량이 압력에 따라 순간적으로 진행되는 준정상적인 반응을 가정하고 있다.

이러한 종래의 연구결과를 교정하고 보충하기 위하여, 본고에서는 비정상적인 효과가 매우 클 경우에 추진제가 고체-용융층-기체의 상변화를 거쳐 변환된 기체가 화학반응을 할 때, Vieille의 관계식이 얼마나 수정되어야 하는가를 검토한다. 그러나, 연소실내의 파의 전파까지 고려하면 문제가 너무 커지므로, 시간의 함수로 주어진 압력에 대하여 기체의 생성 등이 어떻게 응답하는가 만이 연구되었다.

이를 위하여, 시간에 대하여 단순감소하거나 정현파로 주어진 압력함수를 입력으로 택하였고, 결과로서 용융과 기화의 질량유속의 시간변화를 주로 검토하였다. 또한, Vieille식의 압력지수의 변화에 대한 영향도 조사하였다. 또한, 용융층의 두께 등 특성치의 변화에 따른 응답의 변화도 검토하였다. 연성된 비선형 비정상 관계식들을 수치방법으로 적용하였다. 본고에서 논의된 압력에 대한 추진제의 고유응답(propellant-intrinsic response)은 로켓 및 화포의 성능을 평가하는데 있어서 기본특성이다.<sup>(11)</sup>

## 2. 지배 관계식

### 2.1 고상의 관계식

Fig. 1은 고체-용융층-기체의 상변화모델과 몇가지 사용기호를 보여준다. 고체-용융층의 계면에  $y$ -좌표의 원점을 고정시키면 고체내의 일차원 비정상 온도  $T(t, y)$ 를 지배하는 열방정식은 용융질량유속  $N$ 에 의한 부가적인 이송항을 포함하여 다음과 같다. 특히, 기호위의  $-$ 표시는 차원양을 표시하고, 이 표시가 없으면 무차원양을 나타낸다.

$$\bar{\rho}_c \bar{C}_c \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \bar{C}_c \bar{N} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} = \bar{\lambda}_c \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \quad (1)$$

여기서는,  $y$ -좌표는 고체추진제 내부로 갈수록 감소하게 잡았고  $\bar{N}$ 은 양수이다. 고체방향으로 후퇴하는 고체표면속도를  $\bar{V}_m$ 이라 하면  $\bar{N} \equiv \bar{\rho}_c \bar{V}_m$ 이며, 일반적으로  $\bar{N} = \bar{N}(t)$ 이다. 물성치  $\bar{\rho}_c$ ,  $\bar{C}_c$ ,  $\bar{\lambda}_c$  등은 상수로 주어진다. 무차원화를 위하여, 식(1)을 포함한 전체문제의 정상상태를 고려하는데, 상첨자 \*는 정상상태를 나타내기 위하여 한다. 그러면,  $\bar{N}^*$ 는 용융층의 증발질량유속  $\bar{M}(t)$ 의 정상상태량  $\bar{M}^*$ 와 같고 (즉,  $\bar{M}^* = \bar{N}^*$ ), 이를 기준질량유속으로 한다. 또한, 정상상태에서 생성된 기체가 연소 과정을 거친 후 얻어지는 단열연소온도  $\bar{T}_g^*$ 를 기준온도로 취한다.

$$(N, M) \equiv (\bar{N}, \bar{M}) / \bar{M}^*, \quad T \equiv \bar{T} / \bar{T}_g^* \quad (2a, b)$$

식(1)의 정상상태형태에서 이송항과 전도항의 균형을 취하면, 고체내의 열적이완(thermal relaxation) 과정에 근거한 기준시간  $\bar{\tau}$ 와 기준거리  $\bar{L}$ 가 정의된다. 그리고, 이에 따라서 좌표들이 무차원화된다.

$$\bar{\tau} \equiv \bar{\lambda}_c \bar{\rho}_c / [\bar{C}_c (\bar{M}^*)^2], \quad \bar{L} \equiv \bar{\lambda}_c / (\bar{C}_c \bar{M}^*) \quad (3a, b)$$

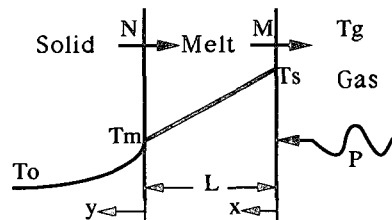


Fig. 1 Solid-melt-gas system for solid-propellant combustion

$$t \equiv \bar{t}/\bar{\tau}, \quad (x, y) \equiv (\bar{x}, \bar{y})/\bar{L} \quad (4a, b)$$

따라서, 무차원화된 고체내의 열전도방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial T}{\partial t} + N \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (5a)$$

$$\text{for } -\infty < y \leq 0, \quad 0 \leq t \quad (5b)$$

고체내부의 깊숙한 곳에서는 상수의 저장온도가, 그리고 고체-용융층의 경계에서는 상수의 용융온도가 유지되므로,

$$T \rightarrow T_0 \text{ as } y \rightarrow -\infty, \quad (6a)$$

$$T = T_m \text{ at } y = 0, \quad (6b)$$

## 2.2 용융층의 관계식

용융층과 기체에서의 식들을 유도하는 과정에 있어서, 여러 물성치들은 고체의 물성치들을 기준으로 무차원화된다. 그러나, 단위질량에 대한 각종 발열양들은 기체의 현열에너지  $\bar{C}_g \bar{T}_g^*$ 를 기준으로 무차원화된다.

$$\Gamma \equiv \frac{\bar{\rho}_m}{\bar{\rho}_c}, \quad A \equiv \frac{\bar{\lambda}_c \bar{\rho}_m \bar{C}_m}{\bar{\lambda}_m \bar{\rho}_c \bar{C}_c}, \quad Q_m \equiv \frac{\bar{Q}_m}{C_g \bar{T}_g^*} \quad (7)$$

앞으로 사용될 발열량  $Q_v$ ,  $Q_s$ 와  $Q_g$ 도 비슷하게 무차원된다. Fig. 1에서 보듯이, 용융층-기체 계면에  $x$ -좌표를 고정시키면 용융층내의 열방정식은 양수  $M$ 에 의한 추가적인 이송항을 포함한다. 그러나, 용융층내의 순수한 대류는 존재하지 않는다고 가정한다.

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{\Gamma} M \frac{\partial T}{\partial x} = A \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (8a)$$

$$\text{for } -L(t) \leq x \leq 0, \quad 0 \leq t \quad (8b)$$

물성치  $\Gamma$ 와  $A$ 는 용융층에서 성립하는 식(8a)을 식(3a, b)에서 정의된 고체의 특성기준치들으로써 무차원화하여 얻었기 때문에 나타났다. 여기에서,  $L \equiv \bar{L}/\bar{\tau}$ 로 정의되는데, 용융층의 문제는 시간에 의존하는 용융층의 두께  $L(t)$ 로 말미암아 조건(8b)에서와 같이 변하는 구간을 가진다. 고체-용융층의 개면에서는 온도에 관하여는 경계조건식(6b)가 적용되고, 동시에 양수의 용융열  $Q_m$ 을 흡수하므로 다음의 에너지평형식이 성립한다.

$$\Lambda \left[ \frac{\partial T}{\partial x} \right]_{x=-L} = \left[ \frac{\partial T}{\partial y} \right]_{y=0} + C_g Q_m N \quad (9a)$$

$$\text{for } x = -L \text{ or } y = 0 \quad (9b)$$

여기에서 그리고 앞으로의 식들을 위해, 다음의 무차원화된 물성치들이 정의된다.

$$\Lambda \equiv \bar{\lambda}_m / \bar{\lambda}_c, \quad C_g \equiv \bar{C}_g / \bar{C}_c, \quad C_m \equiv \bar{C}_m / \bar{C}_c \quad (10)$$

용융층-기체의 계면에서 미지의 비정상온도  $T_s$ 를 정의하면,

$$T = T_s(t) \text{ at } x = 0 \quad (11)$$

용융층은 용융이 많을수록 또는 증발이 적을수록 그 두께가 증가하므로,

$$\Gamma \frac{dL}{dt} = N - M \quad (12)$$

## 2.3 기체의 관계식

외부에서 여기력으로 주는 압력의 정상상태값  $\bar{P}^*$ 는 다른 정상상태량들과 부합되게 정해지고, 비정상상태의 압력은  $P \equiv \bar{P}/\bar{P}^*$ 와 같이 무차원화된다. 용융층이 기화되는 과정은 Clausius-Clapeyron 식으로 표시된다.

$$P \left[ \frac{Y_s}{Y_s^*} \right] = \exp \left[ \frac{\gamma Q_v}{(\gamma - 1)} \left[ \frac{1}{T_s^*} - \frac{1}{T_s} \right] \right], \text{ at } x = 0 \quad (13)$$

여기에서,  $Y_s$ 는 상수로서 반응기체의 질량분율이고,  $P Y_s$ 는 반응기체의 분압이다. 식(13)은 정상상태량  $Y_s^*$ 와  $T_s^*$ 를 사용하였으므로 정상상태인  $(P, Y_s, T_s) = (1, Y_s^*, T_s^*)$ 에서 자동으로 성립한다. 식(13)의 증발과정은 평형상태에서 진행되고, 고체의 기화는 용융층을 통하여 유한한 시간에 걸쳐 일어난다. 이에 반하여, 종래에는 고체로부터 기체로의 승화과정이 순간적인 열분해로 진행한다고 보아 식(13) 대신에  $N = N(T_s)$ 의 함수형태가 흔히 사용되었다.

기화에 의해 생성된 기체는 기체연소열  $Q_g$ 로 말미암아 온도가  $T_s$ 로부터  $T_g(t)$ 로 상승하므로, 용융층-기체의 계면에서 용융층쪽의 부가적인 상수 반응열  $Q_s$ 도 정의하면 다음의 에너지평형식이 성립된다.

$$T_g \equiv T_s + Q_g + Q_s - Q_v - \frac{\Lambda}{C_g M} \left[ \frac{\partial T}{\partial x} \right]_{x=0} \quad (14)$$

기체의 연소가 예혼합화염을 통해 준정상적으로 진행된다고 보면, 질량분율에 관한 식(15)와 연소 속도(burning speed)를 나타내는 식(16)을 얻는

다.<sup>(12)</sup>

$$Y_s = (T_g - T_s) / Q_g \quad (15)$$

$$M = P^n \exp \left[ \frac{E_g}{2} - \frac{E_g}{2T_g} \right]$$

여기에서,  $E_g$ 는 기체의 활성화에너지이며,  $E_g \equiv \bar{E}_g / (\bar{R}\bar{T}_g^*)$ 로 정의된다. 준정상식(16)는  $M = B(T_g)P^n$ 의 형태로 주어졌는데, 무차원화의 정의에 따라  $T_g^* = 1$ 과  $B(T_g^*) = 1$ 이 성립한다. 식(16)의 함수  $B(T_g)$ 에는 고체와 용융층의 복잡한 비정상효과가 함축되어 있다. 이에 대비하여, 종래부터 흔히 쓰이던 Vieille의 식은 본고에서의 기호에 의하면,

$$M(t) = [P(t)]^n \quad (17)$$

식(17)은 특별히  $M$ 과  $P$ 를 시간의 함수로 나타냈듯이 진정한 의미의 준정상관계식이고, 따라서 식(17)은 고체와 용융층의 비정상효과를 대표하지 못한다. 식(1)~(16)에서 보인 대부분의 관계식들은 참고문헌(9)에서 유도되었다.

### 3. 정상상태

앞절에서 유도한 비정상관계식(5a), (8a)와 (12)에서 시간에 관한 편미분항을 없애고 나머지 준정상관계식들을 사용하면 정상상태량이 얻어진다. 이들 정상상태량은 본 비정상문제의 초기상태치로서 택해진다. 우선, 식(2a,b)등의 무차원화의 결과로서 다음이 얻어진다.

$$T_g^* = P^* = N^* = M^* = 1. \quad (18)$$

식(18)의 정의에 따라 식(13)과 (16)은 정상상태에서 자동으로 성립한다. 식(5a, b)와 (6a, b)로부터 고체내의 정상상태 온도분포가 구해진다.

$$T^*(y) = (T_m - T_0) \exp(y) + T_0 \quad (19)$$

또한, 식(6b), (8a, b), (9a, b)와 (11)로부터  $x$ -좌표에 대하여 지수적으로 변하는 용융층내의 정상상태 온도분포가 구해진다.

$$T^*(x) = \frac{(T_s^* - T_m) \exp(x / (\Gamma A)) - T_s^* \exp(-L^* / (\Gamma A)) + T_m}{1 - \exp(-L^* / (\Gamma A))} \quad (20)$$

여기에서, 정상상태 용융층의 두께  $L^* \equiv \bar{L}^* / \bar{l}$ 이다.

식(5a)와 (8a)의 정상상태에서의 일차 적분형을 식(6a, b), (9a), (11), (14)와 함께 사용하여, 고체의 무한지점  $y = -\infty$  부터 기체내에서 기체연소 후 장소까지의 에너지평형을 고려하면 다음과 같이 정상상태온도들간의 조건이 얻어진다.

$$T_g^* = 1 = Q_s - Q_v + Q_g - Q_m + \left(1 - \frac{C_m}{C_g}\right) T_s^* + \frac{C_m - 1}{C_g} T_m + \frac{1}{C_g} T_0 \quad (21)$$

따라서, 정상상태에서 온도분포에 관하여는 다음의 부등식이 만족된다.

$$T_0 < T^*(y) < T_m < T^*(x) < T_s^* < T_g^* \quad (22)$$

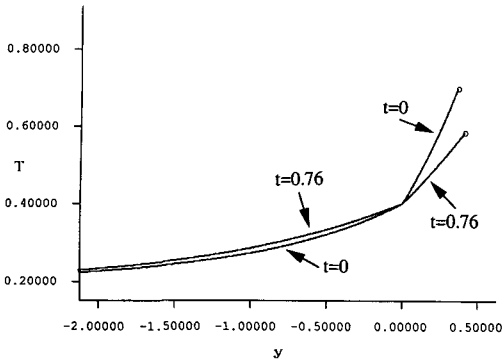
식(20)의 온도분포와 식(21)를 유도하는 과정에서 사용된 식들을 활용하면,

$$L^* = (\Gamma A) \log \left[ \frac{T_s^* + Q_g + Q_s - Q_v - T_g^*}{(T_m - T_0) / C_g + Q_m} \right] \quad (23)$$

주어진 상수의 무차원 물성치와, 그에 따라 위와 같이 계산된 정상상태량들의 한 예가 Table 1에 주어져 있다. 물성치들은 기존문헌을 참고하고, 특히 식(21)을 만족하는가도 검토하여 주어졌다. 보통의 고체추진제에 있어서, 식(3a, b)에서 사용된 기준시간은 수 ms정도이고 기준길이는 수십  $\mu\text{m}$  정도가 된다. Table 1에 의하면  $L^* = 0.369$ 이므로 정상상태 용융층의 두께도 역시 수십  $\mu\text{m}$  정도가 된다. 참고도서(5)등에서 논의된 바와같이 복합추진제의 화염모델에서 연료결합제와 산화제입자가

**Table 1** Nondimensional properties and steady state variables

$C_m$	1.10	$C_g$	1.20
$\Gamma$	0.80	$A$	0.88
$n$	0.50	$\gamma$	1.20
$Q_m$	0.25	$Q_s$	0.442
$Q_v$	0.45	$Q_g$	1.00
$E_g$	5.00	$L^*$	0.369
$T_0$	0.20	$T_m$	0.40
$T_s^*$	0.70	$Y_s^*$	0.30



**Fig. 2** Temperature profiles inside solid and melt at a steady state (at  $t=0$ ) and at the minimum  $M$  when monotonically decreasing  $P$  is applied (at  $t=0.76$ )

존재하는 하나의 층을 고려해보면 그 두께도 수십  $\mu\text{m}$ 정도가 되므로, 본고에서 논의된 용융층에 관한 척도들도 상당한 신빙성을 가진다.

Fig. 2는 Table 1에 주어진 정상상태의 온도분포를 ( $t=0$ )이라고 표시하여 보인다. 이 그림에 ( $t=0.76$ )이라고 표시된 온도분포는 추후에 논의될 것이다. 횡좌표는 0보다 작은 여백값이면 고체를 나타내고  $y$ -좌표와 같고, 0보다 크면 용융층을 나타내는데 온도곡선이 끝나는 지점의 값이  $L^*$ (= 0.369)가 된다. Fig. 2의 경우에는 용융층내의 온도구배가 고체내의 온도구배보다 상당히 크고, 고체-용융층 계면에서는 식(9a)에 주어진 온도구배 도약조건을 만족하게끔 계면 좌우의 온도구배가 서로 다르다.

#### 4. 수치해석

본문제는 주어진 압력  $P(t)$ 에 대해 두 가지의 질량유속  $N(t)$ 와  $M(t)$  등의 상태량을 구하는 문제이다. 수치해법으로는 시간과 공간에 대하여 일차의 유한차분법이 사용된다. 우선, 식(5a)에서 시간에 대한 편미분은 내재적인 방법으로 차분화된다. 상점자  $i$ 로서 현재시간을,  $i-1$ 로서 바로전 시간을 각기 나타내면,

$$\frac{T^i - T^{i-1}}{\Delta t} + N^i \frac{dT^i}{dy} = \frac{d^2 T^i}{dy^2} \quad (24)$$

여기에서 시간증분  $\Delta t \equiv t^i - t^{i-1}$  이며 상수인데, 본계산에서는  $\Delta t = 0.01$ 로 고정하였다. 온도분포

$T^{i-1}(y)$ 는 바로전 시간의 수렴된 해로서 저장된 값이다. 식(24)는  $x$ -좌표에 대해 이차의 상미분방정식이다. 식(24)의 해를 구하는데에는 Invariant Imbedding 방법이 매우 편리한데, 이 방법은 Stefan 문제를 푸는 목적으로 잘 정립되어 있다.<sup>(7)</sup> 이 방법을 적용하기 위해, 현재의 상태량  $N^i$ 과  $T^i$  등의 상점자를 생략하여  $N$ 과  $T$  등으로 표시하고 온도구배  $G \equiv dT/dy$ 를 정의한다. 그리고,  $T = T(y, G(y))$ 의 복합함수로 보면 식(24)는 다음 식과 등치이다.

$$\frac{dT}{dy} + \left[ NG + \frac{T - T^{i-1}}{\Delta t} \right] \frac{dT}{dG} = G \quad (25)$$

상태량  $N$ 이 시간에만 의존하므로,  $T$ 는  $G$ 에 대하여 선형으로 표시된다.

$$T(y, G) = V(y)G + W(y) \quad (26)$$

식(26)을 식(25)에 대입하면 두개의 비선형 상미분방정식이 얻어지고, 경계조건식(6a)도 둘로 분해된다.

$$\frac{dV}{dy} = 1 - NV - \frac{V^2}{\Delta t}, \quad V(-\beta) = 0 \quad (27a, b)$$

$$\frac{dW}{dy} = -\frac{V(W - T^{i-1})}{\Delta t}, \quad W(-\beta) = T_0 \quad (28a, b)$$

여기에서, 식(25)의 반무한 정의구역  $\{y: -\infty \leq x \leq 0\}$ 은, 상당히 큰 양의 상수  $\beta$ 를 도입하면 유한 정의구역  $\{y: -\beta \leq x \leq 0\}$ 으로 바뀐다. 이러한 전환으로 말미암은 오차는 고체내의 온도분포식(19)를 참조하면  $\exp(-\beta)$  정도이며, 본계산에서는  $\beta = 7$ 로 주었다.  $V$ 에 관한 식(27a)는  $W$ 에 관한 식(28a)로부터 분리되어 있는데, 식(28a)는 Riccati 방정식으로서 다음의 해를 갖는다.

$$V(y) = \frac{1}{\text{Scoth}(\xi) + N/2} \quad (29a)$$

$$\xi = S(y + \beta) \quad (29b)$$

$$S = \sqrt{\frac{N^2}{4} + \frac{1}{\Delta t}} \quad (29c)$$

식(29a)~(29c)의 결과를 식(28a, b)에 대입하여,  $W$ 에 대하여 수치적분한다. 이를 위하여, 유한한  $y$ -구간은 식(19)에서 구한 정상상태온도의 증분이 두 격자사이에서 균일하도록 500개의 비등간격구간으로 분할한다. 따라서, 격자들은 고체-용융층의 경계인  $y=0$ 의 위치로 갈수록 밀집되어 분포하는데, 시간에 대하여는 변하지 않는다. 식(28a, b)를

$y = -\beta$  부터  $y=0$ 까지  $y$ -좌표에 대하여 내재적으로 적분하면,  $W(0)$ 의 값이 구해진다. 그리고, 앞에서 구한  $V(0)$ 를 사용하고 식(6b)를 적용하면 고체-용융층 계면의 고체쪽 온도구배가 얻어진다.

$$G(0) = \left[ \frac{dT}{dy} \right]_{y=0} = \frac{T_m - W(0)}{V(0)} \quad (30)$$

용융층의 문제를 풀기 위하여,  $M$ 의 값도 가정하고 식(12)를 시간에 대해 내재적으로 차분화하면 현재시간에서  $L$ 이 구해진다.

$$\Gamma \frac{L - L^{i-1}}{\Delta t} = N - M \quad (31)$$

그런데, 식(8a)는 적분구간식(8b)가 시간에 의존하므로 수치적으로 다루기에 부적합하다. 그러므로, 다음의 좌표변환을 도입하고 편미분과 적분구간도 변환한다.

$$z = z(t, x) = x/L(t) \quad (32a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} - \frac{z}{L} \frac{dL}{dt} \frac{\partial}{\partial z} \quad (32b)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial z} \quad (32c)$$

$$\{x : -L(t) \leq x \leq 0\} \rightarrow \{z : -1 \leq z \leq 0\} \quad (32d)$$

식(32b)의  $dL/dt$ 를 위해 식(12)를 사용하면, 식(8a)는 이송속도와 확산계수가 시간에 의존하는 듯한 식이 된다.

$$\frac{\partial T}{\partial t} + U \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{A}{L^2} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (33)$$

$$U(t, z) = \frac{(1+z)M(t) - zN(t)}{\Gamma L(t)} \quad (34)$$

식(34)의 양단치  $U(t, -1) = N$ 와  $U(t, 0) = M$ 로부터 보듯이,  $U$ 는 용융과 기화에 의한 평균적인 이송속도를 나타낸다. 식(33)의 시간에 대한 편미분항을 식(24)와 비슷하게 내재적으로 차분화하면  $z$ -좌표에 관한 이차 상미분방정식이 얻어지는데, 이식은 온도  $T(z)$ 와 온도구배  $H(z)$ 에 대해 연성된 두개의 일차 상미분방정식으로 표시된다.

$$\frac{dT}{dz} = H \quad (35a)$$

$$\frac{dH}{dz} = \frac{L^2}{A} \left[ UH + \frac{T - T^{i-1}}{\Delta t} \right] \quad (35b)$$

고체-용융층 경계의 용융층쪽  $z = -1$ 에서, 온도는 식(6b)에서 그리고 온도구배는 식(9a)와 (30)으로부터 구해진다.

$$H(-1) = \frac{L}{\Delta} [G(0) + C_g Q_m N] \quad (36)$$

용융층의 수치적분을 위하여  $z$ -좌표구간내에 500개의 균일한 간격을 가진 격자를 정의한다. 식(35a, b)는  $z$ -좌표에 대하여 일차의 외재적 오일러 방법으로, 경계조건식(6b)와 (36)을 적용하여  $z = -1$ 부터  $z=0$ 까지 적분된다. 외재적 방법의 단점을 보정하기 위해, predictor-corrector 방법을 사용한다. 즉, 우선  $T_1(z) = T^{i-1}(z)$ 로 하여 식(35b)를  $H(z)$ 에 대해 적분하여 이를  $H_1(z)$ 라 한다. 다음,  $H_1(z)$ 를 식(35a)에 대입하고,  $T(z)$ 에 대해 적분하여 이를  $T_2(z)$ 이라 한다. 다음에,  $T_2(z)$ 를 식(35b)에 대입하여  $H_3(z)$ 를 구한다. 이러한 축차계산을 다섯번 실행한다. 일단, 용융층의 문제를 풀면  $T_s(t)$ 와  $(\partial T/\partial x)x=0$ 가 구해진다. 이 값들을 식(14)에 대입하면  $T_g(t)$ 가 구해지고, 다시  $T_s$ 와  $T_g$ 를 식(15)에 대입하면  $Y_s(t)$ 가 구해진다.

주어진 값  $P$ 와 가정된 값  $N$ 과  $M$ 에 대하여, 이와 같은 과정을 거쳐 계산된 값  $T_s$ ,  $T_g$ 와  $Y_s$ 는 일반적으로 식(13)과 (16)를 만족하지 않는다. 즉,  $N$ 과  $M$ 의 두 미지수가 만족해야 할 두개의 비선형 대수방정식이 형성되었다. 이를 Newton-Raphson 축차법<sup>(6)</sup>을 사용하여 푸는데, 필요한  $2 \times 2$  Jacobian은 유한차분법으로 구해진다. 축차법에 필요한 초기예측치는 전번 시간에 수렴한 값이 사용된다. 축차계산은 식(13)과 (16)이  $10^{-5}$  정도의 오차로 동시에 만족되다가,  $N$ 과  $M$ 의 값이 이러한 정도의 오차내에서 변하지 않을 때까지 계속된다. 이러한 수렴조건은 대개 열번내의 반복계산에 의해 만족되었다.

일단 현재시간에서 계산이 수렴하면, 고상내의 온도를 구하기 위해 식(26)을 식(24)에 대입한 형태를 고려한다.

$$\frac{dG}{dy} = \left[ N + \frac{V}{\Delta t} \right] G + \frac{W - T^{i-1}}{\Delta t} \quad (37)$$

수렴된  $N$ 에 대하여 식(29a)~(29c)로부터 구한  $V(y)$ 를 이용하여 식(28a, b)로부터  $W(y)$ 를 구한다. 다음에,  $V(y)$ 와  $W(y)$ 를 사용하여 식(37)을 식(30)의  $G(0)$ 을 경계치로 하여  $y=0$ 부터  $y=-\beta$ 까지 적분한다. 이렇게 구한  $G(y)$ 와 먼저 구한  $V(y)$ 와  $W(y)$ 를 식(26)에 대입하면,  $T(y)$ 가 구하여지고 다음번의 시간적분에 이용된다. 용융층내의 온도분포는 식(35a, b)를 수치적분하는 과정에서

구해졌고,  $L$ 은 식(31)로부터 구해진다.

## 5. 계산결과 및 고찰

Table 1의 물성치를 가진 연소계에 대하여 얻어진 정상상태를 초기조건으로 삼아 비정상문제를 수치적분한다. 외부의 여기력으로서의 압력  $P(t)$ 는 시간의 함수로서 주어지는데, 본고에서는 몇가지 흥미있는 함수형에 대하여  $N(t)$ 와  $M(t)$ 의 응답을 중심으로 계산결과를 검토한다. 우선 가장 간단한 형태인  $P(t)=1$ 에 대한 문제가 계산되었는데, 결과로서  $N(t)=M(t)=1$ 가 차분화에 따른 오차범위의 0.01내로 얻어졌다. 따라서, 이는 Table 1에서 보인 정상상태가 무한히 작은 교란인 수치적 차분에 의한 교란에 대하여 안정하다는 점을 보임과 아울러, 본고의 수치해법이 믿을만함도 보인다. 계산은 Silicon Graphics사의 Iris-4D/35TG에서 수행되었다.

### 5.1 단조감소 압력

다음으로, 단순감소하는 함수를 고려한다.

$$P(t)=1-0.5[1-\exp(-5t)] \quad (38)$$

식(38)은 초기상태인 값인  $P(0)=1$ 을 만족하며, 시간이 증가할수록 1로부터 0.5로 단조감소하는 압력을 나타낸다. 현상적으로는 연소실의 분기공을 갑자기 열어서 압력을 떨어뜨리는 경우에 해당된다.

Fig. 3은 식(38)의 입력에 대한 응답으로서, 상태량  $N(t)$ 와  $M(t)$ 는 둘다 모두  $t < 0.76$  정도의 범위에서는 압력을 따라서 감소하다가 시간이 충분히 지남에 따라 다시 증가하여 거의 일정한 값에 수렴

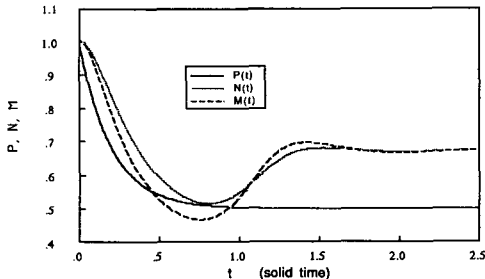


Fig. 3. Mass-flux responses  $N$  and  $M$  to monotonically decreasing pressure  $P$ . Both  $N$  and  $M$  asymptote to 0.707 predicted by Vieille's law

하다. 이 점근치는 준정상 Vieille 식(17)로부터 추측한 값인  $(0.5)^{0.5}=0.707$ 이다. 초기에,  $N(t)$ 와  $M(t)$ 가 이러한 시간점근치로부터 상당히 다른 값으로 벗어나는 이유는 압력이 초기에 비교적 급격히 감소함에 따라서 고체와 용융층내의 온도가 이러한 변화에 순응하지 못하기 때문이다. 이점은 식(38)에 의하면 압력함수의 e-folding 시간이 1/5이므로, 비정상적 효과가 상당히 크기때문에 기대되었다.

앞서 제시한 Fig. 2에 Fig. 3에서  $M$ 의 값이 최소가 되는 시간  $t=0.27$ 에서의 온도분포가 도시되어 있는데, 같이 비교한 초기의 정상상태 온도분포와 상당한 차이를 보인다. 즉, 정상상태에서  $(T_s^*, L^*)=(0.7, 0.369)$ 인데 비하여, 시간  $t=0.76$ 에서는  $(T_s, L)=(0.583, 0.414)$ 로서 기화표면의 온도가 상당히 떨어졌고 용융층은 다소 두꺼워졌다. 그리고, 질량유속은 Fig. 3에서 보인 시간구역에서 각기  $0.516 < N < 1$ 와  $0.466 < M < 1$ 의 범위에 든다. 또한, Fig. 3에서  $N$ -곡선은  $M$ -곡선에 비해 상대적으로 시간에 따른 변화가 적는데, 이는 Fig. 2에서 보듯이 용융온도가 고정되어 있고 기체에 가해진 압력변화의 영향이 용융층을 통과하면서 감소되기 때문이다. Fig. 2에서 용융층내의 온도구배가 상당히 심한 이유는, 용융층과 고체의 물성치가 거의 같은데다 용융층은 고체로 보아 기체의 상태변화에 대하여 열적인 경계층으로 작용하기 때문이다. 비정상상태에서 이와 비슷한 경계층의 특성은 참고문헌(11)의 여러 결과에서도 볼 수 있다.

### 5.2 단순 정현파 압력

연소실내의 비정상효과로 말미암아 발생하는 압력파는 흔히 주기함수로 표시되는데, 다음의 정현파형태가 가장 단순하다.

$$P(t)=1+0.25\sin(2\pi t) \quad (39)$$

식(39)는  $P(0)=1$ 을 만족하며 진폭은 0.25로서, 정상상태의 차원압력이 예를 들어 100기압이라고 하면 해당하는 압력진폭이 25기압으로 상당히 커서 연소실의 구조측면에서도 매우 위험한 경우가 된다. 식(39)에서 주기는 1이므로 고체내의 열적이완 시간과 같은 크기이다. 식(39)에 대한 계산결과가 Fig. 4에 시간범위  $0 < t < 2.5$ 에 대하여 도시되었다. 초기에는 입력의 진폭보다 상당히 큰 진폭으로 질량유속이 변하는데, Fig. 3에서와 비슷하게  $N$ -곡선



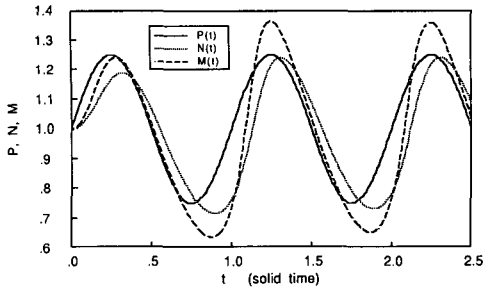


Fig. 4 Mass-flux responses  $N$  and  $M$  to single sinusoidally oscillating pressure  $P$ .  $N$  exhibits smaller amplitude than  $M$

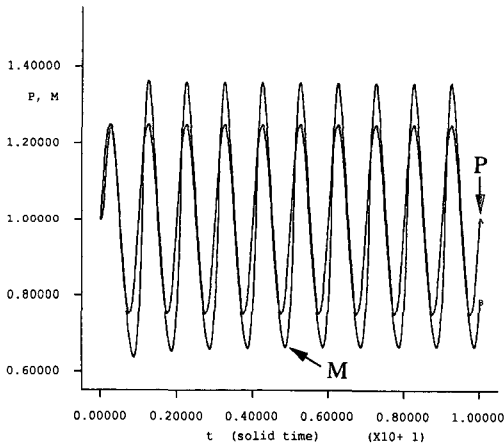


Fig. 5 Mass-Flux response  $M$  to single sinusoidally oscillating pressure  $P$  for a longer time.  $M$  lags behind  $P$

의 진폭이  $M$ -곡선의 진폭보다 다소 작다. 그리고, 압력의 입력에 대하여 질량유속은 약간 시간지연을 두고 응답하는데, 이는 고체와 용융층내의 온도분포가 외부의 교란에 적응하는데 유한한 시간이 걸리기 때문이다.

Fig.5는 Fig.4에서와 같은 결과를 좀 더 긴 시간 범위  $0 < t < 10$ 에 대하여, 식(39)의 압력과  $M$ -곡선만을 보여준다. 즉, 응답은 입력의 한두 주기 이후에는 매우 주기적이다. 따라서, Table 1에서 고려중인 정상상태는 식(39)의 유한진폭을 가진 입력에 대하여도 안정하다. 또한, 입력에 대한 응답의 시간지연도 Fig.5에서는 좀 더 명확히 나타난다. 시간에 대하여 좀더 계산하여 초기의 비정상효과가 거의 사라진 시간구간  $10 < t < 50$ 에 대하여 결과를 검토하여 보면, 질량유속은  $0.742 < N < 1.24$ 와

$0.664 < M < 1.36$ 의 범위를 만족한다. 이는 식(39)의 입력범위  $0.75 < P < 1.25$ 에 대하여, Vieille의 식(17)로 추정된 범위  $0.866 < M < 1.12$ 보다 상당히 큰 진폭을 가진 응답이다.

### 5.3 복합 정현파 압력

좀 더 현실적인 입력으로서 다섯개의 단순 정현파의 복합파가,  $P(0)=1$ 을 만족하며 진폭은 0.25가 되도록 주어진다.

$$P(t) = 1 - 0.0512[2\sin(\pi t/2) - \sqrt{2}\sin(\pi t) + \sin(2\pi t) - (1/\sqrt{2})\sin(4\pi t) + (1/2)\sin(8\pi t)] \quad (40)$$

식(40)의 압력은 식(39)와 마찬가지로  $0.75 < P < 1.25$ 의 범위에 들고 주기는 4이다. Fig. 6은 식(40)의 입력과 이에 대한 응답  $M$ 을 보이는데, 주어진 압력의 두 주기후에는 거의 주기적 응답이 나타난다. Fig. 7은 시간구간  $8 < t < 12$ 에서 한 주기 동안의 거동을 좀 더 자세히 보여 주는데,  $M$ -곡선이  $P$ -곡선에 비하여 진폭이 약간 작고 시간적으로도 약간 지연되어 반복된다. Fig.6에서보다 긴 시간에 대하여 응답을 구하고, 초기의 비정상상태를 제외한 범위  $16 < t < 80$ 에 대하여 관찰하면 응답 범위  $0.828 < N < 1.18$ 과  $0.792 < M < 1.22$ 가 얻어진다. 그러므로, 단순 정현파에 대한 경우와 비슷하게, 본 경우에도 \$5.2에서 계산된 Vieille의 관계로 추측한 것보다는 다소 큰 진폭의 응답이 얻어졌다. 식(40)에서보다 고주파의 압력형태를 고려할 수도 있는데, 이에는 훨씬 작은 시간차분과 긴 계산시간이 필요하다. Fig.8은 Fig.6의 자료를 시간구간  $0 < t < 10$ 에서 택하여, 시간을 매개변수로 하여 그린  $M$ - $P$ 의 곡선이다. 이 곡선이  $M=P$ 라는 직선으로부터 떨어진 정도는,  $M(t)$ 와  $P(t)$ 간에 존재하는 위상차이의 크기를 가르킨다. 물론, 이 곡선은 주기적인 성질로 인하여 매우 큰 시간에까지 그려보면 닫혀진다.

질량유속  $M(t)$ 의 특성을 좀 더 살피기 위하여, 주파수  $f$ 를 사용하여 다음의 Fourier 변환이 정의된다.

$$F(f) = \frac{1}{(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} M(t) \exp[-i(2\pi ft)] dt \quad (41)$$

여기에서, 적분구간은 초기의 비정상효과를 제거하고 충분히 주기성을 보장하기 위해  $t_1=16$ ,  $t_2=80$

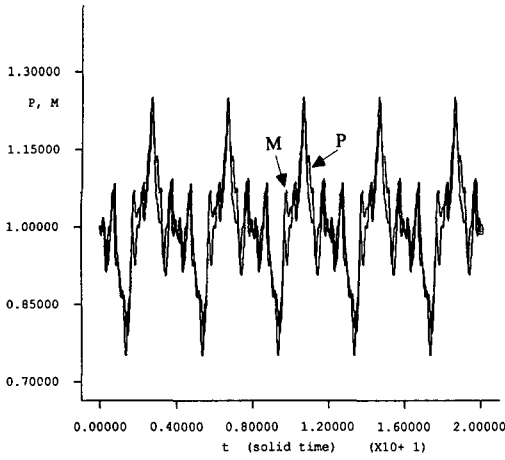


Fig. 6 Mass-flux response M to P which is composed of four sinusoidally oscillating waves

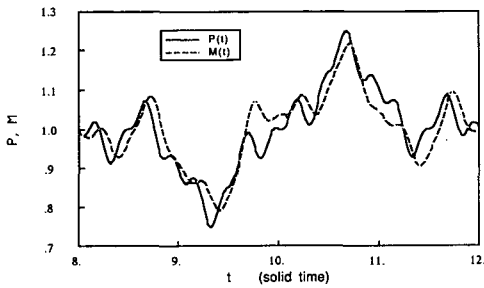


Fig. 7 Response M to composite sinusoidal P over one period of time for  $8 < t < 12$

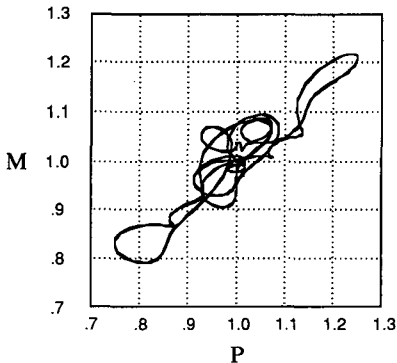


Fig. 8 Phase curve formed by  $M(t) - P(t)$  with time  $t$  as parameter

이 사용되었다. Fig.9는 식(51)의 변환함수의 절대값  $|F(f)|$ 이 상용지수적 척도에서 주파수좌표의 점위  $-1.5 < \log_{10}(f) < 1$ 에 대하여 표시되었다. 여

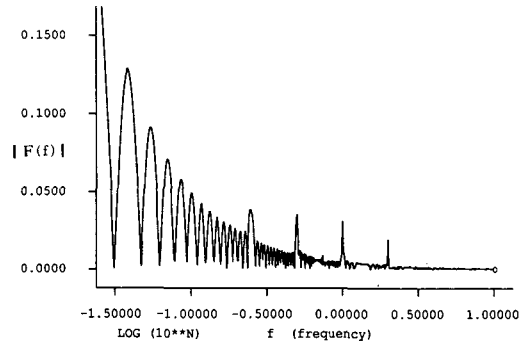


Fig. 9 Spectrum analysis of mass-flux response M as shown in Fig. 6. Four peaks are visible at  $f=2, 1, 1/2,$  and  $1/4$  with increasing strength

기에서 보듯이, 주파수  $f=2, 1, 1/2$ 과  $1/4$ 에서  $|F(f)|$ 가 국소극대값을 취한다. 이 네개의 극대치의 강도를  $|f(f)|$ -곡선아래의 각 peak주위의 면적으로 판단한다면, 주파수가 감소하면서 그 강도가 증가한다. 이러한 경향은, 입력에 식(40)에서와 같이 고주파로 갈수록 작은 진폭을 주었기 때문에 나타난다. 이에 비하여, 주파수  $f=4$ 에 대한 국소극대값은 수치오차에 의해 잠식당하여 거의 보이지 않는다. 이러한 네개의 국소극대치와 아울러  $|F(f)|$ 에는 저주파로 갈수록 점점 크기가 커지는 국소극대치들이 나타나는데, 이는 분산(dispersion)효과를 볼 수 있다.

#### 5.4 압력지수와 용융온도의 영향

식(39)의 단순 정현파 입력에 대한 응답을, 압력지수  $n$ 을 변화시키면서 검토하였다. 압력지수가 변함에 따라 Table 1에 보인 정상상태는 변하지 않는데, 이러한 정상상태는  $n > 1$ 이면 외부교란에 대하여 항상 불안정하다.<sup>(12)</sup> Fig.10은  $n=0.45, 0.5, 0.55$ 와  $0.6$ 의 네가지 값에 대하여 계산결과로서의 응답  $M$ -곡선들을 보여주고 있는데, 압력지수가 증가하면서 응답의 진폭이 증가하여 연소계는 점점 더 불안정해진다. 시간에 대한 적분은  $n=0.6$ 인 경우에  $t=1.0$  이후에는 상당히 어려워진다.

다음으로, 식(39)의 단순 정현파 입력에 대한 응답을, 용융온도  $T_m$ 을 변화시키면서 검토하였다. 온도  $T_m$ 을 제외한 나머지 물성치와 정상상태량들이 Table 1에 주어진 바와 같은 연소계에서는,  $T_m$ 이 증가할수록 정상상태 용융층의 두께가 감소한다. 본고에서는,  $T_m=0.4, 0.45, 0.5, 0.55,$

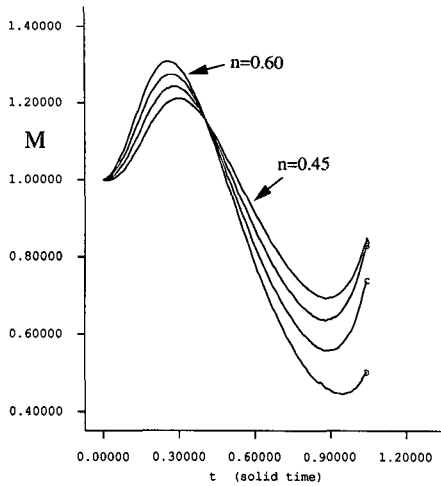


Fig. 10 Response M to single sinusoidally oscillating P for various pressure exponents n, with larger n corresponding to a larger response

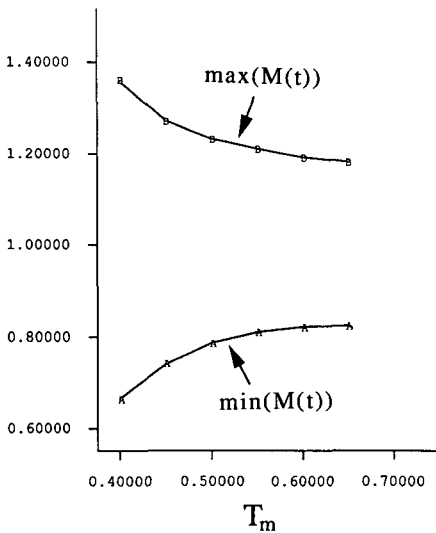


Fig. 11 The minimum and maximum of response M to single sinusoidally oscillating P for various melting temperatures  $T_m$  with larger  $T_m$  corresponding to a smaller range of M

0.6과 0.65의 여섯가지 경우에 대한 문제를 풀었다. 참고로, 각 경우에 있어서 정상상태의 용융층 두께  $L^* = 0.369, 0.295, 0.227, 0.165, 0.106, 0.0515$ 가 되므로, 용융온도가 기화온도에 가까울수록 용융층두께가 작아지는 경향을 보인다. Fig.11은 각각의 용융온도  $T_m$ 에 대하여 §5.2에서 검토

한 방식대로, 응답 M의 범위를 구하여 M의 최대치와 최소치를 표시하였다. 예를 들면, Fig.11에서  $T_m = 0.4$ 에 대한 범위는 이미 §5.2절에서 기록된 값과 같다. 이 그림은 용융온도가 감소할수록 응답의 비정상적효과가 커짐을 보인다. 이는, 공간적으로 비균질한 용융층이 두꺼워질수록, 기체에 가해지는 압력교란이 비정상효과를 더욱 크게 유지하기 때문이라고 볼 수 있다.

용융층내의 온도를 균일하게 가정하지 않고 그 분포를 식(8a)에서와 같이 기술한 이유는, 용융층내와 기체의 반응열이 본고에서 가정한 것처럼 각기 일정하지 않고 용융층내의 반응이 온도에 민감하기 때문이다. 앞으로는, 참고문헌(4) 등에서 고려된 용융층내의 화학반응경로를 참조하여, 비정상상태에서 용융층내의 화학반응의 효과도 연구할 예정이다. 이 경우에는, 발열량  $Q_s$ 는 상수가 아니고 시간에 의존하는 상태량이 될 수 있다.

### 6. 결론

고체-용융층-기체의 상변화를 거치는 고체추진제의 연소계가 유한한 진폭을 갖는 압력의 변화에 어떻게 응답하는지를 비정상문제의 수치해석을 통하여 구하였다. 이를 위하여, 단순 감소와 정현파로 주어진 압력함수를 입력으로 택하여 용융과 기화의 질량유속의 응답을 검토하였다. 결과는 다음과 같이 요약된다.

- (1) 비정상효과가 큰 경우에는 준정상상태를 가정한 Vieille의 식으로부터 추측한 압력연성의 관계식이 상당한 오차를 보인다.
- (2) 압력지수가 클수록 또는 용융층의 두께가 클수록, 주어진 압력의 교란에 대하여 연소계가 더욱 불안정해진다.
- (3) 이러한 비정상효과의 검토는 속도연성 효과의 검증과 아울러 고체로켓 연소설의 특성을 결정짓는데 매우 중요하다.

### 참고 문헌

- (1) Beddini, R.A., 1986, "Injection-Induced Flows in Porous-Walled Ducts," AIAA J. Vol. 24, No.11, pp.1766~1773.
- (2) Ma, Y., Van Moorhem, W.K. and Shorthill, R. W., 1991, "Experimental Investigation of

- Velocity Coupling in Combustion Instability," J. Propulsion, Vol.7, No.5, pp. 692~699.
- (3) Lenoir, J.M. and Robillard, G., 1957, 6th *International Symposium on Combustion*, pp. 663-667.
- (4) BenReuven, M., Caveny, L.H., Vichnevetsky, R.J. and Summerfield, M., 1976, "Flame Zone and Subsurface Reaction Model for Deflagrating RDX," 6th *International Symposium on Combustion*, The Combustion Institute, pp. 1223~1233.
- (5) Beckstead, M.W., Derr, R.L. and Price, C.F., 1970., "A Model of Composite Solid Propellant Combustion Based on Multiple Flames," *AIAA J.*, Vol. 8, No.12.
- (6) Wilson, D.G., Solomon, A.L. and Boggs, P.T., edited, 1978, *Moving Boundary Problems*, Academic Press.
- (7) Meyer, G.H., 1973, "Initial Value Methods for Boundary Value Problems (Theory and Application of Invariant Embedding)," edited by Bellman, R., 100th Volume in the Series: *Mathematics in Science and Eng.*, Academic Press.
- (8) 김홍제, 이진호, 1992, "다공층의 증발냉각 열 전달에 관한 해석적 연구", *대한기계학회논문집* 제16권 제 1 호, pp. 104~111.
- (9) Lee, H.I., 1989, "Effects of a Melt-Layer on the L\* -Instability in Solid-Propellant Rockets, Part I: Linear Study," *AIAA Paper 89-0299*, 27th *Aerospace Sciences Meeting*, Reno, Nevada, U. S.
- (10) Flandro, G.A., 1974, "Solid Propellant Acoustic Admittance Corrections," *J. Sound and Vibration*, Vol.36, No.3, pp.297~312.
- (11) Kooker, D.E., Nelson, C.W., 1977, "Numerical Solution of Three Solid Propellant Combustion Models during a Gun Pressure Transient," Rep. No.1953, *USA Ballistic Research Lab.*, Aberdeen Proving Ground, Maryland, U.S.A.
- (12) Williams, F.A., 1988, *Combustion Theory*, 2nd ed., Benjamin/Cummings Pub. Co.