

〈論 文〉

섬유강화 복합재료의 동탄성계수 및 감쇠특성의 이론적 예측

김진연* · 이정권*

(1992년 7월 14일 접수)

Theoretical Prediction of Dynamic Elastic Moduli and Attenuation Properties of Fiber-Reinforced Composite Materials

Jin-Yeon Kim and Jeong-Guon Ih

Key Words : Fiber-reinforced Composites(섬유강화복합재), Random Distribution(불규칙분포), Compressional Wave(압축파), Shear Wave(전단파), Multiple Scattering(다중산란), Dispersion Relation(분산관계식), Quasi-crystalline Approximation(준결정근사법), Pair-correlation Function(쌍분포함수), Random Walking(제멋대로 걸기)

Abstract

The propagation of coherent time-harmonic elastic L-and SV-waves is studied in a medium with random distribution of cylindrical inclusions. The purpose of the research is to characterize the dynamic elastic moduli and the attenuation properties of fiber-reinforced composite materials. The cylinders representing the fibers are assumed to be distributed in parallel with each other and the direction of incident waves are normal to the cylinder axes. A multiple scattering formula using the single scattering coefficients in conjunction with the Lax's quasicrystalline approximation is derived from which the dispersion relation for such medium is obtained. In order to formulate the multiple scattering interaction between cylinders, the pair correlation functions are generated by the Monte Carlo simulation technique. From the numerically evaluated complex wavenumbers, the propagation speed of the average wave, the coherent attenuation and the effective elastic moduli are presented as functions of frequency and fiber volume fraction.

기 호 설 명

A_n, B_n : 단일산란계수
 A_{jn}, B_{jn} : 다중산란계수
 c : 체적비(면적밀도)
 c_L, c_T : 압축파 및 전단파의 위상속도
 $J_n(x)$: 제1종 베셀함수(n 차)
 K : 평균파동의 복소파수
 k_L, k_T : 압축파 및 전단파의 파수

$g(x)$: 쌍분포함수
 $H_n(x)$: 제1종 한켈함수
 N : 산란체의 갯수
 $n(r)$: 거리 r 에 존재하는 산란체의 갯수
 n_0 : 산란체 갯수의 밀도
 $p(r_i)$: r_i 에 산란체가 존재할 확률밀도
 $p(r_i/r_j)$: r_i 에 한 산란체가 존재하고, r_j 에 다른 산란체가 존재할 조건부 확률밀도
 $p(r_1, r_2, \dots, r_N)$: r_1, r_2, \dots, r_N 에 산란체가 동시에 존재할 결합확률밀도

*정회원, 한국과학기술원 기계공학과

T	: Monte Carlo모의실험의 횟수
T_m	: 산란연산자 행렬
u	: 변위벡터
α_{jn}, β_{jn}	: 유효입사파
λ, μ	: 매질의 Lamé상수
λ', μ'	: 실린더의 Lamé상수
Φ	: 압축파의 포텐셜
Ψ	: 전단파의 포텐셜
ρ, ρ'	: 매질 및 실린더의 밀도
τ_{ij}	: 응력텐서
ω	: 원 주파수

1. 서 론

다중산란이란 두 개이상의 산란체가 서로 인접하게 존재하여, 한 산란체에서의 산란파동이 나머지 산란체에서 다시 산란을 일으키는 과정이 반복되는 현상을 말하는데, 각 산란체에서 전개된 파동함수가 모든 산란체 경계에서의 조건을 만족하여야 하므로 단일산란(single scattering) 문제보다 해석하기가 비교적 어렵다. 다중산란체를 포함하는 복합매질 내를 전파하는 파동의 가장 일반적 특징은 분산(dispersion)과 감쇠(attenuation)이어서 전파상수가 복소수이며 주파수의 함수가 된다. 불규칙한(random) 배열의 다중산란체의 경우에는 일반적으로 평균산란장 및 평균전파 상수를 계산게 되며, 복합매질의 분산관계식(dispersion relation)으로부터 주파수에 따른 복소파수(complex wavenumber)를 구함으로써 매질의 동적 유효물성치(dynamic effective material properties)를 파악한다.

1899년에 Lord Rayleigh⁽¹⁾는 하늘색이 푸른 이유를 알기 위하여 대기중의 입자에 의한 빛의 산란현상을 단일 산란으로 해석하였다. 이후 Foldy⁽²⁾는 모든 경계에서의 조건을 일일이 맞추어야 하는 다중산란 이론의 근본적인 난해성을 극복하기 위하여, 배치적평균(configurational average)의 개념을 도입하여 임의의 산란체에 대하여 기술된 다중산란 계수에 관한 수식을 먼저 산란체의 위치에 관하여 평균을 취하여 얻은 무한개의 적분방정식을 축약하여(truncate) 다중산란을 해석하였다. Lax⁽³⁾는 무한개의 적분방정식을 축약하는데 있어서 근본적으로 다른 개념에서 출발한 준결정 근사법(quasi crystalline approximation)을 이용하였다. Waterman과 Truell⁽⁴⁾은 준결정 근사법의 한계를

명시하였다.

복합재료의 설계에 있어서 가공된 복합재료의 물성을 파악하는 것은 가장 기본적인 작업이다. 특히 복합재료가 충격과 같은 과도하중을 받는 구조물로서 사용될 경우, 그 구조물의 응답을 결정하기 위하여 강화 섬유 특성, 기지(matrix)에 대한 체적비(volume fraction), 분포 뿐만 아니라 주파수의 변화에 대한 탄성계수 및 감쇠계수를 구하는 것이 필요하게 된다. 그러한 동적 물성치는 이론적으로나 실험적으로 복합재료를 전파하는 탄성파(L, SV, SH파)를 연구함으로써 예측될 수 있다.

Achenbach와 Hermann⁽⁵⁾은 유효강성법(effective stiffness method)을 통해 섬유와 기지의 상호작용을 고려하여 섬유강화 복합체의 파동전파 특성을 파악하였는데, 그들의 결과에서는 섬유에 대하여 수직인 방향으로 전파되는 파동은 분산이나 감쇠가 전혀 나타나지 않았다. Bose와 Mal⁽⁶⁾은 다중산란이론에 지수형 쌍분포함수(pair correlation function)를 이용하여 저주파 극한에서의 물성을 구하였다. Varadan⁽⁷⁾등은 천이행렬(transition matrix)을 이용하여 같은 해석을 시도하였다.

본 연구에서는 일방향(unidirectional)으로 섬유가 강화된 복합재료를 다루게 되는데, 섬유는 직경이 모두 같고, 길이가 무한이며, 서로 평행하게 정렬되어 불규칙하게 분포된 원형실린더로 가정한다. 먼저, 임의의 한 기준 산란체에 의한 압축파 및 SV파의 산란을 수식화하고, 기준 산란체에 대한 나머지 산란체들이 존재할 확률을 이용하여 산란계수의 통계적 기대값을 구함으로써 그 매질내에 존재하는 파동의 전파 특성을 지배하는 분산관계식을 얻게 된다. 복소파수로 표현되는 분산관계식의 해를 수치적으로 구함으로써 매질의 평균전파속도, 유효 동탄성계수 및 감쇠계수를 주파수와 체적비의 함수로 구한다. 또 구하여진 동탄성계수의 저주파 극한값과 정적하중상태에서 구한 Hashin-Rosen의 값들과 비교하여 봄으로써 본 연구의 타당성을 입증한다.

본 연구는 복합재료 내에서의 SH 탄성파의 전파현상에 관한 연구⁽⁸⁾의 확장이다.

2. 이 론

2.1 선형 동탄성이론
균질하고(homogeneous) 등방성(isotropic)인 탄성

연속체 내에서, \mathbf{u} 가 입자들의 변위벡터, λ, μ 가 Lamé탄성상수라 할 때, 체적력이 존재하지 않는 연속체 내부에서의 운동방정식은

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (1)$$

로써 표현되는데, ρ 는 매질의 밀도를 의미한다.

변위 벡터를 스칼라 포텐셜 $\Phi(r) e^{-i\omega t}$ 와, 벡터 포텐셜 $\Psi(r) e^{-i\omega t}$ 의 미분으로 정의하면

$$\mathbf{u} = (\nabla \Phi + \nabla \times \Psi) e^{-i\omega t}, \quad \nabla \cdot \Psi = 0 \quad (2)$$

이 된다. 식 (2)를 식 (1)에 대입하고 정리하면

$$\nabla^2 \Phi + k_L^2 \Phi = 0 \quad (3)$$

$$\nabla^2 \Psi + k_T^2 \Psi = 0 \quad (4)$$

의 두가지 독립적인 Helmholtz방정식을 얻는다. 여기서 $k_L (= \omega/c_L)$, $k_T (= \omega/c_T)$ 는 각각의 파동에 대한 파수(wavenumber)를 가리킨다. 식 (3)은 위상속도(phase velocity)가 $c_L = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ 인 종파(longitudinal wave) 혹은 압축파(compressional wave)에 대한 스칼라 Helmholtz방정식이며, Φ 는 그에 대한 스칼라 포텐셜이다. 한편, 식 (4)는 속도가 $c_T = \sqrt{\mu/\rho}$ 인 횡파(transverse wave) 혹은 전단파(shear wave)에 대한 Helmholtz방정식이며, Ψ 는 그에 대한 벡터 포텐셜이다. 식 (4)에서 임의의 벡터 V 의 Laplacian은

$$\nabla^2 (V) = \nabla (\nabla \cdot V) - \nabla \times \nabla \times (V)$$

임을 의미한다. 전단파는 기준좌표계에서의 입자의 움직임의 방향에 따라서 전자기파에서와 같이 분극(polarization)의 개념을 도입하면 SV파(vertically polarized shear wave)와 SH파(horizontally polarized shear wave)로 구분할 수 있는데, 원통좌표계에서는 Fig. 1과 같이 표현된다.

식 (3), (4)의 해를 구하기 위하여 필요한 경계조

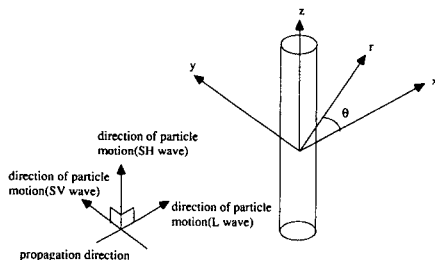


Fig. 1 Incident elastic waves in cylindrical coordinate

건으로는 무한 경계에서의 방사조건(radiation condition)과 유한한 경계에서의 조건, 즉

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \{r(\Phi + ik_L^{-1} \partial \Phi / \partial r)\} = 0 \quad (5a)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \{r(\Psi + ik_T^{-1} \partial \Psi / \partial r)\} = 0 \quad (5b)$$

$$\tau_{ij} n_j = \bar{\tau}_i \quad (5c)$$

$$u_i = \bar{u}_i \quad (5d)$$

인데 $\bar{\tau}_i, \bar{u}_i$ 는 경계에서 미리 주어진 표면력(traction) 성분과 변위성분을 말한다. 식 (3)~(5)에 의해 탄성파에 대한 일반적인 경계치문제(boundary value problem)의 형태가 구성된다. 식 (3), (4)는 서로 독립적이나, 유한한 경계에서의 조건이 다른 성분의 변위를 관련지움으로써 한 가지 형태의 파동이 입사되더라도, 여러가지 형태의 산란파가 발생하는 모우드변환(mode conversion)을 일으키게 된다. 한편, 다음 절에서 기술할 2차원 산란문제에서는 L, SV-파는 SH-파로 모우드변환되지 않으므로, SH-파와의 연성은 고려할 필요가 없다.

2.2 단일실린더에 의한 탄성파의 산란

먼저, 다중산란의 기본이론으로서, 하나의 실린더에 의한 탄성파의 산란현상을 검토한다. Lamé 탄성상수가 λ, μ 이고 밀도가 ρ 인 무한매질내에, 반경이 a 이고 Lamé 탄성상수가 λ', μ' 이며 밀도가 ρ' 인 무한 실린더가 Fig. 1과 같은 좌표계에서 존재한다고 할 때, 단위크기를 가지며 수직으로 입사하는 입사파의 포텐셜은 원통좌표계에서 입사파의 형태에 따라

$$\Phi^{inc} = e^{ik_L x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(k_L r) e^{in\theta} \quad (\text{압축파 입사}) \quad (6)$$

$$\Psi^{inc} = i e^{ik_T z} \hat{z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^{n+1} J_n(k_T r) e^{in\theta} \hat{z} \quad (\text{SV파 입사}) \quad (7)$$

로 각각 표현된다. 여기서 $J_n(x)$ 는 n 차의 제1종 Bessel 함수를 가리키며, \hat{z} 는 z 축 방향의 단위벡터를 의미한다. 또한 산란파의 포텐셜은 각각 식 (3), (4) 및 식 (5.1)과 (5.2)를 만족하는 파동함수의 무한합인

$$\Phi^{sca} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n H_n(k_L r) e^{in\theta} \quad (8)$$

$$\Psi_z^{sca} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_n H_n(k_T r) e^{in\theta} \quad (9)$$

로 나타낼 수 있다. 여기서 $H_n(x)$ 는 제 1종

Hankel 함수를 가리킨다. 한편, 외부의 파동에 의하여 실린더 내부에 발생하는 파동의 포텐셜은 또한 각각 식(3)과 (4)를 만족하며 내부음장의 유효성을 만족시키는 해로서

$$\Phi^{int} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_n J_n(k_l r) e^{in\theta} \quad (10)$$

$$\Psi_2^{int} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_n J_n(k_l r) e^{in\theta} \quad (11)$$

로 나타낼 수 있다. 여기서 '은 실린더 내부의 값을 표시한다.

실린더 표면에서의 변위와 응력이 연속이라는 경

계 조건에 따라 식 (5.3), (5.4)를 본 문제에 맞게 고쳐 쓰면

$$\begin{aligned} (u_r^{inc} + u_r^{sca})|_{r=a} &= u_r^{int}|_{r=0}, \\ (u_\theta^{inc} + u_\theta^{sca})|_{r=0} &= u_\theta^{int}|_{r=0} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} (\tau_r^{inc} + \tau_r^{sca})|_{r=a} &= \tau_r^{int}|_{r=0}, \\ (\tau_\theta^{inc} + \tau_\theta^{sca})|_{r=0} &= \tau_\theta^{int}|_{r=0} \end{aligned} \quad (13)$$

이 된다. 식 (6)~(11)으로 부터 각각의 파동에 의한 변위와 응력을 구하여 식 (12), (13)에 다시 대입하고, 삼각함수의 직교성을 이용하면 다음과 같은 선형연립방정식을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} \xi_L H_n'(\xi_L) & inH_n(\xi_r) & -\xi_L J_n'(\xi_L) & inJ_n(\xi_r) \\ inH_n(\xi_L) & -\xi_r H_n'(\xi_r) & inJ_n'(\xi_L) & -\xi_r J_n'(\xi_r) \\ \xi_L^2 \{2H_n''(\xi_L) - \frac{\lambda}{\mu} H_n(\xi_L)\} & 2in\{\xi_r H_n'(\xi_r) - H_n(\xi_r)\} & -\xi_L^2 \{2J_n''(\xi_L) - \frac{\lambda}{\mu} J_n(\xi_L)\} & -2in\mu \frac{\lambda}{\mu} \{\xi_r J_n'(\xi_r) - J_n(\xi_r)\} \\ 2in\{\xi_L H_n'(\xi_L) - H_n(\xi_L)\} & -\xi_r^2 \{2H_n''(\xi_r) + H_n(\xi_r)\} & -2in\mu \frac{\lambda}{\mu} \{\xi_L J_n'(\xi_L) - J_n(\xi_L)\} & \xi_r^2 \{2J_n''(\xi_r) + J_n(\xi_r)\} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_n \\ B_n \\ A_n' \\ B_n' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \xi_L H_n(\xi_L) & inH_n(\xi_r) \\ inH_n(\xi_L) & -\xi_r H_n'(\xi_r) \\ \xi_L^2 \{2H_n''(\xi_L) - \frac{\lambda}{\mu} H_n(\xi_L)\} & 2in\{\xi_r H_n'(\xi_r) - H_n(\xi_r)\} \\ 2in\{\xi_L H_n'(\xi_L) - H_n(\xi_L)\} & -\xi_r^2 \{2H_n''(\xi_r) + H_n(\xi_r)\} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} i^n \\ i^{n+1} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

식 (14)에서 $\xi_L = k_L a$, $\xi_r = k_r a$, $\xi_L' = k_L' a$, $\xi_r' = k_r' a$ 이며 우변의 벡터는 입사파의 파동함수 전개 상수를 나타내는데, 한 가지 형태의 파동이 입사할 때는 둘 중 하나가 영이 된다. 본 연구에서는 외부산란장에만 관심이 있으므로, 식 (14)를 변형하면 단일 산란계수가

$$\begin{Bmatrix} A_n \\ B_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_n^{LL} & T_n^{LS} \\ T_n^{SL} & T_n^{SS} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i^n \\ i^{n+1} \end{Bmatrix} = T_n \begin{Bmatrix} i^n \\ i^{n+1} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

로 된다. 식 (15)에서 T_n^{LL} 는 압축파의 입사에 의한 압축파의 산란율, T_n^{LS} 는 SV파의 입사에 의하여 압축파로 모드 변환되는 산란율을 의미하며, T_n^{SL} , T_n^{SS} 도 마찬가지로 의미를 부여할 수 있다. 식 (15)에서의 연산자 행렬 T_n 은 일반적인 산란문제에 있어서 입사파와 산란파의 관계를 규정 짓는 연산자 형태로 표시한 것인데, Helmholtz 적분방정식으로 부터 구한 실린더에 대한 천이행렬에 의한 표현법과 동일하다.

2.3 여러 개의 실린더에 의한 탄성파의 다중산란

(1) 다중산란의 수식화

N 개의 실린더는 모두 같은 물성을 가지며 길이가 무한하고, 서로 평행하게 존재한다고 가정한다. 임의의 i -번째 실린더와 j -번째 실린더를 Fig. 2와 같이 표현하면, (R_j, θ_j) 는 j -번째 실린더에 고정된 극좌표를, (r_i, ϕ_i) 는 기준좌표계에서의 i -번째 실린더 중심의 위치를 가리키며, (r_{ij}, θ_{ij}) 는 두 실

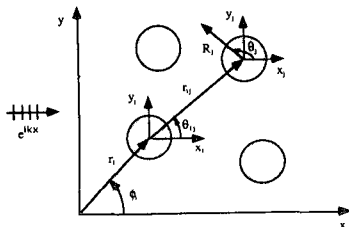


Fig. 2 Coordinate systems associated with multiple scattering

린더의 상대적 거리와 각도를 각각 나타낸다.

입사파에 의한 총 변위장은, 산란파를 각각의 실린더에 고정된 원통좌표계에서 기술한 단일산란의 중첩으로 표시하면, 포텐셜이 다음과 같이 나타내어진다.

$$\Phi = \Phi^{inc} + \Phi^{sca} = e^{ikh_Lx} + \sum_{i=1}^N \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{in} H_n(k_L R_i) e^{in\phi_i} \quad (16)$$

$$\Psi = \Psi^{inc} + \Psi^{sca} = e^{ik_Tx} + \sum_{i=1}^N \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_{in} H_n(k_T R_i) e^{in\phi_i} \quad (17)$$

여기서 A_{in} , B_{in} 은 i -번째 실린더의 n 차 파동함수의 계수를 가리킨다. 식 (16), (17)에서 입사파와 모든 산란파가 j -번째 실린더 경계에서의 조건을 만족하기 위하여, 각 좌표계에서 표현된 산란파를 j -번째 실린더에 고정된 극좌표에서 표현하는 것이 필요하므로, Hankel 함수의 합정리(addition theorem)⁽¹³⁾를 생각하면,

$$H_n(kR_i) e^{in\theta_i} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^{n+n} J_m(kR_j) e^{im\theta_j} H_{m-n}(kr_{ij}) \times e^{i(m-n)\theta_{ij}} \quad (18)$$

과 같이 나타낼 수 있다. 식 (18)을 식 (16), (17)에 대입하면

$$\Phi = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [A_{jm} H_m(k_L R_j) + J_m(k_L R_j) \alpha_{jm}] e^{im\theta_j} \quad (19)$$

$$\Psi_z = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [B_{jm} H_m(k_T R_j) + J_m(k_T R_j) \beta_{jm}] e^{im\theta_j} \quad (20)$$

이 되는데, α_{jm} 과 β_{jm} 은 각각 다음과 같은 의미를 갖고 있다:

$$\alpha_{jm} = i^m e^{ikh_L x_j} + \sum_{i=1}^N \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{in} H_{n-m}(k_L R_{ij}) e^{i(n-m)\theta_{ij}}$$

$$\beta_{jm} = i^m e^{ik_T x_j} + \sum_{i=1}^N \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_{in} H_{n-m}(k_T R_{ij}) e^{i(n-m)\theta_{ij}}$$

여기서, $x_j = r_j \cos \phi_j$ 이며 $\sum_{i=1}^N$ '는 j -번째 실린더를 제외한 합을 의미한다. 또한 j -번째 실린더의 내부 파동은

$$\Phi_j^{int} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A'_{jn} J_n(k'_L R_j) e^{in\theta_j} \quad (21)$$

$$\Psi_j^{int} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B'_{jn} J_n(k'_T R_j) e^{in\theta_j} \quad (22)$$

로 표현된다. 식 (19)~(22)를 경계조건에 대입하고 산란 연산자 행렬 T_m 를 이용하여 표현하면, 다

중산란 계수는

$$\begin{Bmatrix} A_{jm} \\ B_{jm} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_m^{LL} & T_m^{LS} \\ T_m^{SL} & T_m^{SS} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_{jm} \\ \beta_{jm} \end{Bmatrix} \quad (23)$$

로 축약 표현된다. 단일 산란계수를 구하는 식 (15)와 비교해 보면, 식 (23)의 의미는 j -번째 실린더의 입장에서는 원래의 입사파 뿐만 아니라, 나머지 다른 실린더에 의한 산란파들도 유효한 입사파가 된다는 것을 말한다.

(2) 통계적 평균파동

만일, 산란체의 갯수가 단지 몇 개에 불과하다면, 식 (23)을 모든 경계에 적용하고 ($j=1, \dots, N$) 무한 선형방정식을 유한한 갯수의 항까지만 고려하여 산란계수를 구할 수 있지만, 산란체의 갯수가 매우 많을 경우에는 주기적인 배열과 같은 특수한 경우⁽⁹⁾를 제외하면 실제로 산란계수를 구하기 어렵다. 그러나, 분포가 완전히 랜덤할 경우에는 통계적인 평균값이 의미가 있으므로, 산란체의 분포에 대한 조건부확률을 이용하여, 모든 산란체에 대하여 다중산란 계수의 앙상블 평균을 취함으로써 평균파동(average wave)에 관한 정량적인 값을 얻을 수 있게 된다.^(2,3)

먼저 i -번째 산란체의 중심의 위치벡터를 r_i 라 하면, 산란체들이 r_1, r_2, \dots, r_N 에 동시에 존재할 결합확률밀도(joint probability density) $p(r_1, r_2, \dots, r_N)$ 는 조건부 확률밀도에 관한 Bayes 정리⁽¹⁴⁾에 의하여

$$p(r_1, r_2, \dots, r_N) = p(r_i) p(r_1, r_2, \dots, r_{i-1}, r_{i+1}, \dots, r_N | r_i) = p(r_i) p(r_j | r_i) p(r_1, r_2, \dots, r_{i-1}, r_{i+1}, \dots, r_N | r_i, r_j) \quad (24)$$

의 관계를 가진다. 여기서 $p(r_i)$ 는 하나의 실린더가 면적내에 있을 확률밀도를, $p(r_j | r_i)$ 는 r_i 에 하나가 존재하고 r_j 에 다른 하나가 존재할 조건부 확률밀도를 나타내며, '는 r_i 혹은 r_i 와 r_j 를 제외한다는 뜻이다. 모든 산란체를 포함하는 면적 S 가 무한하다면(따라서 N 은 무한개), 하나의 실린더가 면적내에 있을 확률밀도는

$$p(r_i) = \frac{1}{S} \quad r_i \in S \quad (25)$$

로 주어지고, 또한 조건부 확률밀도는

$$p(r_i | r_j) = \frac{g(r_{ij}/2a)}{S} \quad r_{ij} > 2a, \quad (26)$$

$$= 0 \quad r_{ij} < 2a$$

로 나타내어진다. 여기서 쌍분포함수(pair correla-

tion function) $g(x)$ ($x=r_{ij}/2a$)를 통계역학적⁽¹²⁾ 용어로는 반경분포함수(radial distribution function; RDF)이라 하는데, 원래 통계역학에서는 액체의 상태방정식을 얻기 위하여 필요한 분자들의 분포를 구하기 위하여 사용되고 있다. 식 (26)의 두번째 조건식은 산란체들이 서로 침투 불가능하다는 것을 의미한다. 산란체의 갯수가 작으면 $x > 1$ 인 조건에서 $g(x)=1$ 혹은 $1/(1-c)$ 이고 $x < 1$ 에서는 $g(x)=0$ 이 되어, j -번째 산란체가 있을 확률이 i -번째 산란체의 위치에 영향을 받지 않는다는 뜻이 된다. 여기서 $c(=n_o\pi a^2)$ 는 면적밀도(체적비)를 나타내고 n_o 는 N/S 를 가리킨다. 그러나 산란체의 갯수의 밀도가 높은 경우에, 특히 간섭에 의한 감쇠는 산란체의 상대적 위치에 의존하기 때문에, 위의 값을 이용하면 잘못된 해를 얻게 된다. $g(x)$ 를 구하는 방법⁽¹²⁾은 Percus-Yevick 근사, self-consistent 근사, Born-Green-Yevon 근사, Monte Carlo모의 실험법 등 여러가지 방법이 있으나, 면적밀도가 높을 때에도 정확한 해를 줄 수 있

는 방법은 Monte Carlo 모의실험법이다. 본 연구에서는 각 산란체들의 위치를 2차원 제멋대로 걷기(random walking)를 통하여 새로운 배치를 계속 만들어 내고, 각 상황에서의 분포를 평균함으로써 RDF를 구하는 Monte Carlo모의실험을 이용하는 데⁽¹²⁾, 이 방법을 쓸 때에는 랜덤샘플의 갯수를 많이함으로써 정확한 해를 효과적으로 구할 수 있다. 각각 i -, j -번째 산란체가 고정된 상황에서 임의의 통계량 F 의 조건부 기대값은

$$\begin{aligned} \langle F \rangle_i &= \int_s \cdots \int_{s_N} Fp(r_1, r_2, \dots, r_N / r_i) \\ &\quad dr_1 dr_2 \cdots dr_N, \\ \langle F \rangle_{ij} &= \int_s \cdots \int_{s_N} Fp(r_1, r_2, \dots, r_i, \dots, r_N / r_i, r_j) \\ &\quad dr_1 dr_2 \cdots dr_N \end{aligned} \quad (27)$$

로 표현될 수 있다. 식 (23)에 식 (24), (25)의 확률밀도를 양변에 곱하면, 한 개의 산란체가 고정되었을 때의 다중산란계수의 기대값이 다음과 같이 나타내어 질 수 있다.

$$\left\{ \begin{aligned} \langle A_{jm} \rangle_i &= T_m \left\{ i^m e^{ikLx_j} + \frac{N-1}{S} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{|r_i - r_j| > 2a} \langle A_{in} \rangle_i H_{n-m}(k_L r_{ij}) e^{i(n-m)\theta_{ij}} g(r_{ij}/2a) dr_i \right\} \\ \langle B_{jm} \rangle_j &= T_m \left\{ i^m e^{ikTx_j} + \frac{N-1}{S} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{|r_i - r_j| > 2a} \langle B_{in} \rangle_i H_{n-m}(k_T r_{ij}) e^{i(n-m)\theta_{ij}} g(r_{ij}/2a) dr_i \right\} \end{aligned} \right. \quad (28)$$

여기서, 두 개의 산란체가 고정되었을 때의 조건부 기대값이 적분항 내에 있음을 볼 수 있다. 마찬가지로 두 개의 산란체가 고정되었을 때의 조건부 기대값을 얻기 위해서는 세 개의 산란체가 고정되었을 때의 조건부 기대값이 필요하게 되므로, 실제로는 무한개의 조건부 기대값을 알아야 한다. 이러한 적분방정식의 무한구조(infinite hierarchy)를 간단화하기 위하여 Lax⁽³⁾는 다음과 같이 준결정근사법(quasi crystalline approximation)을 제안하였다.

$$\langle A_{in} \rangle_{ij} \cong \langle A_{in} \rangle_i, \quad \langle B_{in} \rangle_{ij} \cong \langle B_{in} \rangle_i \quad (29)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \langle A_{jm} \rangle_j &= T_m \left\{ i^m e^{ikLj} + n_o \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{|r_j - j| > 2a} \langle A_{in} \rangle_i H_{n-m}(k_L r_{ij}) e^{i(n-m)\theta_{ij}} g(r_{ij}/2a) dr_i \right\} \\ \langle B_{jm} \rangle_j &= T_m \left\{ i^m e^{ikTx_j} + n_o \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{|r_j - j| > 2a} \langle B_{in} \rangle_i H_{n-m}(k_T r_{ij}) e^{i(n-m)\theta_{ij}} g(r_{ij}/2a) dr_i \right\} \end{aligned} \right. \quad (30)$$

이 된다.

결국 한 산란체의 다중산란계수를 구하는데 있어서 나머지 산란체들의 기여는, 기준산란체에 대한 나머지 각 산란체 사이의 공간적 분포에 의해서만 표현됨을 알 수 있다.

식 (29)를 준결정근사라 하는 이유는 다음과 같이 설명될 수 있다. 즉, 만일 산란체가 결정(crystal)과 같이 주기적 배열을 가진다면 하나의 산란체에 대한 정보가 전부이므로, 고정된 하나의 산란체에 대한 나머지 산란체의 관계 즉, $\langle A_{in} \rangle_i$, $\langle B_{in} \rangle_i$ 만필요하다. 그런데 랜덤하게 분포하지만 면적밀도가 비교적 높은 경우에는 그 분포가 주기적 형태에서 그리 많이 벗어나지는 않을 것이므로, 식 (29)는 근사적으로 성립된다. 실린더개의 갯수가 매우 많을 때는 $(N-1)/S$ 가 $N/S(=n_o)$ 로 근사되므로, 식 (29)에 의하여 식 (28)은,

(3) 분산관계식

이제 평균파동을 입사파와 같은 방향으로 진행하는 평면파로 가정하면,

$$\langle A_{jm} \rangle_j = i^m X_m \exp[dK^L(\omega) x_j],$$

$$\langle B_{jm} \rangle_j = i^m Y_m \exp[iK^{SV}(\omega) x_j] \quad (31)$$

이고, $K^\sigma = (K^\sigma_1 + iK^\sigma_2)$ ($\sigma = L, SV$)는 평균파동의 복소파수를 나타내는데 실수부는 복합된 매질을 지나는 파동의 전파속도를, 허수부는 다중산란에 의한 감쇠계수를 나타내며, 모두 주파수의 함수이다. 식 (31)을 식 (30)에 대입하면

$$\begin{aligned} i^m X_m \exp(iKX_j) &= T_m^{LL} [i^m e^{iKX_j} \\ &+ n_o \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n X_n \int_{|r_i - r_j| > 2a} e^{iKX_i} H_{n-m} \\ &(k_L r_{ij}) e^{i(n-m)\theta_{ij}} g(r_{ij}/2a) dr_i] \\ &+ T_m^{LS} [i^m e^{iKX_j} + n_o \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n X_n \int_{|r_i - r_j| > 2a} e^{iKX_i} \\ &H_{n-m}(k_L r_{ij}) e^{i(n-m)\theta_{ij}} g(r_{ij}/2a) dr_i] \quad (32a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i^m Y_m \exp(iKX_j) &= T_m^{SL} [i^m e^{iKX_j} \\ &+ n_o \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n X_n \int_{|r_i - r_j| > 2a} e^{iKX_i} \\ &H_{n-m}(k_L r_{ij}) e^{i(n-m)\theta_{ij}} g(r_{ij}/2a) dr_i] + T_m^{SS} \\ &[i^m e^{iKX_j} + n_o \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n Y_n \int_{|r_i - r_j| > 2a} e^{iKX_i} H_{n-m} \\ &(k_L r_{ij}) e^{i(n-m)\theta_{ij}} g(r_{ij}/2a) dr_i] \quad (32b) \end{aligned}$$

이 된다. 식 (32)의 적분을 수행하고 extinction theorem⁽⁹⁾에 의하여(부록 참조) 다음과 같은 무한제차 선형 연립방정식을 얻을 수 있다.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} [\delta_{mn} - 8cT_m^{LL} F_{n-m}] X_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [8cT_m^{LS} G_{n-m}] Y_n \quad (33a)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} [\delta_{mn} - 8cT_m^{SS} G_{n-m}] Y_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [8cT_m^{SL} F_{n-m}] X_n \quad (33b)$$

여기서,

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{(2k_L a)^2 - (2Ka)^2} [(2k_L a) J_n(2Ka) H'_n(2k_L a) - (2Ka) \\ &J_n(2Ka) H_n(2k_L a)] \\ &+ \int_1^\infty [g(x) - 1] H_n(2k_L a x) J_n(2Ka x) dx \quad (34) \end{aligned}$$

이다. G_n 은 식 (34)에서 k_L 대신 k_T 를 대입하면 된다. 식 (33)의 의미있는 해는 계수행렬의 행렬식(determinant)이 영이 될 때이므로, 일반화된 고유치 문제로 귀결된다. 식 (33)을 행렬 형태로 쓰면,

$$U_1 \mathbf{x} = V_1 \mathbf{y} \quad (35a)$$

$$U_2 \mathbf{x} = V_2 \mathbf{y} \quad (35b)$$

이 되고 U, V 와 \mathbf{x}, \mathbf{y} 는 각각 식 (33)의 계수행렬과 벡터에 해당한다. L, SV 파에 대한 분산관계식

은 각각

$$|U_1 - V_1 V_2^{-1} U_2| = 0 \quad (L\text{파}) \quad (36a)$$

$$|V_1 - U_1 U_2^{-1} V_2| = 0 \quad (SV\text{파}) \quad (36b)$$

이 된다.

3. 수치계산의 결과 및 고찰

3.1 Monte Carlo 모의실험에 의한 쌍분포함수

조건부확률밀도함수 $p(r_i|r_j)$ 는 쌍분포함수(혹은 RDF) $g(x)$ 와 식 (26)에 정의된 관계를 가지는데, RDF는 다음과 같은 Monte Carlo 모의실험을 이용하여 구하였다. 즉, 먼저 주기적인 경계를 가진 표본면적 내에 체적비에 해당하는 원(hard disks)을 분포시킨 다음, 서로 겹쳐지지 않도록 각각의 원들에 대해 난수(random number)를 이용하여 제멋대로 걸기를 시킨다. 표본면적의 경계가 주기적이기 때문에 어떤원이 한 경계 밖으로 나가면 반대편 경계에서 새로운 원이 표본면적 내로 들어오게 되므로, 무한대의 표본면적을 취하지 않아도 된다.⁽¹⁰⁾ 기준이 되는 원을 중심으로 반경을 증가시키면 증가된 면적내에 존재할 수 있는 원의 갯수의 앙상블 평균은

$$\langle n(r) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \langle n_j(r) \rangle = \frac{1}{NT} \sum_{i=1}^T \sum_{j=1}^N n_{ji}(r) \quad (37)$$

이 되는데, 여기서 원의 갯수는 N , 반복되는 simulation의 횟수를 T , j -번째 원이 고정되었을 때의 거리 r 에 따른 평균 갯수를 $n_{ji}(r)$ 로 표현하였다. 만일 두 원이 서로 무관하게 분포한다면(uncorrelated), 거리 r 에 있을 산란체의 평균 갯수는 증가된 면적 $\Delta A(r) = 2\pi r \Delta r$ 에 대하여

$$\langle n(r) \rangle_{unc} = \Delta A(r) c \frac{N-1}{N} \quad (38)$$

이므로, r 에 원이 존재할 확률은

$$g(r) = \frac{\langle n(r) \rangle}{\langle n(r) \rangle_{unc}} = \frac{\sum_{i=1}^T \sum_{j=1}^N n_{ij}(r)}{c(N-1)T\Delta A(r)} \quad (39)$$

로써 구해진다. $g(r)$ 은 그 성질상 $g(r) = 0, 0 \leq r < 1$ 이며, $r \rightarrow \infty$ 일 때에는 $g(r) \rightarrow 1$ 이다.

Fig. 3에서는 체적비의 변화에 따른 RDF의 변화를 예시하였는데, 기본적으로 위의 성질을 만족하며, Chandler⁽¹⁵⁾의 결과와 일치한다. 체적비가 커질수록 진폭이 커짐을 볼 수 있는데, 이것은 실린

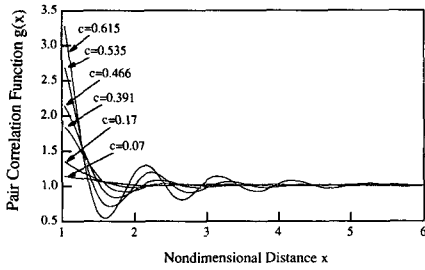


Fig. 3 Pair-correlation function by Monte Carlo Simulation

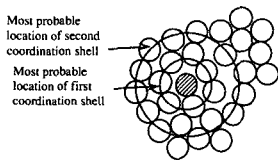


Fig. 4 Distribution of cylinders in highly packed composite materials

더들이 서로 가까이 존재하여야 하므로 위치에 대한 상관성이 커짐으로써 발생하는 것이다. 또한 체적비가 높아 질수록 진동의 주기가 $1(r_{ij}=2a)$ 에 가까워짐을 볼 수 있는데, 그 내용은 Fig. 4에서 기하학적으로 설명되고 있다.

3.2 유효강성과 감쇠계수

본 연구에서는 섬유강화 복합재료의 한 예로서, 기지가 알루미늄이고 섬유가 Boron으로 된 Boron/Aluminum 복합재료를 대상으로 하였다. 수치계산에 사용된 재료의 물성은 Table 1과 같다.

식 (36)의 분산관계식의 고유치를 구하기 위하여, 행렬의 크기를 (21×21) 로 하여 $ka=0.05 \sim 3$ 의 전 주파수 범위내에서 파동함수가 수렴하도록 하였다. Fig. 5에서는 L, SV파의 각각에 대하여 기지에 대한 복합재료에서의 평균 전파속도비 $Re\langle c_o \rangle / c_{L,L} = Re(k_{L,T} / K_o)$ ($\sigma = L, SV$)를 체적비

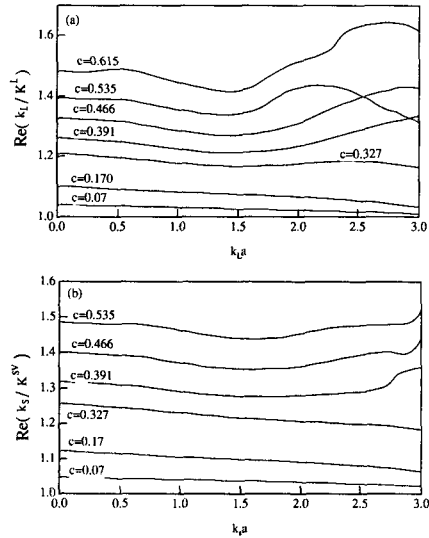


Fig. 5 Phase velocity ratio vs. frequency varying the volume fraction, c. (a) L wave, (b) SV wave

와 주파수의 함수로 계산하여 보여주고 있다. 여기서, $\langle c_o \rangle$ 는 복합재료에서의 평균 속도를 말한다. Table 1에서 볼 수 있듯이 섬유에서의 전파속도가 기지내에서 보다 상대적으로 더 크므로, 두 경우 모두 체적비가 높아짐에 따라 평균 전파속도가 커짐을 볼 수 있다. 약 40% 이상의 체적비에서는 전파속도비의 오르내림이 많아지는데, 이는 실린더 간의 거리가 가까워짐으로 인한 산란파들의 공명효과에 의한 것이다. Kinra⁽²⁴⁾ 등은 입자 복합재료 (particulate composite)에 대한 실험을 통하여 이와 같은 현상을 관찰한 바 있다. 이와 같은 공명효과를 압축파의 경우 가장 두드러진다.

Fig. 6에서는 무차원화 된 비감쇠계수 (specific attenuation coefficient : $4\pi(K_2/K_1)$)의 변화를 주파수와 체적비의 함수로 제시하였다. 복합재료를 구성하는 재료자체에 특정한 감쇠기구가 존재하지 않더라도, 발생하는 다중산란에 의하여 매우 큰 감

Table 1 Material properties comprising boron/aluminum composites

Material	Density (kg/m ³)	Lame constants(GPa)		Wave velocity(m/sec)	
		λ	μ	c_L	c_T
Aluminum	2720	68.6	38.7	7526	3772
Boron	2530	166.7	250	16233	9940

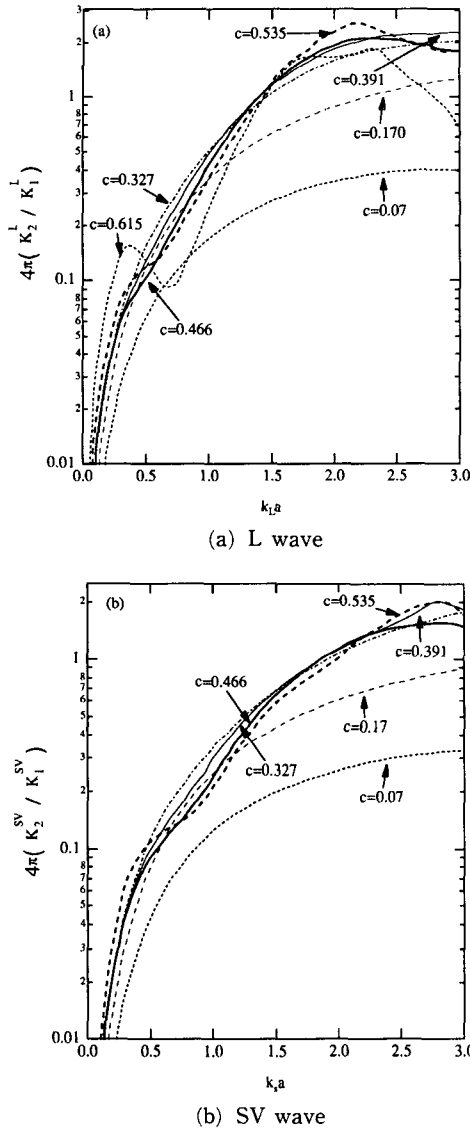


Fig. 6 Specific attenuation coefficient vs. frequency varying the volume fraction, c

최효과를 나타내고 있음을 보여주고 있다. 체적비가 약 50%까지는 일정 주파수에서 체적비가 증가함에 따라 감쇠량은 증가함을 보여주고 있으나, 체적비가 50% 이상에서는 체적비가 증가함에 따라 오히려 감소하는 경향이 있다. 이는 산란에 의한 감쇠효과가 재료의 비균질성에 비례한다고 볼 수 있는데, 50% 이상에서는 기지와 비균질재료(보강재)를 서로 바꾸어 생각하면 50% 이상에서는 기지와 비균질재료(보강재)를 서로 바꾸어 생각하면

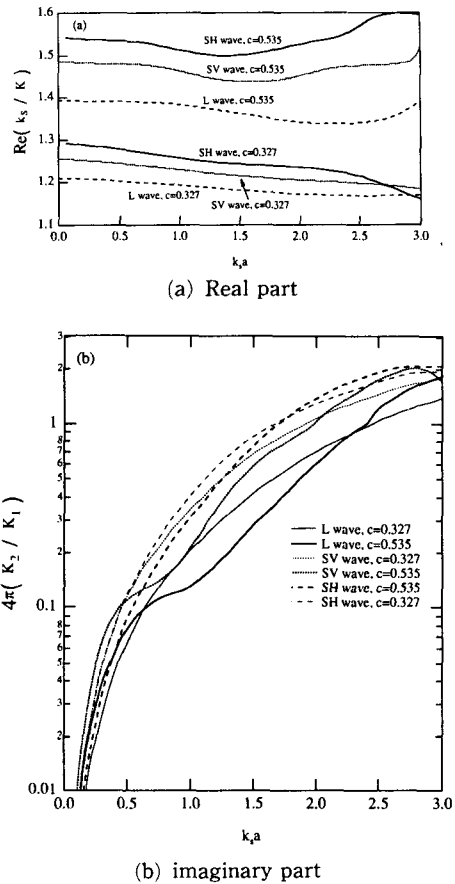
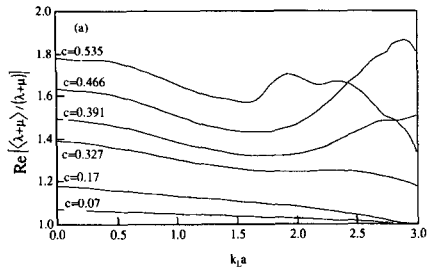


Fig. 7 Comparison of complex wavenumbers for various types of waves and volume fractions

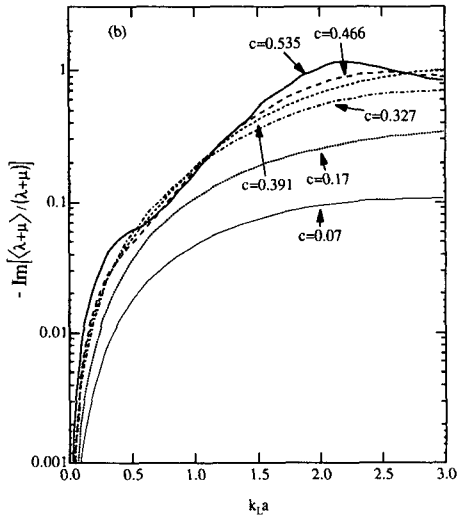
50% 이하의 비균질성으로 볼 수 있으므로, 체적비가 50% 이상에서 오히려 감쇠효과가 감소하게 된다. 즉 이 현상은 높은 체적비에서 쌍분포함수를 포함시킴으로써 나타나는 결과이다. Fig. 7에서는 참고문헌⁽¹⁰⁾의 결과를 참조하여 세 가지 종류의 탄성파에 대하여 기지에 대한 평균전파속도비와 감쇠계수를 비교하였는데, SH, SV, L과 순으로 그 기지에 대한 물성 변화율의 크기가 감소함을 볼 수 있다.

Fig. 8에서는 압축파의 평균 속도비로부터 평면 변형을 체적강성비(plane strain bulk modulus ratio; $\langle \lambda + \mu \rangle / (\lambda + \mu)$)의 실수부와 허수부를 보여주고 있다.

Fig. 9에서는 각각 주파수와 체적비에 따른 횡방향 유효전단강성비(transverse effective shear modulus ratio; $\langle \mu \rangle / \mu$)의 실수부와 허수부의 변화



(a) Real part



(b) imaginary part

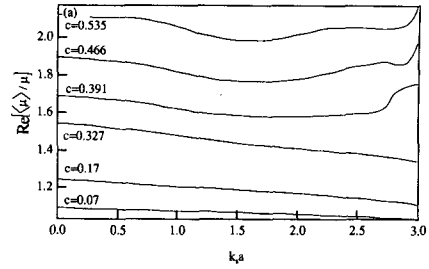
Fig. 8 Effective two-dimensional-bulk modulus vs. frequency varying the volume fraction, c

를 보여주고 있다. Hashin등⁽¹¹⁾은 정적하중 상태에서의 평면 변형을 체적강성, 횡방향 전단강성, 축방향 전단강성 등의 하계(lower bound)에 대한 재료역학적 해석을 통하여

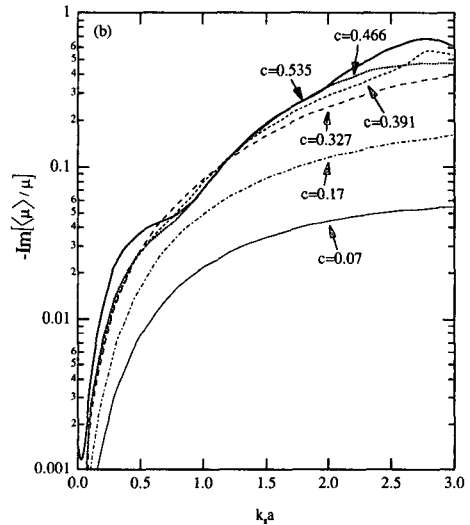
$$\frac{\langle \lambda + \mu \rangle}{\lambda + \mu} = 1 + \frac{\left[\frac{c(\lambda' + \mu' - \lambda - \mu)}{(1-c)(\lambda' + \mu') + c(\lambda + \mu) + \mu} \right]}{\lambda + \mu} \quad (40a)$$

$$\frac{\langle \mu \rangle}{\mu} = 1 + \frac{c}{\left[\frac{\mu}{\mu' - \mu} + (1-c) \frac{\lambda + 3\mu}{2(\lambda + 2\mu)} \right]} \quad (40b)$$

라는 식을 얻었다. Fig. 10에서는 식 (40a), (40b)와 본 논문에서 얻은 유효 강성의 Rayleigh 극한(저주파 극한)에서의 값을 비교하였는데, 두 결과가 정확하게 일치함을 볼 수가 있다.

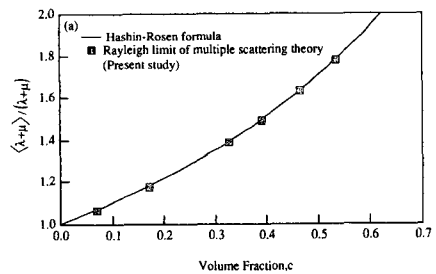


(a) Real part

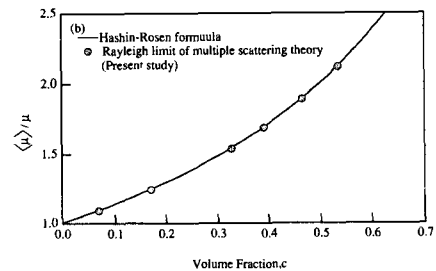


(b) imaginary part

Fig. 9 Effective transverse shear modulus vs. frequency varying the volume fraction, c



(a) Two-dimensional-bulk modulus



(b) transverse shear modulus

Fig. 10 Effective elastic moduli at low frequency limit

4. 결 론

본 연구에서는 섬유강화 복합재료의 동특성을 파악하기 위하여 불규칙하게 분포한 원형 실린더에 의한 다중산란문제를 해석함으로써, 복합재료의 유효전단강성, 감쇠특성, 평균전파속도 등을 기지에 대한 섬유의 체적비와 주파수의 함수로 표현하였다.

얻어진 결과로 부터 다음과 같은 결론을 내릴 수 있다: 첫째, 전파속도비는 체적비가 커지면 따라서 커지나, 주파수의 변화에는 비교적 둔감하다. 둘째, 체적비가 높은 범위에서는 산란파들의 간섭에 의한 공명효과에 의하여 전파속도비의 크기 변화가 많아진다. 셋째, 저주파수에서의 ($ka < 1$) 비감쇠계수는 체적비가 커질수록 커진다. 넷째, 고주파수에서 체적비가 50% 이내에서는 비감쇠계수가 체적비가 증가함에 따라 증가하나, 50% 이상에서는 체적비가의 증가에 따라 오히려 감소하는 경향을 보인다. 다섯째, 동탄성계수와 감쇠계수 모두 기지에 대한 변화율이 SH, SV, L파 순으로 크기가 결정된다. 여섯째, 본 연구에서 얻은 유효 동탄성계수의 저주파 극한값은 정적하중상태에서 구한 것과 일치하므로, 유효동탄성계수의 주파수영역에서의 확장이라 할 수 있다. 일곱째, 고주파수에서와 높은 체적비에서는 실리더간의 쌍분포함수가 복합재료의 감쇠효과에 매우 큰 영향을 준다.

본 연구에서는 기지와 섬유자재에는 감쇠가 없는 금속기지 복합재료를 대상으로 하였으나, 사용된 물성들을 $\lambda = \lambda_1 - i\lambda_2$, $\mu = \mu_1 - i\mu_2$, $k = k_1 + ik_2$ 의 복소수로 치환함으로써 기지나 섬유가 점탄성재료일 수 있는 고분자 중합체(polymer) 복합재료에도 본 연구에서의 이론을 마찬가지로 적용할 수 있는데, 이때 사용되는 물성치는 주파수의 함수로서 실험적으로 구하여야 한다.

참고문헌

- (1) Strutt J. W. S(Lord Rayleigh), 1899, "On the transmission of light through an atmosphere containing small particles in suspension and on the origin of the blue sky," Phil. Mag. 47, pp. 375 ~ 383.
- (2) Foldy, L.L. 1945, "The multile scattering of waves," Phys. Rev. 67, pp. 107~119.
- (3) Lax, M. 1952, "Multiple scattering of waves. II. The effective field in dense system," Phys, Rev. 85, pp. 621~629.
- (4) Waterman P.C. and Truell, R. 1961, "Multiple scattering of waves," J. Math. Phys. 2, 512~537.
- (5) Achenbach J.D. and Hermann, G. 1968, "Dispersion of free harmonic waves in fiber-reinforced composites," AIAA J. 6, pp. 1832 ~ 1836.
- (6) Bose S.K. and Mal, A.K. 1974, "Elastic waves fiber-reinforced composite," J. Mech. Phys. Solids 22. pp. 217~229.
- (7) Varadan, V.K., Ma, Y. and Varadan, V.V., 1986, "Multiple scattering of compressional and shear waves by fiber-reinforced composite materials," J. Acoust. Sco. Am. 80 pp. 333~339.
- (8) 김진연, 이정권, 1992, "Multiple scattering of elastic SH waves by randomly distributed circular cylinders: Characterization of Oynamic Properties of FRC," 한국음향학회지, 11, pp. 22~30.
- (9) Twersky, V. 1962, "On scattering of waves by the infinite grating of circular cylinders," IRE Trans., Antenn. Propag, 10, pp. 737~756.
- (10) Wood, W.W. 1968, "Monte Carlo calculation for hard disks in the isothermal isobaric ensemble," J. Chem. Phys. 48, pp. 415~434.
- (11) Hashin Z. and Rosen B.W., 1964, "The elastic moduli of fiber-reinforced materials," J. Appl. Mech. 31. pp. 223~232.
- (12) McQuarrie, D. 1976, Statistical Mechanics, Harper & Row. N.Y.
- (13) Abramowitz M. and Stegun, I.A. 1972, Handbook of Mathematical Functions, Dover Pub. Inc., N.Y.
- (14) Papoulis, A. 1991, Probability, Random Variables, and Stochastic Process, McGraw-Hill, N. Y.
- (15) Chandler, D. 1987, Introduction to Modern Statistical Mechanics, Oxford University Press, N. Y.
- (16) Kinra V.K. and Anand A. 1982, "Wave propagation in a random particulate composite at long

and short wavelength," Int. J. Solids Structures 18, pp. 367~380.

부 록

(1) 식 (32)의 적분과 Extinction theorem

평면파와 Hankel 함수로 전개된 원통파는 모두 파동방정식을 만족하므로

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{|r_i - r_j| > 2a} e^{ikx_i} H_n(kr_{ij}) e^{in\theta_{ij}} dr_i \\
 &= \frac{1}{k^2 - K^2} \int_{|r_i - r_j| > 2a} \nabla^2 (e^{ikx_i}) H_n(kr_{ij}) e^{in\theta_{ij}} \\
 &\quad - e^{ikx_i} \nabla^2 (H_n(kr_{ij}) e^{in\theta_{ij}}) dr_i \quad (A2.1)
 \end{aligned}$$

Green의 정리에 의하여 선적분으로 바꾸면 다음과 같이 변환된다.

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{k^2 - K^2} \int_{L_{\infty} - L_{2a}} \frac{\partial}{\partial r} (e^{ikx_i}) H_n(kr_{ij}) e^{in\theta_{ij}} \\
 &\quad - e^{ikx_i} \frac{\partial}{\partial r} (H_n(kr_{ij}) e^{in\theta_{ij}}) dl \quad (A2.2)
 \end{aligned}$$

먼저 L_{2a} 에서의 적분만 생각하면,

$$e^{ikx_i} = e^{iKx_j} \sum_s i^s J_s(Kr_{ij}) e^{-is\theta_{ij}}$$

이고, 실린더의 경우

$$\begin{aligned}
 \int_{L_{2a}} F(r, \theta) dl &= 2a \int_0^{2\pi} F(2a, \theta) d\theta, \\
 \int_0^{2\pi} e^{i(n-s)\theta} d\theta &= 2\pi \delta_{ns}
 \end{aligned}$$

이므로, 각각을 (A2)에 대입하면

$$\begin{aligned}
 I_{2a} &= 2\pi i^{-n} e^{iKx_j} [(2Ka) H_n(2ka) J'_n(2Ka) \\
 &\quad - (2ka) H'_n(2Ka) - (2ka) H'_n(2ka) J_n(2Ka)] \quad (A2.3)
 \end{aligned}$$

이 된다.

또한 L_{∞} 에서의 적분의 거동을 알기 위하여 피적분 항의 점근표현을 구하면

$$r_{ij} = |r_i - r_j| \rightarrow |r_i| - \frac{\hat{r}_j \cdot r_j}{|r_j|}, \quad \hat{r}_{ij} \rightarrow |r_i|^{-1}, \quad \theta_{ij} \rightarrow \theta_j$$

이므로

$$\begin{aligned}
 H_n(kr_{ij}) \exp(in\theta_{ij}) &\rightarrow i^{n+1} \exp(-ik\pi \hat{r}_j \cdot r_i) \frac{2}{\pi kr_j} \exp \\
 (ikx_j + in\theta_j)
 \end{aligned}$$

이다. 그러므로

$$\begin{aligned}
 I_{L_{\infty}} &= \frac{i^n}{k^2 - K^2} \int_{L_{\infty}} \exp(-ik\pi \hat{r}_j \cdot r_i + in\theta_j) \left[\frac{\partial}{\partial r_j} (e^{ikr_j}) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2}{\pi kr_j} e^{ikr_j} - e^{ikr_j} \frac{\partial}{\partial r_j} \left(\frac{2}{\pi kr_j} e^{ikr_j} \right) \right] r_j d\theta_j \quad (A2.4)
 \end{aligned}$$

식 (A2.4)는 k 에 관한 파동방정식을 만족한다. 마찬가지로 (A2.2)는 K 에 관한 파동방정식을 만족한다. 이 사실로부터 식 (53), (54)는 두 개의 독립된 파동방정식을 만족하는 항들로 구성되어 있으므로, K, k 에 관한 파동방정식을 만족하는 항들을 각각 분리하여 영으로 놓을 수 있다. 그러므로 무한대에서의 적분과 입사파는 서로 상쇄되게 한다. 이를 Extinction theorem⁽³⁾이라 한다.