〈論 文〉

혼합적층판에 대한 비선형 진동해석

이영신* · 김영완**

(1992년 6월 29일 접수)

Analysis of Nonlinear Vibration for Hybrid Composite Plates

Young-Shin Lee and Young-Wann Kim

Key Words: Hybrid Composite Plate(혼합적층판), Nonlinear Vibration(비선형 진동), Stacking Sequence(적층방법), Aspect Ratio(형상비)

Abstract

Using the Lagrangian equation, nonlinear vibration analysis of laminated hybrid composite plates is carried out. The effects of stacking sequences, aspect ratios, number of modes, number of layers and various elastic properties on nonlinear vibration are investigated. The presence of bending-extension coupling in antisymmetric plates yields a second power term in addition to a cubic nonlinear term in governing differential equation of motion. In the other symmetric case,this second term vanishes. The fundamental frequency of analytic results are compared with that of ABAQUS FEM analysis. For nonlinear vibration of antisymmetric unimaterial plate, the result of reference is presented for comparison with this result.

기 호 설 명

a,b : 사각판의 길이 및 폭
A_{ij} : 신장강성계수
B_{ij} : 신장-굽힘 연성 강성계수
C_{ij} : 축소강성계수
D_{ij} : 굽힘강성계수
h_k : k번째층의 두께
m, n : x, y 방향의 반파수
M_x, M_y, M_{xy} : 합모멘트
N_x, N_y, N_{xy} : 합응력
P : 판의 변형률 에너지
T : 판의 운동에너지
t : 시간
u, v, w : x, y, z 방향의 중앙면 변위
U, V, W : x, y, z 방향의 최대 가진 진폭
z_{k-1}, z_k : 기준면에서 k-1 및 k 번째층까지의 상한 거리
α : 선형 강성계수
β : 비선형 2차 강성계수
γ : 비선형 3차 강성계수
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$: 중앙면 변형률
θ : 섬유각
$\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$: 중앙면 곡률
ρ_k : k번째층의 밀도
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$: 판의 응력 성분
ω_L : 선형 각진동수(rad/sec)
ω_{NL} : 비선형 각진동수(rad/sec)

1. 서 론

복합재료 구조물은 높은 비강도 비강성을 이용하여 두께를 작게 줄일 수 있으나, 동적 환경에서 얇은 두께로 인해 구조물이 대진폭으로 진동을 하는

*정회원, 충남대학교 기계설계학과
**정회원, 충남대학교 기계설계학과 대학원

경우가 많이 발생한다. 따라서 이러한 구조물의 진동해석을 하는데 있어서 기존의 선형이론을 적용한다는 것은 적합하지 않다. 이런 이유 때문에 많은 연구자들은 이들 대진폭 진동을 하는 구조물들에 대해 비선형 진동해석을 시도하였으며, 대표적으로 Chia[1]는 그의 저서를 통해 판의 비선형 응답에 대한 많은 유용한 정보를 제공했다. 그리고 Bennet,[2] Chandra와 Raju[3~4]는 대칭직교이방성 재료의 cross-ply 및 angle-ply판에 대해 비선형진동을 해석하였고, Reddy와 Chao[5]는 이방성 복합재료판에 대해 유한요소법을 이용하여 비선형진동을 해석하였다. Whitney와 Leissa[6], Bert[7] 등은 신장 굽힘 연성항을 고려하여 비대칭 cross-ply 판에 대한 비선형 진동을 해석하였다. 그리고 Singh와 Rao은 직접수치적분법을 이용해 역대칭 cross-ply 단순지지 경계조건을 갖는 판에 대해 신장-굽힘 연성을 고려하여 비선형 진동해석을 수행하였다.

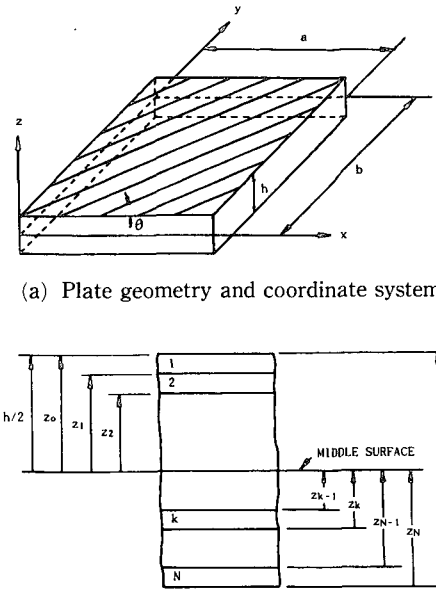
그러나 위의 모든 연구자들은 적층판에 대해 모두 단일 재료로 적층을 하였으며, 여러재료로 적층된 혼합적층판에 대한 비선형진동해석은 전무한 상태이다. 따라서 본 연구에서는 Lagrangian 방정식을 이용해 알루미늄, CFRP, GFRP, BFRP 등으로 혼합적층된 cross-ply 사각판에 대해 굽힘-신장연성을 고려하여 Runge-Kutta Gill 법을 적용하여 수치적으로 비선형진동해석을 수행하였다. 그리고 여러가지 적층방법에 따라 비선형 진동에 어떠한 영향이 미치는가를 검토하였으며, 형상비(a/b), 모우드의 변화 그리고 탄성계수비에 따른 비선형진동 거동을 규명하였다. 한편, 기본진동수에 대해서는 상용 유한요소프로그램인 ABAQUS[9]의 결과와 비교하였으며, 단일 적층된 판의 비선형진동거동에 대해서는 Singh[8]의 결과와 비교 검토하였다.

2. 수식화

2.1 해석 모델

본 연구에서는 Fig. 1 처럼 x 및 y축에 대한 판의 길이를 각각 a와 b, 총두께를 h로한 직교이방성 복합재료 적층 사각판을 고려하였으며, 단면 형태를 나타내고 있다. 이 때 직교좌표계의 원점은 z-축에 수직인 중앙면 (x-y 평면)의 한 모서리에 위치한다.

이와 같은 판에 대해 von Karman 형 비선형 변형률-변위 관계식을 다음과 같이 쓸 수 있다.[1]



(a) Plate geometry and coordinate system

(b) Section geometry

Fig. 1 Geometry and coordinate system of a plate and its section

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial w}{\partial x}\right]^2 \tag{1a}$$

$$\varepsilon y=\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial w}{\partial y}\right]^2 \tag{1b}$$

$$\varepsilon_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} \tag{1c}$$

$$\kappa_x=-\frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} \tag{1d}$$

$$\kappa_y=-\frac{\partial^2 w}{\partial^2 y} \tag{1e}$$

$$\kappa_{xy}=-2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} \tag{1f}$$

여기서 u, v, w는 각각 x, y, z 방향으로의 중앙면 변위이고 κ_x, κ_y, k_{xy}는 곡률변화를 나타낸다.

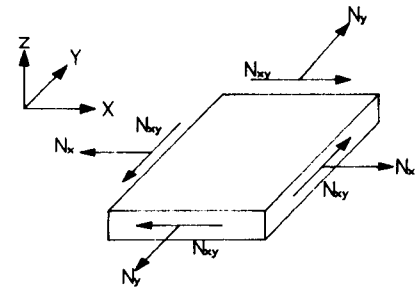
단위 길이당의 합응력 N_x, N_y, N_{xy}과 합모멘트 M_x, M_y, M_{xy}는 Fig. 2에 표시하였으며, 다음과 같이 정의된다.

$$[N_i,\ M_i]=\sum_{k=1}^{N}\int_{Zk-1}^{Zk}\sigma_i^{(k)}\ (1,\ z)\ dz \tag{2}$$

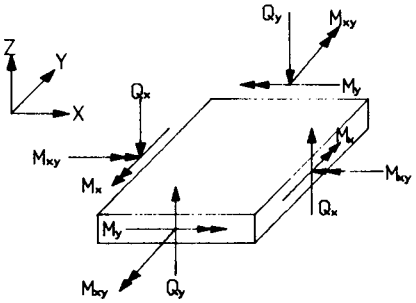
$$(i=x,\ y,\ xy)$$

여기서 (k)는 k번째 층을 나타낸다.

Kirohhoff 가설에 따라 판은 평면응력상태에 있으므로 구성방정식을 다음과 같이 나타낼 수 있다.



(a) Resultant forces



(b) Moment and transverse shear resultants

Fig. 2 Resultant forces, resultant moments and shear resultants in a laminated composite plate

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x^{(k)}\\ \sigma_y^{(k)}\\ \sigma_{xy}^{(k)}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11}^{(k)} & C_{12}^{(k)} & C_{16}^{(k)}\\ C_{12}^{(k)} & C_{22}^{(k)} & C_{26}^{(k)}\\ C_{16}^{(k)} & C_{26}^{(k)} & C_{66}^{(k)}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_{xy}\end{Bmatrix} \tag{3}$$

여기서 $C_{ij}^{(k)}(i, j=1, 2, 6)$는 k-번째 층의 축소강성계수이다.

복합재료판에 대한 구성방정식은 식(3)을 식(2)에 대입하면, 아래와 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{Bmatrix}N\\ M\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}A & B\\ B & D\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon\\ \kappa\end{Bmatrix} \tag{4}$$

여기서, N은 합응력이고 M은 합모멘트를 나타낸다.

식 (4)에서의 각 요소 A, B, D는 다음으로 구하게된다.

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij})=\sum_{k=1}^{N}\int_{Zk-1}^{Zk} C_{ij}^{(k)}(1, z, z^2)\, dz \tag{5}$$

여기서 A_{ij}는 신장강성계수, B_{ij}는 신장-굽힘 연성강성계수, D_{ij}는 굽힘강성계수를 나타낸다. 강성계수 B_{ij}는 횡굽힘과 내평면신장간의 연성을 표시하는 것으로 C_{ij}가 판에 대해 z의 우함수 즉, 대칭적층일 때는 나타나지 않는다.

탄성체에 대한 변형률에너지는 식 (6), 운동에너지는 식(7)과 같이 표시할 수 있다.

$$P=\frac{1}{2}\iiint(\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_y+\sigma_z\varepsilon_z+\sigma_{xz}\varepsilon_{xz}+\sigma_{yz}\varepsilon_{yz}+\sigma_{xy}\varepsilon_{xy})\, dxdydz \tag{6}$$

내평면 관성의 영향을 무시하면 ($\rho h\dot{U}^2=\rho h\dot{V}^2=0$), 운동에너지는 다음과 같다.

$$T=\frac{1}{2}\iint(\sum_{k=1}^{N}\rho_k h_k)\,\dot{W}^2 dxdy \tag{7}$$

여기서, ρ_k는 k-번째 층의 밀도를 나타내고, h_k는 그 층에서의 두께를 표시하며, $\dot{W}$는 수직변위의 시간에 대한 미분을 나탄낸다.

판의 두께는 판의 길이에 비해 상당히 작기 때문에 평면응력 상태라 할 수 있으므로, $\varepsilon_z=\varepsilon_{xz}=\varepsilon_{yz}=0$이다. 따라서 식(3)을 이용하면 식(6)은 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$P=\frac{1}{2}\iiint(C_{11}^{(k)}\varepsilon_x^2+C_{12}^{(k)}\varepsilon_y^2+C_{66}^{(k)}\varepsilon_{xy}^2+2C_{12}^{(k)}\varepsilon_x\varepsilon_y+2C_{16}^{(k)}\varepsilon_x\varepsilon_{xy}+2C_{26}^{(k)}\varepsilon_y\varepsilon_{xy})\, dxdydz \tag{8}$$

식 (2), 식(3)과 식 (4)를 조합하여 식 (8)에 대입하고 z에 대해 적분을 취하면 다음의 식으로 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned}P=\frac{1}{2}\iint\{&A_{11}\varepsilon_x^2+2A_{12}\varepsilon_x\varepsilon_y+A_{22}\varepsilon_y^2+A_{66}\varepsilon_{xy}^2\\&+2A_{16}\varepsilon_x\varepsilon_{xy}+2A_{26}\varepsilon_y\varepsilon_{xy}+2B_{11}\varepsilon_x\kappa_x\\&+2B_{22}\varepsilon_y\kappa_y+2B_{66}\varepsilon_{xy}\kappa_{xy}+2B_{12}(\varepsilon_x\kappa_y+\varepsilon_y\kappa_x)\\&+2B_{16}(\varepsilon_x\kappa_{xy}+\varepsilon_{xy}\kappa_x)+2B_{26}(\varepsilon_y\kappa_{xy}+\varepsilon_{xy}\kappa_y)\\&+D_{11}\kappa_x^2+D_{22}\kappa_y^2+D_{66}\kappa_{xy}^2+2D_{12}\kappa_x\kappa_y\\&+2D_{16}\kappa_x\kappa_{xy}+2D_{26}\kappa_y\kappa_{xy}\}dxdy\end{aligned} \tag{9}$$

직교이방성 Cross-ply판에 대해 다음의 강성계수는 0이 된다.

$$A_{16}=A_{26}=B_{16}=B_{66}=D_{16}=D_{26}=0 \tag{10}$$

따라서 식 (9)을 cross-ply 판에 적용하게 되면 다음의 식으로 축소된다.

$$\begin{aligned}P=\frac{1}{2}\iint\{&A_{11}\varepsilon_x^2+2A_{12}\varepsilon_x\varepsilon_y+A_{22}\varepsilon_y^2+A_{66}\varepsilon_x^2\\&+2B_{11}\varepsilon_x\kappa_x+2B_{22}\varepsilon_y\kappa_y+D_{11}\kappa_x^2\\&2D_{12}\kappa_x\kappa_y+D_{22}\kappa_y^2+D_{66}\kappa_{xy}^2\}dxdy\end{aligned} \tag{11}$$

본 연구에서는 다음과 같이 4변에서의 모든 변위

가 0인 단순지지 경계조건을 고려하였다.[8]

$$u(0,y)=u(a,y)=u(x,0)=u(x,b)=0 \tag{12a}$$

$$v(0,y)=v(a,y)=v(x,0)=v(x,b)=0 \tag{12b}$$

$$w(0,y)=w(a,y)=w(x,0)=w(x,b)=0 \tag{12c}$$

식(12)의 경계조건을 만족하는 변위식을 가정하면 다음과 같다.

$$u(x,y,t)=U(t)\sin\frac{2m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{13a}$$

$$v(x,y,t)=V(t)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{2n\pi y}{b} \tag{13b}$$

$$w(x,y,t)=W(t)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{13c}$$

식(13)를 식(1)에 적용하고 고려된 판에 대한 에너지식(11)과 (7)에 대입하여 정리하면 아래와 같은 에너지식을 얻게된다.

$$P=\frac{ab}{8}[F_8W^2+F_6U^2+2F_5UW+2F_1VW+2F_7UW^2+2F_2UV+2F_4VW^2+\frac{2}{3}F_9W^3+\frac{1}{2}F_{10}W^4] \tag{14}$$

$$T=\frac{ab}{8}(\sum_{k=1}^{N}\rho_k h_k)\,\dot{W}^2 \tag{15}$$

여기서, 각 계수들은 다음과 같다.

$$F_1=-\frac{4C_n}{3n\pi}X^3B_{22} \tag{15a}$$

$$F_2=\frac{16C_{mn}}{9mn\pi^2}XY(A_{12}+A_{66}) \tag{15b}$$

$$F_3=X^2A_{66}+4Y^2A_{22} \tag{15c}$$

$$F_4=\frac{C_m}{3m\pi}\{2Y^3A_{22}-X^2Y(A_{12}-A_{66})\} \tag{15d}$$

$$F_5=-\frac{4C_n}{3n\pi}X^3\ B_{11} \tag{15e}$$

$$F_6=4X^2A_{11}+Y_2A_{66} \tag{15f}$$

$$F_7=\frac{C_n}{3n\pi}\{2X3A_{11}-XY^2(A_{12}-A_{66})\} \tag{15g}$$

$$F_8=X^4D_{11}+2X^2Y^2(D_{12}+2D_{66})+Y^4D_{22} \tag{15h}$$

$$F_9=\frac{4C_{mn}}{3mn\pi^2}(X^4B_{11}+Y^4B_{22}). \tag{15i}$$

$$F_{10}=\frac{9}{32}(X^4A_{11}+Y^4A_{22})+\frac{1}{16}X^2Y^2(A_{12}+2A_{66}) \tag{15j}$$

여기서, $X=m\pi/a$

$Y=n\pi/b$

$C_m=1+(-1)^m$

$C_n=1+(-1)^n$

$C_{mn}=C_mC_n$

진동문제를 풀기 위해 다음과 같은 Lagrangian 방정식을 이용하면 운동지배방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial L}{\partial U}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{U}}=0 \tag{16a}$$

$$\frac{\partial L}{\partial V}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{V}}=0 \tag{16b}$$

$$\frac{\partial L}{\partial W}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{W}}=0 \tag{16c}$$

여기서, Lagrangian $L=P-T$이다.

식(16a)에서 U와 W의 관계를, 식(16b)에서 V와 W의 관계를 구하여 세번째식의 결과에 대입하여 정리하면 다음의 운동지배방정식을 구할 수 있다.

$$(\sum_{k=1}^{N}\rho_k h_k)\,\ddot{W}+\alpha W+\beta W^2+\gamma W^3=0 \tag{17}$$

여기서, (¨)는 시간에 대한 미분을 나타내고, α는 선형강성계수이며 β, γ는 비선형강성계수로 아래와 같다.

$$\alpha=F_8+\frac{2F_1F_2F_5-F_3F_5^2-F_1^2F_6}{F_3F_6-F_2^2} \tag{17a}$$

$$\beta=F_9+\frac{3(F_2F_4F_5+F_1F_2F_7-F_3F_5F_7-F_1F_4F_6)}{F_3A_6-F_2^2} \tag{17b}$$

$$\gamma=F_{10}+\frac{2(2F_2F_4F_7-F_3F_7^2-F_4F_6^2)}{F_3F_6-F_2^2} \tag{17c}$$

이와 같이 유도된 운동방정식을 Runge-Kutta Gill법을 이용하여 비선형 진동해석을 수행하게 된다.

3. 수치 결과 및 토의

본 연구에서는 CFRP, BFRP, GFRP 및 알루미늄을 이용하여 혼합적층을 하였으며, 사용한 기본 재료물성은 아래와 같다.[10]

Aluminum : E=72. GPa, G=28 GPa
$\nu=0.36$, $\rho=2800\ kg/m^3$

GFRP : $E_1=38.6$ GPa, $E_2=8.27$ GPa,

$G_{12}=4.14$ GPa

$\nu=0.26$, $\rho=1800$ kg/m^3

CFRP : $E_1=181$ GPa, $E_2=10.3$ GPa, $G_{12}=7.17$ GPa

$\nu=0.28$, $\rho=1600$ kg/m^3

BFRP : $E_1=204$ GPa, $E_2=18.5$ GPa, $G_{12}=5.59$ GPa

$\nu=0.23$, $\rho=2000$ kg/m^3 (18)

이후 각 수치예에서는 각종재료 알루미늄, GFRP, CFRP, BFRP는 적층에 대해 각기 Al, G, C, B로 표기하였다. Fig. 3은 BFRP와 CFRP로 역대칭 혼합적층된 [0°/90°] 판에 대해 x방향의 길이 a가 0.25 m, 길이 대 두께의 비(a/h)가 80이며, 각각 형상비 a/b가 1, 2인 판으로 Runge-Kutta 법을 이용하여 시간에 따른 선형 및 비선형 진폭대 두께비(Wm/h) 즉, 무차원 진폭의 변화를 나타내고 있다. 그림에서 보는 것처럼 형상비가 1인 경우에는 음·양 방향의 최대진폭이 서로 같은 크기를 갖으나, a/b=2인 경우 양의 방향 최대 진폭과 음의 방향 최대진폭이 서로 같지 않으며, 이는 사각판(a/b≥2)에 대해 역대칭 적층인 경우 초기 진동방향에 따라 비선형진동수에 커다란 영향이 있음을 알 수 있다. 이와 같은 현상이 나타나는 것은 앞에서 언급된 것처럼 a/b=1인 정사각판의 경우보다 a/b=2인 사각판의 경우에서 굽힘-신장 연성항 B_{ij}가 주요항이 되는 2차 비선형항 β가 전체적으로 크게 지배하고 있기 때문이다.

Table 1은 [0°/90°]로 역대칭 적층된 CFRP 복합재료 정사각판 및 형상비가 2인 직사각판에 대해

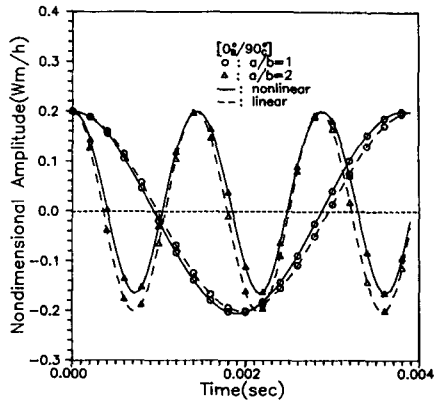


Fig. 3 Variation of nondimensional amplitude with time of BFRP/CFRP anti-symmetric hybrid plates

다음의 물성을 갖는 재료를 이용해 직접수치적분법을 이용한 Ref. (8)과 비교한 것이다.

$$E_1/E_2=40,\ E_2/G_{12}=0.5\ \nu_{12}=0.25 \qquad (19)$$

표에서처럼 무차원 진폭이 증가함에 따라 비선형성이 증가하고 있으나, 형상비가 2인 사각판인 경우에는 초기 소진폭에서는 무차원 진폭의 증가에 따라 비선형성이 감소하는 연화성 거동을 보여주다가 다시 증가하는 경화성 거동으로 전환된다. 전체적으로 정사각판인 경우가 직사각판인 경우보다 비선형성이 크게 나타나고 있다. 그리고 Ref. [8]의 결과에 대해 본 연구에서의 결과가 정사각판인 경

Table 1 Comparison of frequency ratios with Ref. [8] for [0°/90°] CFRP square, rectangular plates ($E_1/E_2=40$, $E_2/G_{12}=0.5$, $\nu=0.25$)

$\frac{W_m}{h}$	Frequency Ratios (ω_{NL}/ω_L)					
	Square plate (a/b=1)			Rectangular plate (a/b=2)		
	Present	Ref.[8]	Error	Present	Ref.[8]	Error
0.3	1.0825	1.0796	0.268	0.9437	0.9448	0.117
0.6	1.2651	1.2867	1.707	0.9584	0.9568	0.167
0.9	1.5672	1.5691	0.121	1.1424	1.1432	0.070
1.2	1.9091	1.8933	0.828	1.4358	1.4376	0.125
1.5	2.2340	2.2414	0.331	1.7826	1.7826	0.000
1.8	2.5610	2.6040	1.679	2.1579	2.1521	0.269
2.1	3.0000	2.9759	0.803	2.5448	2.5341	0.420
2.4	3.2813	3.3541	2.219	2.9055	2.9235	0.620
2.7	3.6207	3.7366	3.201	3.3243	3.3172	0.214

Table 2 Linear natural frequencies of square hybrid composite plates for various stacking sequences and material properties

$[0°/Al]_s$ BFRP	MODE	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(2,3)
	ABAQUS	237.62	414.47	769.07	833.10	947.83	1210.6
	PRESENT	238.38	415.80	772.20	836.82	956.94	1212.1
$[0°/Al]_s$ CFRP	MODE	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(1,4)
	ABAQUS	236.42	398.14	714.42	826.86	943.39	1178.3
	PRESENT	237.25	400.00	716.85	829.88	947.87	1183.4
$[0°/Al]_s$ GFRP	MODE	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)	(1,3)	(2,3)
	ABAQUS	149.88	327.27	444.50	599.05	636.97	885.86
	PRESENT	150.72	364.30	445.43	604.23	638.98	888.89
$[Al/0°]_s$ BFRP	MODE	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)	(1,3)	(2,3)
	ABAQUS	259.29	628.67	685.37	1034.4	1252.9	1400.3
	PRESENT	262.12	634.92	692.04	1047.1	1257.9	1418.4
$[Al/0°]_s$ CFRP	MODE	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)	(1,3)	(3,1)
	ABAQUS	269.38	653.74	708.66	1074.9	1301.8	1444.8
	PRESENT	272.11	660.07	716.85	1092.9	1307.2	1459.9
$[Al/0°]_s$ GFRP	MODE	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)	(1,3)	(3,1)
	ABAQUS	254.82	634.12	644.05	1016.8	1268.0	1298.0
	PRESENT	258.06	638.98	651.47	1036.3	1273.9	1307.2

우 3.2%의 최대오차를 보이고 있으며, 형상비가 2인 직사각판에 대해서는 0.62%의 최대오차를 보이고 있다.

Table 2는 여러가지 적층방법에 대해 a=b=0.25m이고, a/h=80인 판으로 총 두께가 0.3125 mm이며 각층의 두께는 일정한 정사각판으로 취급하며, 기본 진동수는 상용유한요소 프로그램인 ABAQUS를 이용한 결과 및 본 연구의 해석결과를 제시한 것으로 서로 잘 일치하고 있다. 전체적으로 $[0°/Al]_s$에 대해서는 적층복합재료의 탄성계수 E_1의 증가에 따라 진동수도 증가하고 있으며. $[Al/0°]_s$ 적층에서는 E_1/E_2의 증가에 따라 진동수가 증가하고 있다. 그리고 $[0°/Al]_s$적층이 선형진동수를 크게 지배하는 굽힘강성에 있어 $[Al/0°]_s$적층보다 크기 때문에 높은 진동수를 나타내고 있다. 여기서 모우드는 x방향의 반파수를 나타낸다.

Fig. 4는 역대칭 cross-ply 판에서 적층수의 증가에 따라 비선형진동 거동에 어떠한 영향을 미치는가를 보여주고 있다. 여기서 0° 적층은 BFRP이고, 90° 적층은 CFRP로 구성되어 있다. $[0°_B/90°_C]$ 2적층인 경우, Table 1에서 설명한 것처럼 초기 소진폭에서는 진폭비의 증가에 따라 진동수비가 감소하는 연화성 비선형성을 보여주고 있다가 어느 진폭이상이 되면 경화성 거동으로 전환하게 된다. 또한 역대칭인 경우 진동수비가 0인 점을 기준으로 서로 다른 진폭비를 보여 주고 있으며 (−) 방향의 진폭에서 더 큰 비선형성을 보여주고 있다. 그리고 적층수의 증가에 따라 (−)방향에서는 비선형성이 감소하나 (+)방향 진폭에 대해서는 반대로 비선형성이 증가하고 있다. 그러나 적층수가 4이상이 되면 거의 일정한 비선형 거동을 보여준다. 한편 본 그림에서 처럼 역대칭 적층인 경우는 (+), (−)진폭에 대해 서로 다른 진동수를 갖고 있으나, 다른 적층인 경우는 대칭 형상을 갖는다.

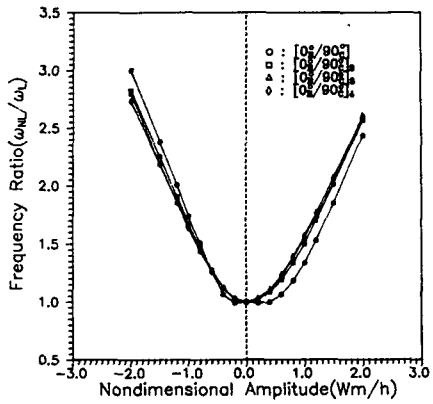


Fig. 4 Frequency ratios vs nondimensional amplitudes of antisymmetric hybrid plates for various stacking sequences

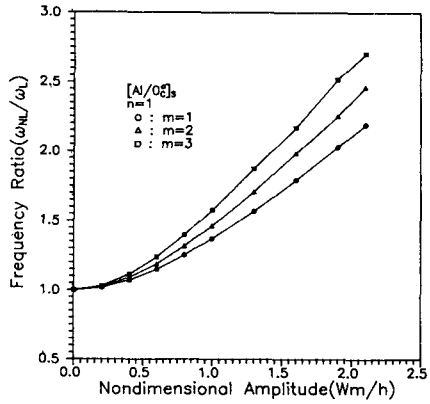


Fig. 6 Frequency ratios vs nondimensional amplitudes of $[Al/0^\circ_c]_s$ plate for half wave numbers

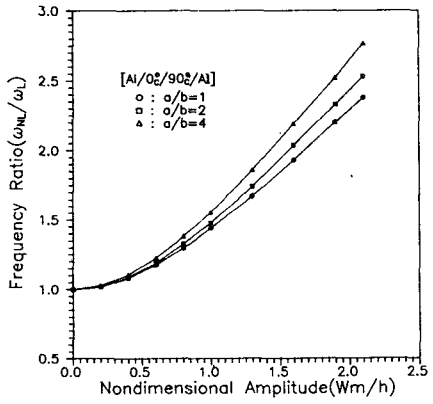


Fig. 5 Frequency ratios vs nondimensional amplitudes of $[Al/0^\circ_c/90^\circ_c/Al]$ plate for various aspect ratios

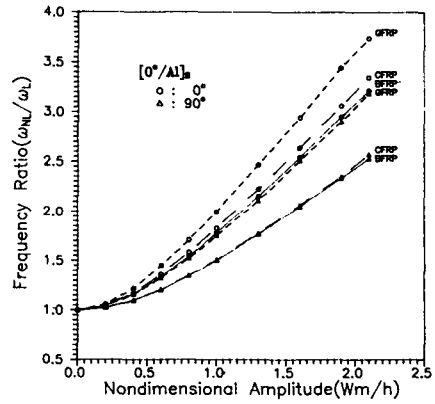


Fig. 7 Frequency ratios vs nondimensional amplitudes of $[0^\circ/Al]_s$ plate for various stacking sequences and elastic properties

Fig. 5은 알루미늄과 CFRP를 $[Al/0^\circ_c/90^\circ_c/Al]$로 혼합적층한 판으로 형상비의 변화에 따른 비선형진동거동을 보여주고 있다. 형상비가 증가하면서 비선형성도 증가하고 있으며 이것은 운동방정식에서 비선형을 지배하는 β, γ의 값, 특히 역대칭적층인 경우 나타나는 β의 값이 증가하기 때문이다.

Fig. 6에서는 알루미늄과 CFRP로 대칭적층된 $[Al/0^\circ_c]_s$ 판으로 x-방향의 반파수 m의 변화에 따른 비선형성의 경향을 보여주고 있다. 이 때 반파수의 증가는 모드의 증가를 나타내는 것으로 고차모드로 갈수록 비선형성이 증가하고 있다. 이것도 Fig. 2의 경우와 마찬가지로 비선형성을 지배하는 γ의 영향이 크기 때문이다. 여기서 β의 값은 대칭적층이기 때문에 나타나지 않는다.

Fig. 7는 형상비 a/b=2인 판에서 적층방법 및 각종 복합재료의 탄성계수변화에 따른 비선형성을 나타내고 있는 것으로 전체적으로 $[0^\circ/Al]_s$ 적층이 $[90^\circ/Al]_s$적층보다 큰 비선형성을 보여주고 있으며, $[0^\circ/Al]_s$ 및 $[90^\circ/Al]_s$적층에서 탄성계수 E_1 값이 작을 수록 비선형성이 크게 나타나고 있다. 즉, BFRP 혼합적층판의 비선형성이 가장 작고, GFRP 혼합적층판이 가장 큰 비선형성을 갖는다. $[0^\circ/Al]_s$ 및 $[90^\circ/Al]_s$에서 탄성계수 E_1의 증가는 γ/α값을 감소시키기 때문이다. 여기서 α를 지배하는 신장강성계수 A는 탄성계수의 증가따라 크게 증가하나 γ를 지배하는 강성계수 D는 별다른 증가를 보이지 않는다. 그리고 $[0^\circ/Al]_s$이 $[90^\circ/Al]_s$보다 높은 비선형성을 보여주고 있는 것은 γ/α 값이

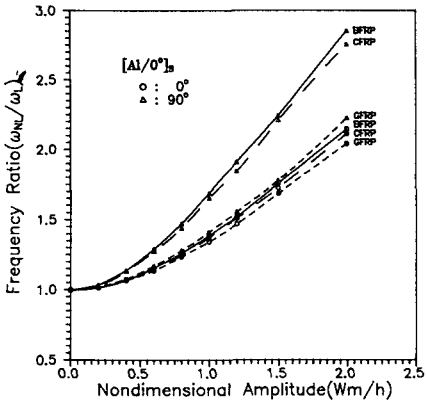


Fig. 8 Frequency ratios vs nondimensional amplitudes of $[Al/0_C^\circ]_s$ plate for various stacking sequences and elastic properties

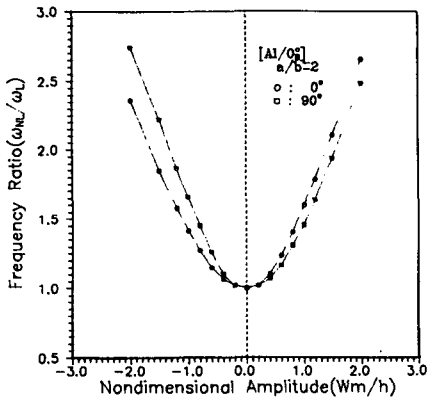


Fig. 9 Frequency ratios vs nondimensional amplitudes of $[Al/0_C^\circ]_s$ rectangular plates

0°적층이 90°적층인 경우보다 큰 값을 갖기 때문이다.

한편 Fig. 8은 Fig. 7과는 달리 $[Al/\theta^\circ]_s$ 적층에 대해 탄성계수의 변화 및 $\theta=0^\circ$, 90°에 대한 비선형 거동을 보여 주고 있는 것으로 Fig. 7의 결과와는 반대로 $\theta=90^\circ$인 경우가 0°인 경우보다 높은 비선형성을 갖고 있으며, 주방향 탄성계수 E_1의 증가에 따라 비선형성도 따라 증가하고 있다.

Fig. 9에서는 2적층 혼합적층판인 $[Al/0_B^\circ]$에 대해 $\theta=0^\circ$, 90°인 경우 비선형거동에 미치는 영향을 보여주고 있다. 앞의 Fig. 4에서 설명한 것처럼 역대칭 적층인 경우는 운동지배방정식 (17)에서 2차 비선형항인 β의 영향으로 무차원 진폭비 0.0를 기준으로 좌우 비대칭 결과를 나타내고 있다. 한편

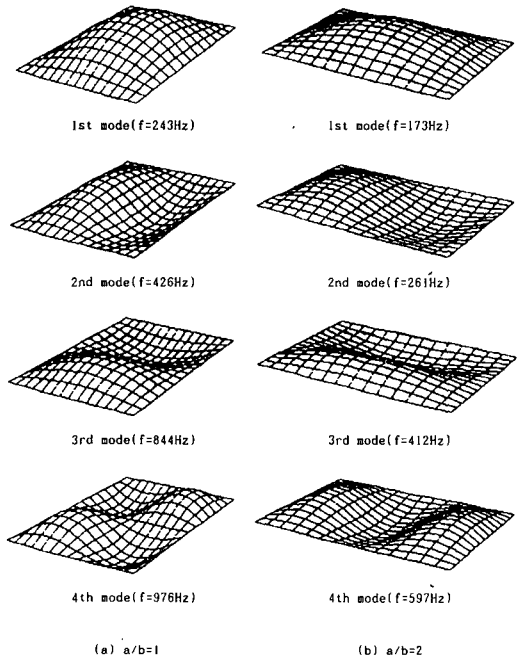


Fig. 10 Mode shapes and natural frequencies of $[90_B^\circ/Al]_s$ square and rectangular plates

양의 진폭에서는 0° 경우가 90°인 경우보다 높은 비선형성을 나타내는 반면, 음의 진폭에서는 90° 경우가 0° 보다 높은 비선형성을 보여주고 있다.

한편 Fig. 10은 $[90_B^\circ/Al]_s$ 적층판에 대해 정사각 및 직사각판(a/b=2)의 모드 형태 및 진동수를 제시한 그림으로 각 판에 대해 첫번째 모드형태에서 3번째 모드형태까지는 서로 같은 모습을 하고 있으나 4번째 모드는 서로 다른 형태로 형상비 2의 직사각판에서 x 방향의 길이가 y 방향의 길이에 비해 길기 때문이다. 그리고 형상비가 2인 경우의 진동수는 형상비 1인 경우의 1/2정도 값을 갖는다.

4. 결 론

본 연구에서는 각종 복합재료 및 알루미늄으로 혼합적층되고 단순고정 경계조건을 갖는 사각판의 비선형 진동해석을 수행한 결과 다음과 같은 몇가지 결론을 얻었다.

(1) $[0_B^\circ/90_C^\circ]$ 2적층 역대칭인 경우 형상비가 1이상인 경우는 초기 소진폭에서는 연화성거동을 나타내다가 어느 이상이 되면 경화성 거동으로 전환된다. 그리고 역대칭인 경우 2적층이상이 되면 연화

성 거동은 나타나지 않고 경화성거동을 보여주고 있으나, 초기 가진 진폭이 (+), (−)인 경우 서로 다른 진동수비를 나타낸다.

(2) 형상비의 증가에 따라 [Al/0$_c^\circ$/90$_c^\circ$/Al] 적층에서는 비선형성이 증가한다.

(3) [Al/0$_c^\circ$]$_s$의 대칭 적층인 경우 x-방향의 반파수(즉, 모드의 증가)에 따라 비선형성이 증가한다.

(4) [θ°/Al]$_s$ 적층에서 $\theta=0^\circ$이 $\theta=90^\circ$인 경우보다 높은 비선형성을 보여주며, [θ°/Al]$_s$ 적층에서는 탄성계수의 증가에 따라 비선형성이 감소하는 경향을 보여준다. 즉, BFRP 혼합적층판의 비선형성이 가장 작고 GFRP 혼합적층판이 가장 큰 비선형성을 갖는다. 반면에 [Al/0$_c^\circ$]$_s$ 적층은 [θ°/Al]$_s$ 적층의 경우와 반대로 $\theta=0^\circ$이 $\theta=90^\circ$인 경우보다 낮은 비선형성을 나타내며, 탄성계수의 증가에 따라 비선형성이 증가하는 모습을 나타낸다.

(5) [0°/Al]$_s$ 적층이 [Al/0°]$_s$ 적층보다 높은 기본진동수를 갖는다.

참고문헌

(1) Chia, C.Y. 1980, "Nonlinear Analysis of Plates," New-York, McGraw-Hill.

(2) Bennett, J.A., 1971, "Nonlinear Vibrations of Simply Supported Angle-ply Laminated Plates," AIAA Journal, Vol. 9, No. 10. pp. 1997~2003.

(3) Chandra, R. and Raju, B.B., 1973, "Large Deflection Vibration Angle-ply Laminated Plates," Journal of Sound and Vibration, Vol. 40, No. 3, pp. 393~408.

(4) Chandra, R. and Raju, B.B., 1975, "Large Amplitude Flexural Vibration of Cross-ply Laminated Composite Plates," Fibre Science Technology, Vol. 8, pp. 243~264.

(5) Reddy, J.M. and Chao, W.C., 1982, "Nonlinear Oscillations of Laminated Anisotropic Rectangular Plates," Trans. of ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol. 49, No. 2, pp. 396~402.

(6) Whitney, J.M. and Leissa, A.W., 1969, "Analysis of Heterogeneous Anisotropic Plates," Trans. of ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol. 36, pp. 261~266.

(7) Bert, C.W., 1973, "Nonlinear Vibration of a Rectangular Plate Arbitrary Laminated of Anisotropic Material," Trans. of ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol. 40, pp. 462~458.

(8) Singh, G. and Rao, G.V., 1991, "Large Amplitude Free Vibration of Simply Supported Antisymmetric Cross-ply Plates," AIAA Journal, Vol. 29, No. 5, pp. 784~790.

(9) Hibbert, H.D. and Karssonn, B.I., 1991, "ABAQUS User's Manual", HKS, Inc.,

(10) Tsai., S.W., 1988, "Composite Design," 4th ed., Think Composites, Dayton.