2298 大韓機械學會論文集 第16卷 第12號, pp. 2298~2305, 1992.

〈論 文〉

유연한 보로 구성된 다물체 동역학의 효율적인 해법

이기수* · 금영탁**

(1992년 6월 27일 접수)

An Efficient Solution for Multibody Dynamics Composed of Flexible Beams

Kisu Lee and Young Tag Keum

Key Words: Flexible Beam(유연한 보), Multibody Dynamics(다물체 동역학), Linear Finite Element Technique(선형 유한요소법)

Abstract

To obtain the convenient solution of the multibody dynamic systems composed of flexible beams, linear finite element technique is adopted and the nodal coordinates are interpolated in the global inertia frame. Mass matrix beocmes an extremely simple constant matrix and the force vector also becomes extremely simple because Coriolis acceleration and centrifugal force are not required. And the elastic force is also simply computed from the moving frame attached to the material. To solve the global differential algebraic euation, an ODE technique is adopted after Lagrange multiplier is computed by the accelerated iterative technique, and the time demanding procedures such as Newton-Raphson iterations and decomposition of the big matrix are not required. The accuracy of the present solution is checked by a well-known example problem.

1. 서 론

기계공학 및 신소재의 비약적인 발전과 더불어 각종 기계 장비의 주요 구성품은 점점 경량화 고속화되고 있으며, 이 경우 유연한 부재의 탄성 변형은 동역학적 해석 및 센서를 이용한 자동제어 등에서 중요한 요소가 된다. 로봇 및 인공위성 등 첨단 장비의 주요 구성품으로 유연한 부재를 사용하면 장비의 경량화 이외에도 소모전력, 기동성, 구동장치, 운반성 등에서 성능 향상을 도모할 수 있다. 그러나 유연한 부재가 사용된 경우, 동역학적 해석이 완벽하게 수행되지 않으면 부재의 불필요한 변형으로 인하여 운동의 정확도 및 시스템의 신뢰성은 상실된다. 한편 로보트 등 주요 기계에서 유연성 효과가 고려되어야 할 대부분의 부재는 직선보(beam)로 취급할 수 있다. 따라서 복잡한 기계설비 등 다물체 시스템에 포함된 유연한 직선 보의 동역학적 해석은 대단히 중요한 과제가 된다.

문헌조사에 의하면 유연한 부재로 구성된 다물체 동역학을 해석하는 방법은 3가지로 분류할 수 있다. 첫째로 Sunda와 Dubowsky[1]등은 먼저 강체로 가정한 전체 시스템의 운동 방정식을 풀고 여기서 얻어진 관성력을 이용하여 부재의 탄성 변형을 구하였다. 이와 같은 방법은 비교적 계산이 간단하나 강체운동과 탄성 변형의 연성(coupling)효과를 무시해 버리는 결점이 있다. 두번째로 Kane, Likins와 Levinson,[2] Agrawal과 Shabana,[3] Wu와 Haug[4]등은 미소한 탄성변형을 가정하여, 각 부재에 부착되어 움직이는 좌표계(moving reference frame)를 이용하여 각 물체의 탄성 변형을 표시한 후 운동방정식을 유도하였다. 이 경우 강체

*정회원, 전북대학교 기계공학과
**정회원, 한국과학기술연구원 CAD/CAM실

운동과 탄성 변형의 연성효과는 정확히 표시되나, Coriolis 가속도 및 원심력으로 인하여 질량 행열 및 힘 벡터는 대단히 복잡하게 되며 계산 시간도 증가한다. 따라서 일반적으로 계산시간을 줄이기 위하여 탄성 변형을 기본적인 모드(mode)의 선형합(linear combination)에 의하여 표시하는 근사적인 방법을 쓰고 있다. 세번째로 Jonker,[5] Simo와 Vu-Quoc,[6] Cardona 와 Geradin,[7] Avello 와 Jalon[8]등은 대변형 이론을 이용하여 강체운동과 탄성 변형을 모두 고정된 관성 좌표계에서 함께 표시하였다. 이와 같은 방법은 각 부재의 탄성 변형이 유한(finite)한 경우 및 각종 비선형 현상을 정확히 계산할 수 있으며 간단한 질량 행열이 얻어진다. 그러나 비선형 유한요소법 이론 및 해가 적용되는 관계로 탄성력 계산은 대단히 복잡하게되며 계산시간 역시 대폭 증가한다. 한편Shabana,[9] Cardona와 Geradin[10]등은 각종의 질량 행열(예로써, consistent, lumped, corrotational mass matrix)이 계산의 정확도에 미치는 영향을 검토하였는데, 일반적으로 lumped mass matrix를 사용하면 방정식은 간단히 얻을 수 있으나 계산 정확도를 위하여는 상당히 많은 유한요소 절점을 사용하여야 하는 부담이 따른다.

현실적인 각종 장비 및 기계류의 동역학적 탄성 변형은 대부분 미소 탄성 변형을 이용하여 충분히 만족할 만한 결과를 얻을 수 있으며 대부분의 유연한 부재는 직선 보로 이루어져 있다. 따라서 직선 보에 미소 탄성 변형이 일어나는 경우의 문제를 풀기 위한 효율적인 다물체 동역학 해법이 필요하다. 본 논문에서는, 미소한 탄성 변형을 가정하여, 강체운동과 탄성 변형을 모두 고정된 관성 좌표계에서 표시하여 운동방정식을 유도하였으며 물체에 붙어 움직이는 좌표계 내부의 상대 변형을 이용하여 탄성력을 계산하였다. 따라서 질량 행열은 대단히 단순화되며 탄성력 역시 간단히 계산된다. 그런데 직선 보의 경우 일반적으로 종방향(길이 방향) 강성(stiffness)은 대단히 높은 경우가 많으며, 본 논문의 경우 종방향 강성이 운동방정식에 포함되어 있으므로 시간 적분의 정확도를 유지하기 위한 적분 시간간격(integration time step size)은 대단히 작아진다. 이와같은 경우의 결함을 보충하기 위하여, 본 논문에서는 보의 종방향 강성치를 실제보다 훨씬 작은 횡방향 강성치 수준으로 낮추어 시간 적분을 수행하는 대신, 종방향에 작용하는 힘을 분산시켜서 계산시 종방향 상대 변형을 억제하는 기법을 사용하였다. 또 여러개의 물체가 조인트에서 서로 연결되어 이루어진 다물체 동역학의 해는 운동방정식과 기구학적 제한조건을 모두 만족시켜야 하며, 상미분 방정식 해법용 시간 적분을 바로 적용할 수는 없다.[11,12] 본 논문에서는 참고문헌(13)과 (14)에 소개된 반복계산법 및 계산가속기법에 의하여 Lagrange multiplier를 운동 방정식에서 소거한 후 시간 적분을 수행하는 방법을 사용한다.

2. 기본 방정식

본 논문에서는 편의상 2차원 문제를 다루기로 하는데 3차원 문제 역시 마찬가지 방법으로 풀 수 있다. 다물체 시스템은 유연한 직선 보들로 이루어져 있다고 생각하고 미소 탄성 변형을 가정하며 유한요소법을 이용하여 물체를 이산화(discetize)한다. 일반적으로 Timoshenko보의 두께가 비교적 얇거나 Bernoulli Euler보의 요소(element)길이가 비교적 짧으면, 보의 질량이 모두 보의 중심축(예로써 Fig. 1의 축 ab)에 집중되어 있고 또 보 요소는 운동중 직선을 유지한다고 가정하여도 거의 정확한 질량 행열을 계산할 수 있다. 예로써 Fig. 1의 선형 보 요소가 길이와 두께가 비교적 작으면, 탄성 변형만을 다루는 구조 동역학의 경우, 질량 행열에서 $\ddot{\phi}_a$및 $\ddot{\phi}_b$와 관계되는 항은 절점 a와 b에서의 X, Y방향 변위의 가속도 관련 항보다 대단히 작아진다. 본 논문에서와 같이 변위에 강체운동이 포함되면 그 효과는 더욱 커질 것이다. 또한 참고문헌(8)의 경우, 보의 두께가 얇아지면 질량 행열에서 회전 관성을 무시할 수 있다. 이와같은 관점에서

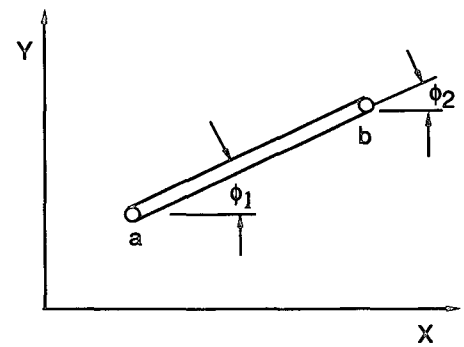

Fig. 1 Typical beam element

본 논문에서는 보의 단면의 중심축에 대한 상대회전으로 인한 관성효과는 운동방정식에서 무시한다. 그러면 고정된 관성 좌표계에 대한 절점들의 X, Y 좌표인 q를 이용하여 모든 물체의 운동을 기술할 수 있다. 즉, Fig. 1의 선형 보 요소의 경우 절점 a와 b의 X, Y좌표만을 이용하여 운동방정식을 만들 수 있다. 이 경우 전체 시스템의 운동에너지 T는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$T=\frac{1}{2}\dot{q}^T M\dot{q} \tag{1}$$

위에서 M은 질량 행열이며 유한요소법의 형상 함수를 적분하여 얻어지는 간단한 상수 행렬(constant matrix)이다. 만약 단면의 회전효과를 고려한다면 질량 행열은 참고문헌(8)과 같은 형태의 상수 행열이 될 것이다. 한편 물체 사이의 연결점(joint)에서는 다음과 같은 holonomic constraint가 주어져 있다고 생각한다.

$$\Phi(q, t)=0 \tag{2}$$

식(2)의 제한조건으로 인하여 다음의 미분된 제한조건식들도 만족되어야 한다.

$$\Phi_q\dot{q}+\Phi_t=0 \tag{3}$$

$$\Phi_q\ddot{q}-(\Phi_q\dot{q})_q\dot{q}+2\Phi_{qt}\dot{q}+\Phi_{tt}=0 \tag{4}$$

다물체 시스템의 탄성에너지를 V, $L=T-V$라고 하면 Lagrange Equation으로부터 다음과 같은 운동방정식을 쓸 수 있다.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}+\sum_j\frac{\partial\Phi_j}{\partial q_i}\lambda_j=f_i \tag{5}$$

위에서 λ는 Lagrange multiplier이며 f는 외력이다. 본 논문에서는 탄성력 계산을 위하여 Bernoulli-Euler 보 이론을 적용하며 q는 고정된 관성 좌표에서 유한요소법의 형상 함수를 이용하여 내삽(interpolation)한다. 또 한 물체 내부에서 그 물체와 더불어 움직이는 부분 좌표계 (x, y)를 생각하는데, 이 부분 좌표계 (x, y)는 물체 내부의 2점에 의하여 결정되도록 한다. 즉 Fig. 2의 보 A의 경우 점 a와 b에 의하여 좌표 축 x가 결정되며 a 및 b에 붙어서 움직인다. 이론적으로 탄성 해는 좌표축의 강체 회전과는 관계 없으므로 임의의 2점을 선택하여 부분 좌표계 (x, y)를 만들면 되나, 본 논문과 같이 미소 변형 이론을 이용하는 경우에는, 되도록 모든 점의 변형이 작은 값을 취할 수 있도록 멀리 떨어져 있는 2점을 선택하는 것이 좋다. 부분 좌표계 (x, y)에 대한 그 보의 변형을 u라고 하면 탄성에너지 V는 다음과 같이 간단히 쓸 수 있다.

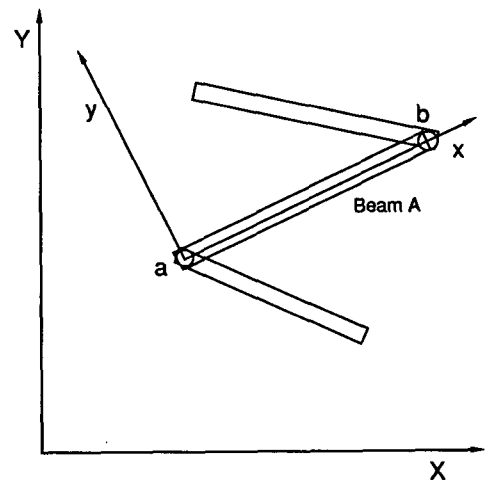

Fig. 2 Local coordinates (x, y) moving with the two points a and b in the beam A

$$V=\frac{1}{2}u^T Ku \tag{6}$$

위에서 K는 일반적인 선형 유한요소법에서 쓰이는 간단한 강성 행렬(stiffnsee matrix)이며 부분 좌표계의 변위 u는 x, y방향의 변위뿐만 아니라 x축에 대한 보의 탄성 회전 항 θ까지 포함하고 있다. q가 주어지면 u의 x, y 방향 변위는 간단히 계산된다. 또 각 절점의 외부에서 작용하는 굽힘 모멘트는 알고 있는 양이므로 회전항 θ도 간단히 계산된다. 즉 u의 성분중 x, y방향 변위를 w라 하고 탄성 회전항을 θ라고 하며 강성 행열K를 다음과 같이 분해하면

$$K=\begin{bmatrix}K_{ww} & K_{w\theta}\\ K_{\theta w} & K_{\theta\theta}\end{bmatrix} \tag{7}$$

θ는 다음의 방정식을 풀어서 결정한다.

$$K_{\theta w}w+K_{\theta\theta}\theta=B \tag{8}$$

위에서 w는 주어진 양이며 B는 외력의 굽힘 모멘트이므로 주어져 있는 양이다. 또 운동에너지 T는 $\dot{q}$만의 함수이므로

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}=\sum_j\frac{\partial u_j\partial L}{\partial q_i\partial u_j}=-\sum_j\frac{\partial u_j\partial V}{\partial q_i\partial u_j}$$

$$=-\sum_j\sum_k\frac{\partial u_j}{\partial q_i}K_{jk}u_k \tag{9}$$

그러면 식(5), (6), (9)로부터 다음과 같은 형식의 운동방정식을 쓸 수 있다.

$$M\ddot{q}+RKu(q)+\Phi_q^T\lambda=f \tag{10}$$

위에서

R : 부분 좌표계로부터 관성좌표계로의 변환 행렬

Φ_q^T : 제한 조건식 Φ의 전치 *Jacobian* 행렬

f : 외력

이며 식(10)에서는 *Coriolis* 가속도 및 원심력이 원천적으로 존재하지 않는다. 한편 제한 조건식 (2)～(4)를 위하여 다음과 같은 제한조건 오차를 정의한다.

(*a*) 제한조건식 (2)의 경우

$$v=-\Phi \tag{11}$$

(*b*) 제한조건식 (3)의 경우

$$v=-\Phi_q\dot{q}-\Phi_t \tag{12}$$

(*c*) 제한조건식 (4)의 경우

$$v=-\Phi_q\ddot{q}-(\Phi_q\dot{q}_q)_q\dot{q}-2\Phi_{qt}\dot{q}-\Phi_{tt} \tag{13}$$

3. 방정식 해법

다물체 동역학의 해를 구하기 위하여는 기구학적 제한조건식과 운동방정식이 연립된 대수 미분방정식을 풀어야 하며 일반적인 상미분방정식의 해법을 직접 적용할 수는 없다. 따라서 본 논문에서는 참고문헌(13)의 해법을 적용하여 방정식(10)의 Lagrange multiplier λ를 반복계산법에 의하여 계산한 후 시간 적분을 수행하는 방법을 사용한다. 특히 방정식 (10)에는 탄성 변형으로 인한 힘 RKu(q)가 추가되는데, 부분 좌표계에서의 탄성 변형 u는 관성 좌표계의 좌표 q로부터 간단히 계산되므로, 힘 RKu(q)는 시간 적분에서 필요한 순간마다 간단히 계산된다. 즉 방정식 (10)의 탄성력 및 Lagrange multiplier 값은 매시간 적분시마다 값이 주어지므로 잘 알려진 상미분 방정식의 시간 적분법을 사용할 수 있다. 따라서 이와같은 방법을 쓰는 경우, 추가로 독립 좌표를 구하는 등의 번거로운 과정이 불필요하며 큰 행렬의 decomposition 이나 Newton Raphson 반복법 등이 불필요하다. 한편 제한조건식(2)이외에 제한 조건식 (3)～(4)역시 만족되어야 하는데, 이를 위하여 참고문헌 (13)의 방법에 의하여 제한조건 오차 (11)～(13)을 모두 0으로 만드는 기법을 사용한다. 이와같은 방법들은 모두 참고문헌(13)에 설명되어 있고 계산가속 기법은 참고문헌(14)에 자세히 설명되어 있으므로 여기에서는 이에 대한 설명은 생략한다. 또 시간 적분은 참고문헌(15)의 프로그램 DOPRIN을 약간 수정하여 사용한다.

일반적으로 보의 종방향 강성은 횡방향의 굽힘 강성에 비하여 대단히 큰 경우가 많으며 참고문헌 (2)～(4)와 같이 강체운동과 탄성 변형이 분리되어 표시되는 경우 종방향 탄성 변형을 제외하고 방정식을 만들 수 있다. 그러나 참고문헌 (5)～(8)이나 본 논문과 같이 강체운동과 탄성 변형이 좌표계의 변위에 함께 포함되는 경우에는 종방향 탄성 변형이 운동방정식에 불가피하게 포함된다. 만약 보의 종방향 탄성 변형도 무시할 수 없다면, 본 논문과 같이 종방향 강성을 운동 방정식에 포함시키는 것이 대단히 편리할 것이다. 그러나 종방향 탄성 변형이 무시될 수준이라면 극도로 높은 종방향 강성으로 인하여 본 논문의 경우 운동방정식 (10)을 적분하는데 필요한 시간간격(time step size)은 대단히 작아진다. 이러한 경우의 불편을 제거하기 위하여, 본 논문에서는 보의 종방향 강성을 횡방향의 굽힘 강성수준으로 인위적으로 낮추는 대신에 각 보에 작용하는 종방향 외력(lagrange multiplier로 인한 힘 포함)의 합을 그 보의 각 절점의 질량에 비례하여 재배분하는 방법을 사용한다. 이렇게 함으로써 시간 적분시 시간간격을 횡방향의 굽힘 강성만이 있는 수준으로 낮출 수 있으며 또한 종방향 탄성 변형을 실질적으로 0으로 만들 수 있다.

4. 예제 계산

Fig. 3에는 힌지로 연결된 2개의 유연한 보가 중력장에서 자유롭게 매달려 있는 것을 보여 주고 있다. 이 모델은 참고문헌(16)에 있는 모델과 동일한 것이며 본 논문의 계산 정확도를 점검하기 위하여 사용한 것이다. (참고문헌 16)에서는 Lagrange multiplier를 사용하지 않고 각 부재의 운동을 조인트에서의 상대 좌표계를 이용하여 표시하였으며, 종방향 탄성 변형은 방정식에 포함되지 않았고,

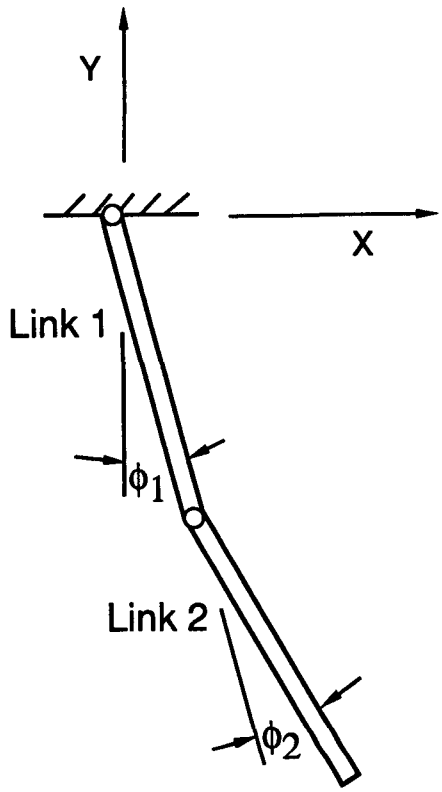

Fig. 3 Model composed of 2 links

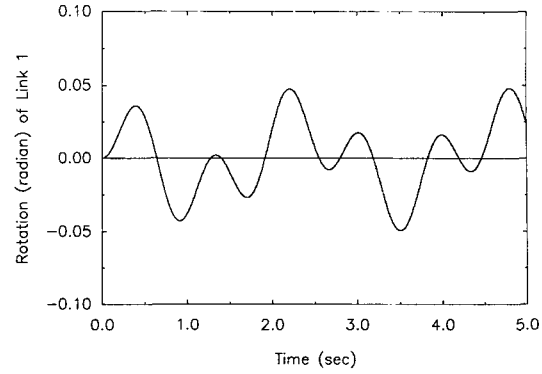

Fig. 4 Variation of rigid body rotation of link 1

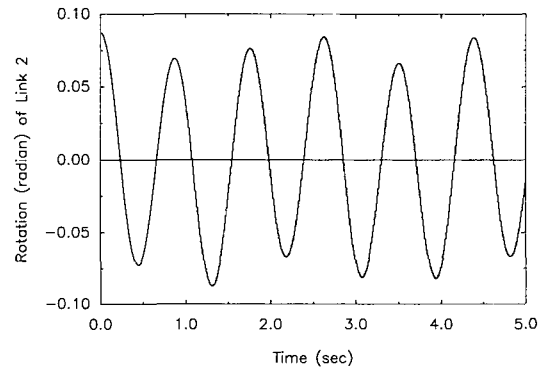

Fig. 5 Variation of rigid body rotation of link 2

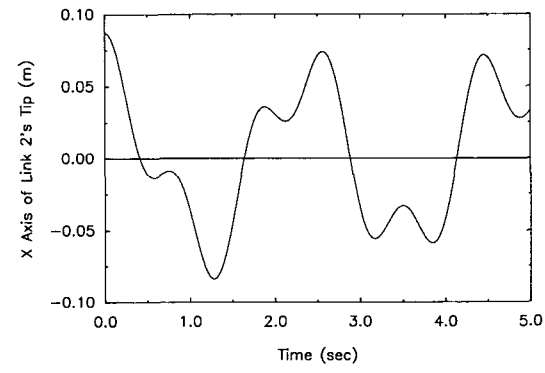

Fig. 6 Variation of X axis of link 2's tip

Lagrangian 유한 요소법을 사용하였다). 사용된 데이터는 $L_1=L_2=1$ m, $I_1=I_2=5*19^{-9}$ m^4, $m_1=m_2=5$ kg, $E_1=E_2=2*10^{11}$ N/M^{2}이며, 여기에서 L, I, M, E는 각각 길이, 관성 모멘트, 질량, 종탄성 계수를 나타낸다. 유한요소법 적용시 참고문헌 (16)과 같이 각 보는 각각 2개의 보 요소를 사용하여 이산화하였다. 또한 Fig. 3의 물체의 각도 표시도 참고문헌 (16)과 동일한 방법을 택하였다. 여기에서는 3장에서 언급한 바와 같이 단면적 A_1과 A_2를 인위적으로 I_1및 I_2와 같게하여 시간 적분 속도를 빨리하는 대신 각 보에 작용하는 힘을 절점의 질량에 비례하도록 재분배하였다. (참고문헌 (16)의 경우에는 종방향 탄성 변형을 고려할 필요가 없으므로 A_1과 A_2는 존재하지 않는다). 초기 각도는 $\phi_1(0)=0°$, $\phi_2(0)=5°$이며 이 상태에서 중력에 의하여 자유롭게 움직이기 시작한다.

Figs. 4~5에는 부재 2의 강체 회전 각도의 변화가 표시되어 있으며, Figs. 6~7에는 부재 2 맨 아래 끝의 X, Y좌표가, Figs. 8~11에는 부재 2 맨 아래 끝의 맨 위 끝 접선에 대한 탄성 변위 및 상대회전 각도가 표시되어 있다. 본 계산에서 시간적분의 허용오차(tolerance)는 10^{-6}으로 하고 제한조건의 허용오차는 10^{-7}으로 하였다. Figs. 4~11의 결과는 참고문헌 (16)의 결과와 잘 일치한다. 종방

향 탄성 변형의 효과 및 계산시간을 비교하기 위하여 단면적 A_1과 A_2를 변화시켜가며 몇가지 계산을 하였다. 먼저 단면적 A_1과 A_2를 I_1과 I_2의 100배로 하고 각 보에 작용하는 종방향 힘을 절점의 질량에 비례하도록 재분배한 경우에는 위와 동일한 결과를 얻었으며 계산 소요시간은 약 20%증가하였다. 또한 보의 종방향 힘을 3장에서 언급한 바와 같이 인위적으로 재분배하지 않고 원래 각 절점에 작용하는 힘을 그대로 사용하는 경우에도, A_1과 A_2를 I_1과 I_2의 10,000배로 하면 종방향 탄성 변형은 실질

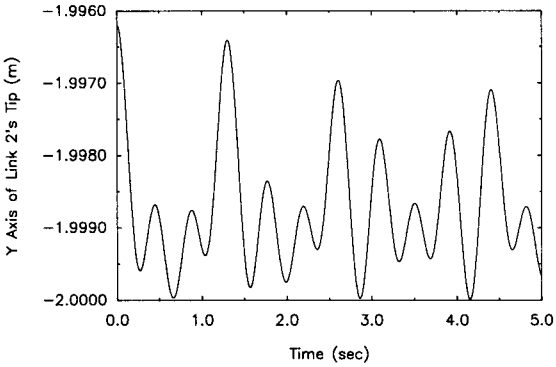

Fig. 7 Variation of Y axis of link 2's tip

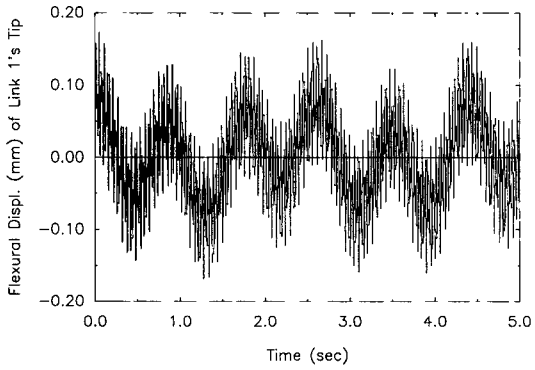

Fig. 8 Variation of flexural displacement of link 1's tip

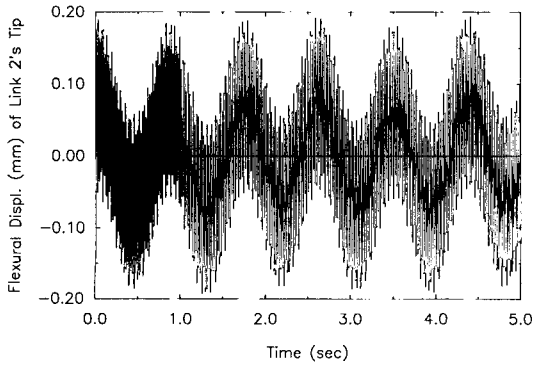

Fig. 9 Variation of flexural displacement of link 2's tip

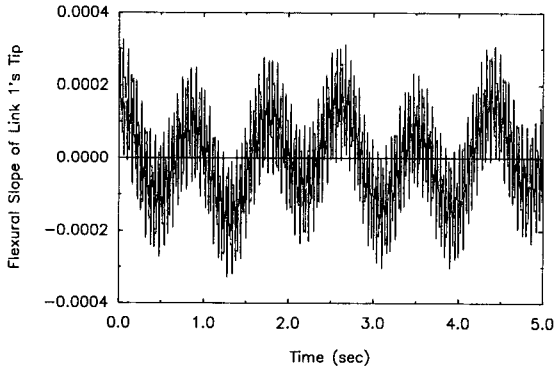

Fig. 10 Variation of flexural slope of link 1's tip

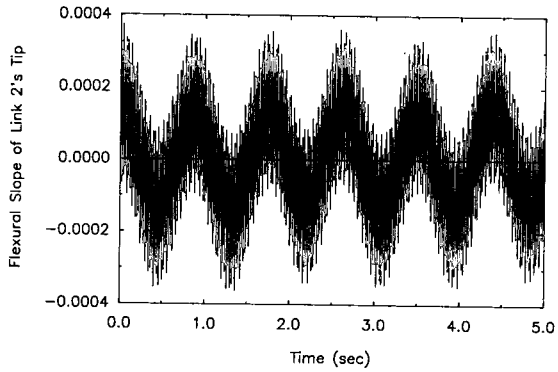

Fig. 11 Variation of flexural slope of link 2's tip

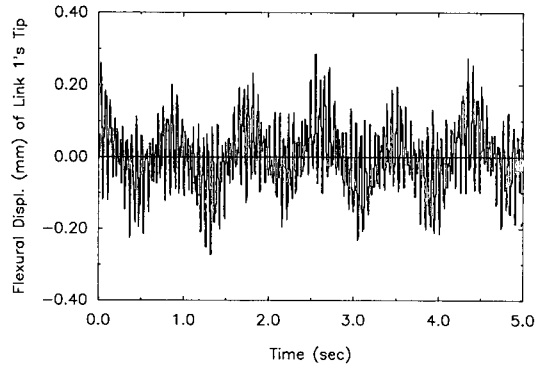

Fig. 12 Variation of flexural displacement of link 2's tip obtained with $A_1=A_2=10^2I_1=10^2I_2$ without the redistribution of of axial forces

적으로 0이 되며 Figs. 4~11과 동일한 결과가 얻어졌다. 그러나 이 경우에는 계산시간이 2배 이상 증가하였다. 만약 보의 종방향 힘을 3장에서 언급한 바와같이 재분배하지 않고 원래 각 절점에 작용하는 힘을 그대로 사용하며 A_1과 A_2를 I_1과 I_2의 100배로 하면 보 2의 아래 끝의 위 끝 접선에대한 탄성 변형은 Fig. 12와 같이 된다. Fig. 9와 Fig. 12는 저주파 진동은 거의 일치하나 고주파 진동에서는 약간의 차이를 보이며, 이것은 보의 종방향 운동과 횡방향 운동의 연성효과 때문으로 보인다.

5. 결 론

유연한 보로 구성된 다물체 동역학의 해를 구하기 위한 간편한 방법을 제시하였다. 유한요소법을 이용하여 절점의 변위를 고정된 관성 좌표계에서 내삽하였으며 Coriolis 가속도 및 원심력 항이 없으므로 질량 행렬 및 힘 벡터는 대단히 단순화된다. 한편 탄성력은 물체에 붙어 움직이는 부분 좌표계에서 간단한 선형 유한요소법을 이용하여 계산하였다. 보의 종방향 탄성 변형을 무시할 수 있는 경우, 종방향 강성을 횡방향 수준으로 낮추어 계산하는 대신 종방향 힘을 보의 각 절점의 질량에 비례하는 수준으로 배분하여 계산시간의 절감을 꾀하였다. 참고문헌 (13)과 (14)의 반복계산법과 계산가속기법을 사용한 후 상미분 방정식의 시간적분법을 적용하였다. 잘 알려져 있는 모델을 이용하여 예제 계산을 수행함으로써 본 논문에서 제시한 방법의 정확성 및 타당성을 입증하였다.

본 논문에서 제시된 방법을 따르면 질량 행열 및 탄성력이 대단히 간단하게 계산되며 Newton Raphson 반복법 및 큰 행열의 decomposition과 같은 복잡한 절차가 불필요하다. 따라서 방정식 및 전산 프로그램이 간단하게 되며, 필요한 경우 유한 요소법의 형상 함수에 의하여 응력을 바로 계산할 수 있다. 또 방정식 해의 정확도는 시간적분의 허용오차 및 제한조건의 허용오차에 의하여 조정되므로, 필요한 경우 대단히 정확한 해를 구하는 것이 가능하다. 추후로 계산의 정확도 및 계산의 경제성을 다른 방법과 비교해 볼 필요가 있을 것이다.

한편 본 논문에서는 실용적인 계산을 위하여 물체의 탄성 변형으로 인한 회전관성을 무시하였는데, 만약 질량 행열을 좀더 복잡하게 만들면(예로써 참고문헌 (8)의 방법)이러한 회전관성도 방정식에 포함시킬 수 있을 것이다. 이 경우에는 본 논문의 식(8)과 같은 과정이 불필요하고 바로 운동방정식을 적분하여 해를 구할 수 있을 것이며, 이에 대한 연구가 추가로 필요하다고 판단된다. 또 예제 계산에 의하면 각 링크에는 심한 탄성 진동이 강체 운동에 포함되어 있는데, 현실적인 기계장치에는 링크의 탄성효과 이외에도 각 물체 사이의 연결점(joint)에 존재하는 간극(clearance) 및 댐핑현상도 링크의 진동에 상당한 영향을 끼치고 있다. 추후에는 이러한 간극 및 댐핑효과를 링크의 진동 계산에 추가하고자 한다.

참고문헌

(1) Sunda, W. and Dubowsky, S., 1981, "The Application of Finite Element Methods to the Dynamic Analysis of Flexible Spatial and Co-Planar Linkage Systems," ASME Journal of Mechanical Design, Vol. 103, pp. 643~651.

(2) Kane, T. R., Likins, P. W. and Levinson, D. A., 1983, "Spacecraft Dynamics," McGraw Hill, New York.

(3) Agrawal, O. P. and Shabana, A. A., 1985, "Dynamic Analysis of Multibody Systems Using Component Modes," Computers and Structures, Vol. 21, pp. 1303~1312.

(4) Wu, S. and Haug, E. J., 1988, "Geometric Non-linear Substructuring for Dynamics of Flexible Mechanical Systems," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 26, pp. 2211~2226.

(5) Jonker, B., 1989, "A Finite Element Dynamic Analysis of Spatial Mechanisms with Flexible Links," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 76, pp. 17~40.

(6) Simo, J. C. and Vu-Quoc, L., 1986, "On the Dynamics of Flexible Beams under Large Overall Motions-The Planar Case: Part I and Ⅱ," ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 53, pp. 849~863.

(7) Cardona, M. and Geradin, M., 1988, "A Beam Finite Element Nonlinear Theory with Finite Rotations," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 26, pp.

2403~2438.

(8) Avello, A. and Jalon, G. D., 1991, "Dynamics of Flexible Multibody Systems using Cartesian Coordinates and Large Displacement Theory," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 32, pp. 1543~1563.

(9) Shabana, A. A., 1985, "Automated Analysis of Constrained Systems of Rigid and Flexible Bodies," ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, Vol. 107, pp. 431~439.

(10) Cardona, A. and Geradin, M., 1991, "Modeling of Superelements in Mechanism Analysis," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 32, pp. 1565~1593.

(11) Petzold, L., 1989, "Recent Developments in the Numerical Solution of Differential / Algebraic Equations," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 75, pp. 77~89.

(12) Cardona, A. and Geradin, M., 1989, "Time Integration of Equations of Motion in Mechanism Analysis," Computers and Structures, Vol. 33, pp. 801~820.

(13) 이기수, 임철호, 1992, "반복계산법 및 계산 가속기법에 의한 다물체 동역학 해법,"대한기계학회논문집, 제16권, 제5호, pp. 899~909.

(14) Lee, K., 1989, "An Accelerated Iterative Method for Contact Analysis," International Joural for Numerical Methods in Engineering, Vol. 28, pp. 279~293.

(15) Hairer, H., Norsett, S. P. and Wanner, G., 1987, "Solving Ordinary Differential Equations I," Springer-Verlag, Berlin.

(16) Usoro, P. B., Nadira, R. and Mahil, S. S., 1986, "A Finite Element/Lagrange Approach to Modeling Lightweight Flexible Manipulators," ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol. 108, pp. 198~205.