

〈論 文〉

## 면외 변형이 가능한 평면 곡선보의 선형 유한요소

김용우\* · 문원주\*\* · 권해성\*\* · 민옥기\*\*\*

(1991년 5월 15일 접수)

### A Linear Out-of-plane-deformable Curved Beam Element

Yong-Woo Kim, Won-Joo Moon, Hae-Sung Kwon and Oak-Key Min

**Key Words :** Spurious Constraint (가성구속), Consistent Constraint (진성구속), Persistent Energy (지속성 에너지), Deciduous Energy (탈락성 에너지), Modified Shape Function (수정 형상함수), Spurious Energy (가성에너지), Stiffness Increase Phenomenon (강성증가현상), Stiffness Locking Phenomenon (강성과잉현상), Shear Spurious Constraint (전단가성구속), Bending Spurious Constraint (굽힘가성구속), Twisting Spurious Constraint (비틀림가성구속),

#### Abstract

A  $C^0$ -continuous isoparametric shape function introduces spurious constraints in each energy mode of out-of-plane-deformable curved beam, which has two persistent energy modes and one deciduous energy mode, while in the in-plane-deformable curved beam certain spurious constraints are introduced only in the two deciduous energy modes. Hence the out-of-plane-deformable curved beam may be a good test model to show the usefulness of the concept of deciduous energy and persistent energy. In this paper, the error-introducing process is explained by using the concept, which shows that the main source of error in displacement due to spurious constraints is the spurious constraint contained in deciduous energy. Additionally, a new out-of-plane-deformable element is presented, which are free from spurious constraints.

### 1. 서 론

유한요소해석 분야의 발전과정을 돌이켜 볼 때, 곡선좌표계를 기준으로 하는 곡선보와 셸 요소의 개발에는 여러 난관들이 특히 많음을 알 수 있다. 비록 이러한 난관들이 여러가지 기법에 의해 해

결되고 있지만, 그에 대한 이론적 미비로 말미암아 학문적으로 정당화되기 어려운 것들이 많다. 그 대표적인 예로 일괄적 감차적분 (URI; uniformly reduced integration)<sup>(1)</sup>, 선별적 감차적분 (SRI; selectively reduced integration)<sup>(1)</sup>, 비적합 가상모드 도입법 (addition of incompatible bubble modes)<sup>(2)</sup> 등을 들 수 있다. 특히, 곡선 좌표계를 기준으로 하는 요소들에서 여러 난점들이 증대되는 것은 여러 변수 (multi-field variables) 들이 연계되기 때문이다. 이로 인해 문제의 복잡성이 심화

\*정회원, 순천대학교 기계공학과

\*\*정회원, 연세대학교 기계공학과 대학원

\*\*\*정회원, 연세대학교 기계공학과

되고 수치해의 오차 발생의 원인에 대한 분석 역시 쉽지 않게 된다. 이와 같은 이유로 앞서 언급한 여러 기법들은 주로 수치적 실험을 통하여 발견되거나 고안된 기법들로서, 이론적으로 합리화하기 어려운 점들을 안고 있다. 그러나 이와 같은 계속적인 연구 및 시도로 인하여, 부분적으로나마 현상적인 원인들이 밝혀지게 되었으며, 최근의 여러 연구의 기초가 되고 있다. 최근까지의 연구에 따르면, 구조 요소 부분에서 수치해가 심각한 오차를 동반하는 주요 이유를 다음과 같이 요약할 수 있다. 첫째로 강체 운동을 제대로 묘사하지 못하기 때문이거나<sup>(3)</sup>, 둘째로 가성 강체운동이 도입되기 때문이거나<sup>(4)</sup>, 셋째로 가성구속이 도입되기 때문이다<sup>(5)</sup>.

Prathap 등의 연구<sup>(5)</sup>에 따르면 아이소파라메트릭  $C^0$ -연속 요소에서 발생하는 심각한 오차의 발생 요인은, 변위함수를 부적절하게 정의하여 가성구속을 유발시킴으로써 수치해의 거동은 원래의 지배 방정식 또는 범함수가 의미하는 바에서 벗어나게 된다는 것이다. 이러한 그의 설명은, 특히 곡선보에서 수치 실험적으로 매우 잘 나타나고 있으며, 그의 이론에 따라 개발된 여러 요소들에 의한 수치해는 가성 구속에 의한 오차를 배제시킬 수 있음을 보여주고 있다. 그러나 그의 이론적 취약점으로 들 수 있는 것은, 지배 미분 방정식과 범함수와의 관계에서 비롯되는 계의 전체적인 거동을 고려하지 않고 있다는 점이다. 즉, 그는 범함수에 포함된 각 에너지 모드별로 독립적으로 고려하여 발생하는 가성구속에 관심을 집중함으로써 변위함수의 가정의 합리성을 각 에너지 모드의 구속 조건의 적합성 여부에서만 찾고 있다는 것이다. 이로써  $C^0$ -연속 조건만을 충족시키는 수치해(즉 Timoshenko 보 이론에 의한 수치해)가  $C^1$ -연속 조건을 만족시켜야 하는 수치해(Euler-Bernoulli 보 이론에 의한 수치해)까지도 정확히 통합적으로 예측할 수 있다는 사실을 설명할 수 없게 된다. 이러한 취약점을 보완하기 위해 제안된 지속성 에너지와 탈락성 에너지의 개념은, 두께 대 특성 길이의 비가 증감함에 따른 에너지 모드의 생성 및 소멸의 순서를 개념적으로 규명함으로써 가성구속으로부터 생성되는 가성에너지의 향방을 설명할 수 있게 된다. 또한 각 에너지 모드들이 가성구속을 포함하지 않는다면, Timoshenko 보 이론으로 Euler-Bernoulli 보를 해석할 수 있으며, Mindlin 판 이론으로 Kirchhoff 판을 해석할 수 있음을 설명할 수 있게 되어, 그의 이론

의 기초를 보완 확장시켜 주고 있다<sup>(6)</sup>.

이러한 개념의 측면에서 볼 때, Prathap이 예로 든 면내 방향으로 변형 가능한 평면 곡선보는 2종의 탈락성 에너지와 1종의 지속성 에너지로 구성된 범함수로 기술되는 구조물로서 무수정 아이소파라메트릭 변위함수를 사용하는 경우 탈락성 에너지에만 가성구속이 발생하게 된다. 반면에, 본 논문에서 취급하고자하는 면의 변형이 가능한 평면 곡선보는 1종의 탈락성 에너지와 2종의 지속성 에너지로 구성된 범함수를 갖고 있으며 무수정 아이소파라메트릭 변위함수를 사용할 경우, 모든 에너지 모드에 가성구속이 발생하게 된다. 이러한 범함수의 형태적 차이는 가성구속에 의한 수치해의 거동에도 서로 다른 양태를 띠게 될 것으로 예측된다. 따라서 본 논문에서는 면의 변형이 가능한 평면 곡선보<sup>(7,8)</sup>에 수정 형상함수를 적용하여 탈락성 및 지속성 에너지에 포함된 가성구속에 의한 수치해의 거동을 고찰함과 동시에, 가성구속에 의한 오차 발생 요인이 제거된, 면의 변형이 가능한 평면 곡선보의 선형 요소를 제안하고자 한다.

## 2. 본론

### 2.1 면의 변형이 가능한 평면 곡선보

길이가  $L$ 인 평면 곡선보(Fig. 1)의 변형 에너지( $\Pi$ )는, 전단변형 에너지( $\Pi_s$ ; transverse shear strain energy), 굽힘변형 에너지( $\Pi_B$ ; out-of-plane bending strain energy) 및 비틀림변형 에너지( $\Pi_T$ ; axial twisting strain energy)로 구성되어 있다<sup>(7,8,9)</sup>. 즉,

$$\Pi = \Pi_s + \Pi_B + \Pi_T \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{여기서 } \Pi_s &= \int_0^L 1/2KGA(-\Psi + V_{,s})^2 dS \\ \Pi_B &= \int_0^L 1/2EI(-\Psi_{,s} + \Phi/R)^2 dS \\ \Pi_T &= \int_0^L 1/2C(\Phi, s + \Psi/R)^2 dS \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

이다. 식(2)에서,  $K$ 는 전단변형 수정 계수(shear correction factor)이고,  $C$ 는 비틀림 강성(torsional rigidity)이고,  $E$ 는 종탄성 계수(Young's modulus)이며,  $G$ 는 횡탄성 계수(shear modulus),  $A$ 는 보의 단면적,  $I$ 는 단면 2차 모멘트(the 2nd moment of area),  $R$ 는 곡선보의 반경으로 본 논문에서는 각 요소마다 일정한 값을 갖는 것으로 가정한다. 그러나 일반적인 응용에서는  $I, A$  및  $R$ 은 요소내

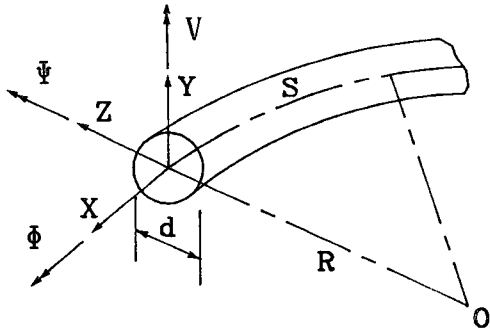


Fig. 1 Out-of-plane deformable curved beam

에서 내삽하여 사용할 수 있다. 또한 식(2)에서의 변위들은 Fig. 1에 보인 바와 같이,  $V$ 는 곡선보의 평면에 수직 방향의 변위이고,  $\Psi$ 는 반경 방향으로의 회전(rotation)이며,  $\Phi$ 는 축방향의 회전을 나타낸다. 식(2)의 각 에너지 모드에 대응하는 일반 변형률(generalized strain)은 다음과 같이 정의한다.

$$\epsilon_s = -\Psi + V_{,s} \quad (3a)$$

$$\epsilon_B = -\Psi_{,s} + \Phi/R \quad (3b)$$

$$\epsilon_T = \Phi_{,s} + \Psi/R \quad (3c)$$

식(3)에서의 변형률에 사용한 하첨자 S,B,T는 차례로 전단변형, 굽힘변형, 비틀림변형을 의미한다. 지금까지의 식들은 모두 보의 중심선을 따라 정의되는 좌표 S에 기준을 둔 식들이다.

### 2.2 가성구속

곡선보를 Fig.2와 같이 길이  $2l$ 의 유한요소로 분할하고, 한 요소만을 분리시켜 고려한다. 곡선보의 연속 변수들(continuous field variables)을 국

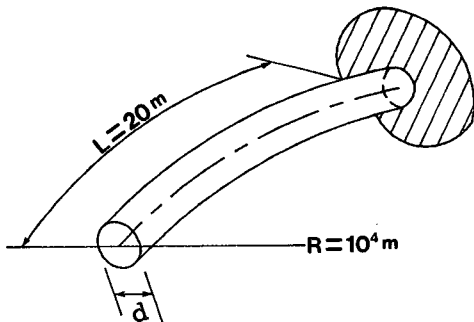


Fig. 2 Nodal variables of a typical linear curved beam element

부 좌표계  $t(-l \leq t \leq l)$ 에서 정의한 무수정 선형 내삽함수를 사용하여, 각 변위들을 내삽하면 다음과 같이 가정된다.

$$\begin{aligned} V &= a_0 + a_1 t \\ \Psi &= b_0 + b_1 t \\ \Phi &= c_0 + c_1 t \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 일반화된 계수들(generalized coordinates)은 중앙 차분식(central difference scheme)를 이용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} a_0 &= (V_1 + V_2)/2 = V|_0 \\ a_1 &= (V_2 - V_1)/(2l) = V_{,t}|_0 \\ b_0 &= (\Psi_1 + \Psi_2)/2 = \Psi|_0 \\ b_1 &= (\Psi_2 - \Psi_1)/(2l) = \Psi_{,t}|_0 \\ c_0 &= (\Phi_1 + \Phi_2)/2 = \Phi|_0 \\ c_1 &= (\Phi_2 - \Phi_1)/(2l) = \Phi_{,t}|_0 \end{aligned} \quad (5)$$

식(5)에서의  $V_i, \Psi_i, \Phi_i (i=1, 2)$ 는 Fig. 2에서 보이는 바와 같은 절점변수이고,  $[\cdot]_0$ 의 하첨자 0는 요소의 중앙을 의미한다.

식(4)의 근사변위(approximate displacements)를 이용하여 식(3)의 변형률에 대한 근사변형률을 구하면,

$$\epsilon_s = (a_1 - b_0) - b_1 t \quad (6a)$$

$$\epsilon_B = -(b_1 - c_0/R) + (c_1/R) t \quad (6b)$$

$$\epsilon_T = (c_1 + b_0/R) + (b_1/R) t \quad (6c)$$

으로 된다. 다시 식(6)을 이용하여 한 요소의 각 변형 에너지를 구하면

$$\begin{aligned} \Pi_s^e &= \int_{-l}^{+l} 1/2 KGA (-\Psi + V_{,t})^2 dt \\ &= KGA l [(a_1 - b_0)^2 + (l^2/3) (b_1)^2] \\ \Pi_B^e &= \int_{-l}^{+l} 1/2 EI (-\Psi_{,t} + \Phi/R)^2 dt \\ &= EI l [(b_1 - c_0/R)^2 + l^2/(3R^2) (c_1)^2] \\ \Pi_T^e &= \int_{-l}^{+l} 1/2 C (\Phi_{,t} + \Psi/R)^2 dt \\ &= Cl [(c_1 + b_0/R)^2 + l^2/(3R^2) (b_1)^2] \end{aligned} \quad (7)$$

과 같이 된다.

외력이 차츰 감소하여 마침내 해중(unloading)되어 곡선보의 전체 에너지가 0이 되면, 식(7)에서 보는 바와 같이 각 에너지들은 제곱꼴로 구성되어 있으므로 이 모든 항들은 0이 되어야 한다. 여기서 이 각항들을 식(5)를 이용하여 표현하면 다음과 같이 된다. 즉,

$$a_1 - b_0 = V_{,t}|_0 - \Psi|_0 \Rightarrow 0 \quad (8a)$$

$$b_1 - c_0/R = \Psi_{,t}|_0 - \Phi|_0/R \Rightarrow 0 \quad (8b)$$

$$c_1 + b_0/R = \Phi_{,t}|_0 - \Psi|_0/R \Rightarrow 0 \quad (8c)$$

$$b_1 = \Psi_{,t}|_0 \Rightarrow 0 \quad (8d)$$

$$c_1 = \Phi_{,t}|_0 \Rightarrow 0 \quad (8e)$$

그런데 변형에너지가 0이 될 때는 변형률의 값이 0이 되도록 하면서 변형에너지가 0이 되어야 한다. 왜냐하면 변형률은 곡선보라는 구조요소의 기하학적 적합조건을 기술하고 있기 때문이다. 만약 이러한 기하학적 적합조건을 만족시키지 못한다면 더 이상 곡선보라고 말할 수 없기 때문이다. 이러한 관점에서 식(8a)~식(8c)는 물리적으로 합당한 진성구속(field-consistent constraint)으로서 각 변형률과 관련된 모든 변위로부터의 기여분이 정확히 표현되고 있는 반면에, 식(8d)와 식(8e)는 각 변형률에 기여하는 어느 한 쪽만의 변위로 표현되어 곡선보의 기하학적 적합조건과는 무관한 구속조건이다. 즉, 물리적으로 불합리한 가상구속(spurious constraint)이다. 이러한 가상구속이 강하게 부과될수록 수치해의 거동은 엄밀해로부터 심각하게 벗어나게 된다<sup>(10)</sup>.

식(7)로부터 한 요소의 에너지 밀도(energy density)를 구하기 위해 요소의 전체 에너지를 요소의 길이  $2l$ 으로 나누면,

$$\begin{aligned} \delta_s &= (KGA/2) [(a_1 - b_0)^2 + (l^2/3)(b_1)^2] \\ \delta_b &= (EI/2) [(b_1 - c_0/R)^2 + l^2/(3R^2)(c_1)^2] \\ \delta_T &= (C/2) [(c_1 + b_0/R)^2 + l^2/(3R^2)(b_1)^2] \end{aligned} \quad (9)$$

여기서  $\delta_s$ ,  $\delta_b$ ,  $\delta_T$ 는 각각 전단변형, 굽힘변형 및 비틀림변형 에너지의 밀도를 의미한다. 위 식들은 다음 절에서 이용한다.

### 2.3 강성증가현상

일반적으로 2.2절에서 언급한 바와 같은 가상구속이 발생하면 강성(stiffness)이 실제보다 증대되어 변위가 실제보다 작게 계산되는 경향이 있다. 이를 강성증가현상이라 부르고, 특히 요소의 갯수가 작을 때 이러한 강성증가현상이 어떤 기하학적 파라메타(예 ; 두께)에 의해 심화될 경우를 강성과잉현상이라 부른다. 이러한 강성증가현상을 설명하기 위해서는 에너지의 생성 및 소멸의 순서를 파악해야 한다. 이러한 필요성에 의해 정의된 개념이 바로 지속성 에너지와 탈락성 에너지이다. 즉 두께가 감소함에 따라서 먼저 사라지는 에너지를 탈락성

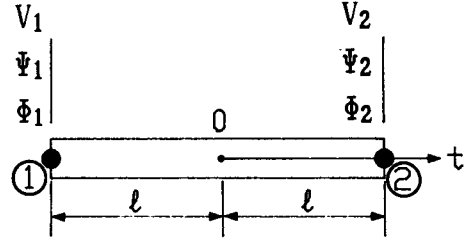


Fig. 3 Nearly-straight cantilevered curved beam model of length(L) with thickness(d) ;  $E=2.1 \times 10^{10}$  N/m<sup>2</sup>,  $\nu=0.3$ ,  $K=8/9$

에너지라하고 외력이 제거됨과 동시에 사라지는 에너지를 지속성 에너지라고 한다. 본 논문에서 취급하고 있는 곡선보에서는, 굽힘변형 에너지와 비틀림변형 에너지가 지속성 에너지가 되고, 전단변형 에너지가 탈락성 에너지에 해당된다<sup>(6)</sup>. 여기서 이에 관하여 물리적인 측면에서 고찰해보면, 어떤 형태의 하중이 작용하던지간에 일단 하중이 작용하면 반드시 굽힘변형과 비틀림변형을 동반하게 되나, 곡선보의 두께가 매우 가는 경우에는 전단변형은 사라지게 된다. 이로부터 지속성 에너지와 탈락성 에너지의 구분이 가능하다.

지속성 및 탈락성 에너지의 개념을 이용하여 강성증가현상에 대한 논의를 명확히 하기 위하여, 좀더 단순화시킨 모델에 적용하여 본다. 이를 위하여 Fig. 3과 같은, 거의 직선보(길이  $L$ )에 가까운 곡선보( $R$ 이 매우 큰 경우의 곡선보)에 대해 고려한다.

(1) 자유단에서 전단력을 받는 가는 직선보

이 경우의 보의 에너지 모드는 굽힘변형 에너지와 전단변형 에너지만 존재한다고 가정하면 보의 변형 에너지는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Pi_{os} &= \int_0^L \frac{EI}{2} (\Psi_{,s})^2 dS \\ &+ \int_0^L \frac{KGA}{2} (-\Psi + V_{,s})^2 dS \end{aligned} \quad (10)$$

위 식(10)을 길이  $2l$ 인 요소들로 분할한 경우의 에너지 밀도를 이용하여 표현하면

$$\begin{aligned} \Pi_{os} &\doteq \int_0^L \frac{EI}{2} (b_1)^2 dS \\ &+ \int_0^L \frac{KGA}{2} \{(a_1 - b_0)^2 + \frac{l^2}{3}(b_1)^2\} dS \end{aligned} \quad (11)$$

이 된다. 이제 보의 두께가 차츰 감소하여 탈락성 에너지(전단변형 에너지)가 지속성 에너지(굽힘변

형 에너지)에 선행하여 사라지는 국면을 가정하면, 식(11)에서 탈락성 에너지의 진성구속은 0이 되고 가성구속만이 남게 된다. 이 국면에서는 탈락성 에너지는 이미 사라져 버렸으므로 외형상 지속성 에너지만이 남아 있어야 한다. 그러나 가성구속에 의한 탈락성 에너지는 여전히 남아 있어 마치 지속성 에너지처럼 거동하게 된다. 즉 결국, 가성구속에 의해 잔류되어 있는 탈락성 에너지는 지속성 에너지에 합류되게 되는 것이다. 따라서 식(11)은 다음과 같이 정리된다.

$$\Pi_{os} \doteq \int_0^L \frac{EI}{2} (b_1)^2 \left\{ 1 + \frac{KGA}{EI} \frac{l^2}{3} \right\} dS \quad (12)$$

따라서 굽힘강성은  $[KGA l^2 / (3EI)]$  배 만큼 증대되게 됨을 알 수 있다.

단면의 형상이 일정한 직선 외팔보의 처짐( $V$ )은 굽힘강성에 반비례하므로 다음과 같은 관계식을 쓸 수 있다.

$$\frac{V_{numeric}}{V_{theory}} = \frac{EI}{EI(1+g_s)} \quad (13)$$

여기서  $g_s = KGA l^2 / (3EI)$ 이다.

가성구속에 의한 변위의 오차를 알아보기 위하여 지름이  $d$ 인 원형 단면의 보에 대하여 다음과 같은 오차측도(error norm)를 정의한다.

$$Es(V) = \text{Log}(g_s) \\ = 2\text{Log}(l/d) + \text{Const.} \quad (14)$$

여기서  $\text{Const.} = \text{Log}\left(\frac{8K}{3(1+\nu)}\right)$ 이고, 하첨자  $S$ 는 전단가성구속을 의미한다.

(2) 자유단에서 비틀림 모멘트를 받는 가는 직선보

이 경우 굽힘 모멘트에 의한 변형 에너지는 없다고 가정하면, 보의 변형 에너지는 다음과 같다.

$$\Pi_{or} = \int_0^L \frac{KGA}{2} (-\psi + V, s)^2 dS \\ + \int_0^L \frac{C}{2} (\psi, s)^2 dS \quad (15)$$

식(15)를 식(9)의 에너지 밀도를 이용하여 표현하면

$$\Pi_{or} \doteq \int_0^L \frac{KGA}{2} \{ (a_1 - b_0)^2 + \frac{l^2}{3} (b_1)^2 \} dS \\ + \int_0^L \frac{C}{2} (c_1)^2 dS \quad (16)$$

이 되고, 이 경우 우변의 첫번째 항의 전단변형 에너지가 탈락성 에너지가 되므로

$$\Pi_{or} \doteq \int_0^L \frac{KGA}{2} (a_1 - b_0)^2 dS + \int_0^L \frac{C}{2} (c_1)^2 \\ + \frac{KGA}{C} \frac{l^2}{3} (b_1)^2 dS \quad (17)$$

과 같이 정리할 수 있다. 식(17)에서  $(KGA/C)$ 는 지름이  $d$ 인 원형 단면에 대하여,

$$\frac{KGA}{C} = \frac{8K}{d^2} \Rightarrow \infty \text{ (as } d \Rightarrow 0) \quad (18)$$

과 같이 되므로 보의 단면적이 작을수록 (즉 가는 보일수록) 전단가성구속에 의한 비틀림강성이 증가됨을 알 수 있다. 그러나  $b_1$ (굽힘에 의한 회전의 일정 변형률)의 값은, 굽힘 모멘트가 0이므로 (즉,  $-\psi, s + \phi/R = 0$ 이므로) 식(5)로부터  $b_1 = \psi, s = \phi/R$ 로 표현된다. 따라서 곡률 반경이 매우 큰 ( $R \Rightarrow \infty$ ) 직선보에서는  $b_1 = 0$ 이므로 전단가성구속에 의한 비틀림강성증가에의 기여는 없게 된다. 따라서 거의 직선보의 경우 비틀림 모멘트 값에 비해 매우 작으나 굽힘 모멘트가 존재하나, 거의 무시할 수 있는 값이므로 전단가성구속에 의한 비틀림강성의 증가는 미미할 것이다.

단면의 형상이 일정한 직선 외팔보의 자유단에서 비틀림각( $\phi$ )은 비틀림 모멘트에 비례하므로 지름이  $d$ 인 원형 단면의 보에 대하여 다음과 같은 관계식을 쓸 수 있다.

$$\frac{\phi_{numeric}}{\phi_{theory}} = \frac{C}{C(1+g_\phi)} \quad (19)$$

위 식에서  $g_\phi = \frac{KGA l^2 (b_1)^2}{3C(c_1)^2} = \frac{8K l^2 (b_1)^2}{3d^2 (c_1)^2}$ 이다.

가성구속에 의한 변위의 오차를 알아보기 위해 다음과 같은 오차측도(error norm)를 정의한다.

$$Es(\phi) = \text{Log}(g_\phi) \quad (20)$$

여기서 하첨자  $S$ 는 전단가성구속을 의미한다.

(3) 곡률 반경이 유한한 곡선보

이 경우의 전체변형에너지( $\Pi$ )는 식(1), 식(2) 및 식(9)를 사용하여 다음과 같이 표현된다.

$$\Pi = \Pi_s + \Pi_B + \Pi_T \quad (1)$$

여기서

$$\Pi_s \doteq \int_0^L 1/2 KGA \{ (a_1 - b_0)^2 + \frac{l^2}{3} (b_1)^2 \} dS \quad (21)$$

$$\Pi_B \doteq \int_0^L 1/2EI \{ (b_1 - c_0/R)^2 + l^2 / (3R^2) (c_1)^2 \}^2 dS \quad (22)$$

$$\Pi_T \doteq \int_0^L 1/2C \{ (c_1 + b_0/R)^2 + l^2 / (3R^2) (b_1)^2 \}^2 dS \quad (23)$$

이다. 식(21)~식(23)에서 밀줄친 부분은 2.2 절에서 설명한 바와 같이 가성구속에 의해 발생된 가성 에너지들이다.

이 경우 탈락성 에너지와 지속성 에너지의 개념을 사용하면, 탈락성 에너지( $\Pi_s$ )의 가성 에너지는 지속성 에너지( $\Pi_B$ 와  $\Pi_T$ )에 합류되고(여기서  $\Pi_s$ 의 가성에너지는  $\alpha^2 : \beta^2$ 의 비로 나누어져  $\Pi_B$ 와  $\Pi_T$ 에 합류된다고 가정한다. 그러므로  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ 이다.), 지속성 에너지의 가성 에너지들은 각각의 지속성 에너지에 그대로 잔류된다. 따라서 식(21)~식(23)은 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\Pi_s \doteq \int_0^L 1/2KGA (a_1 - b_0)^2 dS \quad (24)$$

$$\Pi_B \doteq \int_0^L 1/2EI (b_1 - c_0/R)^2 \{ 1 + f_{PB} + g_{S1} \} dS \quad (25)$$

$$\Pi_T \doteq \int_0^L 1/2C (c_1 + b_0/R)^2 \{ 1 + f_{PT} + g_{S2} \} dS \quad (26)$$

위 식(25)와 식(26)에서  $f_{PB}$ 와  $f_{PT}$ 는 지속성 에너지의 가성에너지 항이며,  $g_{S1}$ 와  $g_{S2}$ 는 탈락성 에너지로부터 합류된 가성에너지로서 원형 단면의 곡선 보에 대하여 다음과 같다.

$$f_{PB} = \frac{l^2 (c_1)^2}{3R^2 (b_1 - c_0/R)^2} \quad (27)$$

$$f_{PT} = \frac{l^2 (b_1)^2}{3R^2 (c_1 + b_0/R)^2} \quad (28)$$

$$g_{S1} = \frac{KGA \alpha^2 l^2 (b_1)^2}{3EI (b_1 - c_0/R)^2} = \frac{8K \alpha^2 l^2 (b_1)^2}{3(1+\nu) d^2 (b_1 - c_0/R)^2} \quad (29)$$

$$g_{S2} = \frac{KGA \beta^2 l^2 (b_1)^2}{3C (c_1 + b_0/R)^2} = \frac{8K \beta^2 l^2 (b_1)^2}{3d^2 (c_1 + b_0/R)^2} \quad (30)$$

그러므로 식(25)와 식(26)으로부터 탈락성 에너지의 가성에너지는 굽힘강성 및 비틀림강성을 동시에 증대시키며, 지속성 에너지의 가성에너지 중 굽힘 가성에너지는 굽힘강성을 그리고 비틀림가성에너지는 비틀림강성을 각각 증가시킨다. 이 가성에너지들은 식(27)~식(30)에서 보는 바와 같이, 공히 요소의 크기와 곡률 반경에 의존한다. 그러나  $g_{S1}$ 과  $g_{S2}$ 는 보의 두께에도 의존하는 반면,  $f_{PB}$ 와  $f_{PT}$ 는 두께에 무관하다. 따라서 두께가 감소함에 따라서

지속성 에너지의 가성에너지로 인한 강성증가의 변화는 없는 반면, 탈락성 에너지의 가성에너지에 의한 강성증가가 심각할 것으로 예측된다.

그러나 곡률 반경은 두께나 요소의 크기와는 달리 식(3)에서 보는 바와 같이 변형률의 형태에 직접 관계되므로 곡률 반경의 증감이 곧 바로 강성의 증감과 연관시켜 설명하기는 곤란하다. 그러므로 본 논문에서는 요소의 크기와 두께에 관련한 강성 증가에 관한 설명에 국한시킨다.

## 2.4 선형 수정 형상함수

수치해에 가성구속에 의한 오차가 발생하지 않게 하려면, 가성구속이 유발되지 않도록 변위함수를 가정해야 한다. 이를 위해서는 일반화된 변형률에 포함된 변위들은, 공간 좌표에 관한 미분 연산수에 동일한 차수의 다항식이 되도록 가정되어야 한다. 따라서 선형 요소에서는, 전단변형률에 대하여,

$$\begin{aligned} V_s &= a_0 + a_1 t \\ \psi_s &= \bar{b}_0 \end{aligned} \quad (31)$$

굽힘변형률에 대하여,

$$\begin{aligned} \psi_B &= b_0 + b_1 t \\ \phi_B &= \bar{c}_0 \end{aligned} \quad (32)$$

비틀림변형률에 대하여,

$$\begin{aligned} \phi_T &= c_0 + c_1 t \\ \psi_T &= \bar{b}_0 \end{aligned} \quad (33)$$

와 같이 가정되어야 한다. 여기서  $\psi_s$ ,  $\phi_B$  및  $\psi_T$ 는 가성구속을 제거하기 위해 전통적으로 사용하는 변위함수를 수정한 수정 변위함수이다.

변위함수를 위와 같이 가정할 경우, 이에 해당하는 형상함수는,

$V_s$ ,  $\psi_B$ ,  $\phi_T$ 에 대하여,

$$\begin{aligned} N_1 &= (1 - \xi) / 2 \\ N_2 &= (1 + \xi) / 2 \end{aligned} \quad (34)$$

와 같이 주어지며,  $\psi_s$ ,  $\phi_B$ ,  $\psi_T$ 에 대하여는 다음과 같은 형태의 수정 형상함수를 갖게 된다.

$$\tilde{N}_i = (e_0)_i, \quad i=1, 2 \quad (35)$$

여기서 하첨자  $i$ 는 절점 번호이고  $(e_0)_i$ 는 상수이다.

그러나  $V_s$ ,  $\psi_B$ ,  $\phi_T$ 의 자유도와  $\psi_s$ ,  $\phi_B$ ,  $\psi_T$ 의 자유도는 상이하므로, 이를 일치시켜 주기 위하여, 다음과 같이 최소 자승법을 이용하여 수정 형상함

수를 무수정 형상 함수에 근사시킨다.

$$\left. \begin{aligned} P_i &= \int_{-1}^{+1} (N_i - \tilde{N}_i)^2 d\xi \\ \frac{\partial P_i}{\partial (e_0)_i} &= 0, \end{aligned} \right\} \text{for } i=1,2 \quad (36)$$

위 식(36)으로부터 다음의 수정 형상함수를 얻는다.

$$\tilde{N}_1 = \tilde{N}_2 = 1/2 \quad (37)$$

### 3. 수치 실험 및 검토

#### 3.1 직선보에 가까운 곡선보

본 절에서는 탈락성 에너지 및 지속성 에너지에 포함된 가성구속에 의한 오차의 경향을 살펴보기 위하여, 2.3절에서 언급한 모델들(Fig 3)에 대하여 가성구속에 의한 강성증가의 오차측도를 사용하여 수치해(변위)의 거동을 검토한다. 즉, 강성 증가는 2.3절에서 설명한 바와 같이 요소의 길이(2l)와 보의 두께(d)에 의존하므로; 첫째 보의 두께를 d=0.1m로 고정시켰을 때 보의 요소분할 수(Nel)를 증가시키면(Nel=1,2,3,4,5 or l=10, 5, 10/3, 2.5, 2.0, 단위:m)에 따른 오차측도와, 둘째 요소분할 수를 2개로 고정시켰을 때 두께를 변화시키면(d=0.01, 0.032, 0.1, 0.32, 1.0, 단위:m)에 따른 오차측도를 자유단에서 구하여 수치해의 거동을 검토한다.

(1) 자유단에서 전단력을 받는, 직선보에 가까운 외팔 곡선보

이 경우의 2.3절의 (1)항에서 비틀림변형 에너지는 0이라고 가정하였으므로 나머지 두 에너지 모드에 포함된 가성구속에 의한 강성증가의 정도를 검토한다. 이를 위하여,

- ① 가성구속이 전혀 존재하지 않는 경우(MM)
- ② 굽힘 가성구속만이 존재할 경우(MC)
- ③ 전단 가성구속만이 존재할 경우(CM)
- ④ 굽힘 가성구속과 전단 가성구속이 존재하는 경우(CC)

와 같은 각 경우에 대하여 수치 실험을 실시하여, 그 결과를 Fig. 4와 Fig. 5에 도시한다. 위의 각 경우는 각 에너지 모드에 수정 형상함수 또는 무수정 형상함수를 배합 사용함으로써 수치 실험이 가능하게 된다. 즉 ③과 같이 전단가성구속만이 존재하게 하기 위해서는, 전단변형 에너지에만 무수정 형상함

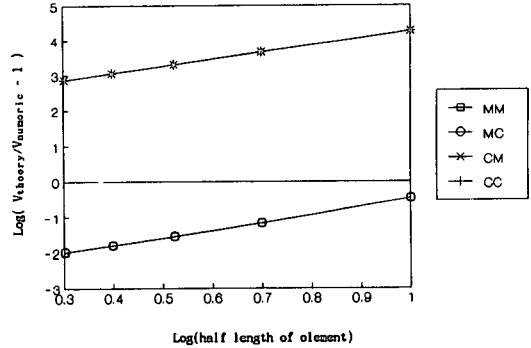


Fig. 4 Error norms with respect to half-element-length of the nearly-straight beam subjected to shear force at the free end

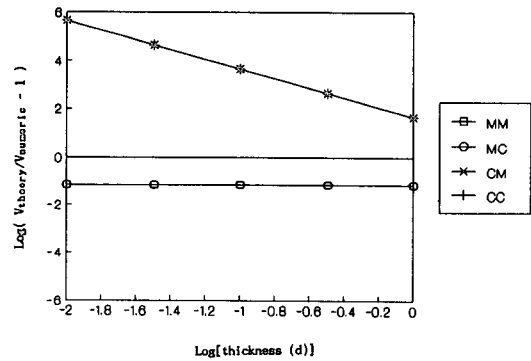


Fig. 5 Error norms with respect to thickness of the nearly-straight beam subjected to shear force at the free end

수를 사용하고 나머지 에너지 모드에 대해서는 수정 형상함수를 사용하면 된다.

위의 Fig. 4와 Fig. 5에서 보는 바와 같이, CC과 CM 경우의 오차측도가 거의 같고 MM, MC 경우의 오차측도가 거의 같은 것으로 보아서, 탈락성 에너지(전단변형 에너지)에 포함된 가성구속(전단 가성구속)에 의한 오차가, 지속성 에너지에 포함된 가성구속(굽힘가성구속)에 의한 오차보다 훨씬 크다. 따라서 이 경우의 강성과잉 현상은 주로 전단 가성구속에 의해 지배됨을 알 수 있다.

또한 CM의 오차측도의 기울기는, 식(13)에서 예측한 바와 같이 요소의 길이(2l)에 관하여 약 2가 됨을, 그리고 보의 두께(d)에 관하여 약 -2가 됨을 확인 할 수 있다.

(2) 자유단에서 비틀림 모멘트를 받는, 직선보에 가까운 외팔 곡선보

**Table 1** Twisting angle at the free end when half-element-length of the curved beam varies, which is subjected to twisting moment at the free end (unit : rad)

Nel	<i>l</i>	MMM	MMC	MCM	CMM	CCC
1	10.000	-0.25222E-3	-0.25222E-3	-0.25222E-3	-0.25222E-3	-0.25222E-3
2	5.0000	-0.25222E-3	-0.25222E-3	-0.25222E-3	-0.25222E-3	-0.25222E-3
3	3.3333	-0.25222E-3	-0.25222E-3	-0.25222E-3	-0.25222E-3	-0.25222E-3
4	2.5000	-0.25222E-3	-0.25222E-3	-0.25222E-3	-0.25222E-3	-0.25222E-3
5	2.0000	-0.25222E-3	-0.25222E-3	-0.25222E-3	-0.25222E-3	-0.25222E-3

**Table 2** Twisting angle at the free end when thickness of the curved beam varies, which is subjected to twisting moment at the free end (unit : rad)

<i>d</i>	Theory <sup>(9)</sup>	MMM	MMC	MCM	CMM	CCC
0.010	-0.25222E+1	-0.25222E+1	-0.25222E+1	-0.25222E+1	-0.25222E+1	-0.25222E+1
0.032	-0.24054E-1	-0.24054E-1	-0.24054E-1	-0.24054E-1	-0.24054E-1	-0.24054E-1
0.100	-0.25222E-3	-0.25222E-3	-0.25222E-3	-0.25222E-3	-0.25222E-3	-0.25222E-3
0.320	-0.24054E-5	-0.24054E-5	-0.24054E-5	-0.24054E-5	-0.24054E-5	-0.24054E-5
1.000	-0.25222E-7	-0.25222E-7	-0.25222E-7	-0.25222E-7	-0.25222E-7	-0.25222E-7

이 경우 2.3절의 (2)항에서 굽힘모멘트는 0이라고 가정하였으므로 나머지 두 에너지 모드(전단변형 에너지와 비틀림변형 에너지)에 포함된 가성구속에 의한 강성증가의 정도를 검토하기 위해,

- ① 가성구속이 전혀 존재하지 않는 경우(MM)
- ② 비틀림 가성구속만이 존재할 경우(MC)
- ③ 전단 가성구속만이 존재할 경우(CM)
- ④ 비틀림 가성구속과 전단 가성구속이 존재하는 경우(CC)

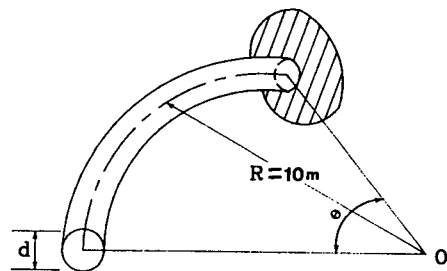
와 같은 각 경우에 대하여 *l* 및 *d*의 변화에 따른 수치 실험을 실시하여, 그 결과를 Table 1과 Table 2에 정리한다. 위의 각 경우는 앞에서와 동일한 방법으로 수정 형상함수 또는 무수정 형상함수를 배합 사용함으로써 수치 실험이 가능하다.

이 경우, Table 1과 Table 2에서 보는 바와 같이 가성구속에 의한 오차는 거의 없다고 볼 수 있다. 이는 2.3절에서 예측한 바와 같이 곡률 반경이 매우 커서 전단 가성구속에 의한 강성증가는 무시할 정도로 매우 작기 때문이다.

**3.2 곡률 반경이 유한한 곡선보**

2.3절의 (1)항과 (2)항에서 정의한 오차측도는 2종의 에너지가 존재할 경우(직선보)에 대하여 정의하였으나, 곡선보와 같이 3종의 에너지가 존재할

경우에 대하여도 오차측도를 동일한 방식으로 정의하면 그 의미와 일반성을 잃지 않는다. 왜냐하면, 에너지 모드의 개수에 관계없이 오차측도는 특정 가성구속에 의한 특정한 강성증가의 정도를 나타내기 때문이다. 따라서 본 절에서는 유한한 곡률 반경을 갖는 곡선보에 대하여 강성증가현상을 고려하기 위하여 자유단에서 전단력을 받는 외팔 곡선보(Fig. 6)에 대해 3.1절에서와 같이; 첫째 일정 두께(*d*=0.1m)에 대하여 요소분할 수(Nel)를 증가시킴(Nel=1,2,3,4,5)에 따른 수치해의 거동과, 둘째 일정 요소분할 수(Nel=4)로 모델링한 곡선보의 두께를 변화시킴(*d*=0.01, 0.032, 0.1, 0.32,



**Fig. 6** Cantilevered curved beam model with thickness(*d*) and opening angle ( $\theta = \pi/2$ ) ;  $E = 2.1 \times 10^{10} \text{N/m}^2$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $K = 8/9$



1.0, 단위m)에 따른 수치해의 거동을 검토한다. 이를 위한 수치해는 자유단에서의 변위를 사용한다.

각 에너지 모드에 포함된 가성구속에 의한 강성 증가의 정도를 검토하기 위해,

- ① 가성구속이 전혀 존재하지 않는 경우(MMM)
- ② 비틀림 가성구속만이 존재할 경우(MMC)
- ③ 굽힘 가성구속만 존재할 경우(MCM)
- ④ 전단 가성구속만이 존재할 경우(CMM)
- ⑤ 모든 에너지 모드에 가성구속들이 존재하는 경우(CCC)

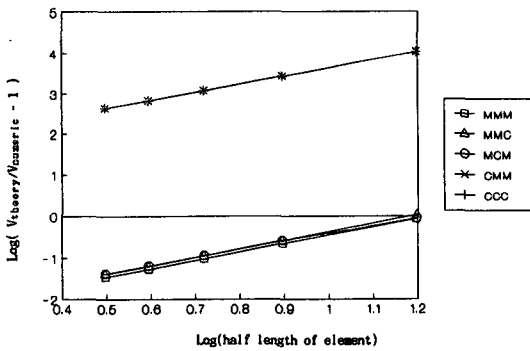
와 같은 각 경우에 대하여 수치 실험을 실시하여, 그 결과를 Fig. 7과 Fig. 8에 도시한다. 위의 각 경우도 앞절에서와 동일한 방법으로 수정 형상함수 또는 무수정 형상함수를 배합 사용함으로써 수치 실험이 가능하다.

즉, 탈락성 에너지(전단변형 에너지)에만 가성구속이 존재하게 하려면(CMM의 경우) 굽힘변형률

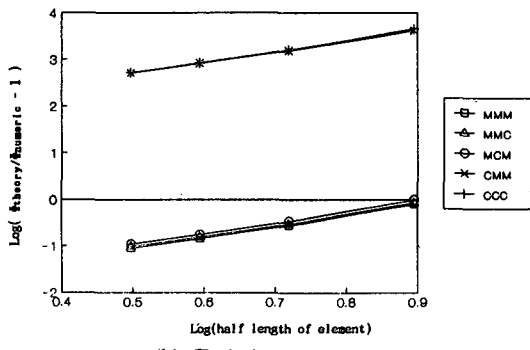
의  $\phi_B$ 와 비틀림변형률의  $\psi_T$ 에 대해 수정 형상함수를 적용하고 나머지 변위들에 대해서는 무수정 형상함수를 사용하면 된다. 이 경우의 강성증가는 2.3절에서와 같은 방법으로 설명할 수 있다. 즉, CMM의 요소 배합을 사용할 경우의 전체 에너지  $\Pi_{CMM}$ 는 식(1), 식(2), 식(9) 및 식(31)~식(33)의 수정 변위함수를 사용하여

$$\begin{aligned} \Pi_{CMM} = & \int_0^L (KGA/2) \{ (a_1 - b_0)^2 + (l^2/3) (b_1) \} dS \\ & + \int_0^L (EI/2) (b_1 - \bar{c}_0/R)^2 dS \\ & + \int_0^L (C/2) (c_1 + b_0/R)^2 dS \end{aligned} \quad (38)$$

로 표현되며, 위 식(38)의 밀줄친 탈락성 에너지의 가성에너지는 지속성 에너지(굽힘변형 에너지 및 비틀림변형 에너지)에 합류하게 되어 최종적으로 다음과 같이 표현된다. 이 때 식(38)의 밀줄친 부분의 가성에너지가 굽힘변형 에너지와 비틀림변형

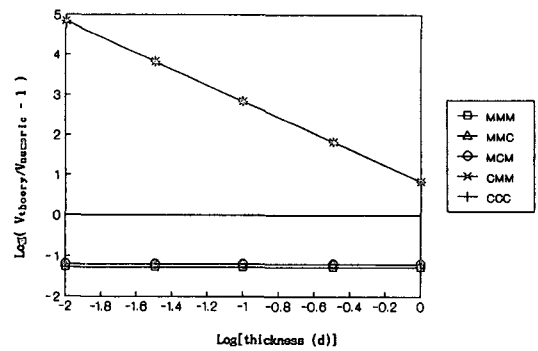


(a) Deflection (V)

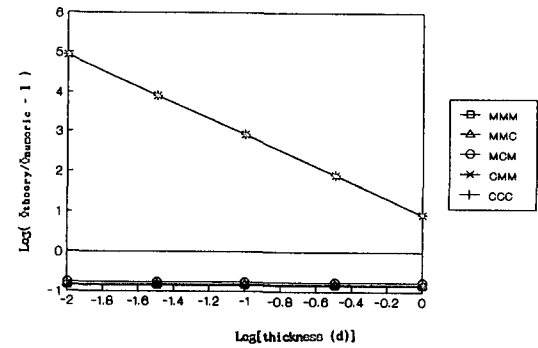


(b) Twisting angle ( $\phi$ )

Fig. 7 Error norms with respect to half-element-length of the curved beam subjected to shear force at the free end



(a) Deflection (V)



(b) Twisting angle ( $\phi$ )

Fig. 8 Error norms with respect to thickness of the curved beam subjected to shear force at the free end

에너지에 각각  $\alpha^2 : \beta^2$ 의 비율로 나누어져 합류된다 ( $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ )고 가정하였다.

$$\begin{aligned} \Pi_{CMM} = & \int_0^L (KGA/2) (a_1 - b_0)^2 dS \\ & + \int_0^L (EI/2) (b_1 - \bar{c}_0/R)^2 \{1 + \bar{g}_{s1}\} dS \\ & + \int_0^L (C/2) (c_1 + \bar{b}_0/R)^2 \{1 + \bar{g}_{s2}\} dS \quad (39) \end{aligned}$$

여기서  $\bar{g}_{s1}$ 과  $\bar{g}_{s2}$ 는 각각 다음과 같다.

$$\bar{g}_{s1} = \frac{KGA\alpha^2 I^2 (b_1)^2}{3EI(b_1 - \bar{c}_0/R)^2} = \frac{8K\alpha^2 I^2 (b_1)^2}{3(1+\nu)d^2(b_1 - \bar{c}_0/R)^2} \quad (40)$$

$$\bar{g}_{s2} = \frac{KGA\beta^2 I^2 (b_1)^2}{3C(c_1 + \bar{b}_0/R)^2} = \frac{8K\beta^2 I^2 (b_1)^2}{3d^2(c_1 + \bar{b}_0/R)^2} \quad (41)$$

따라서 굽힘강성은  $\bar{g}_{s1}$ 배 만큼, 그리고 비틀림강성은  $\bar{g}_{s2}$ 배 만큼 증가되고 이에 따라 굽힘강성에 의한 처짐과 비틀림 강성에 의한 비틀림각은 감소하게 된다. 또한 지속성 에너지에 가성구속이 존재하는 경우(MCM 및 MMC의 경우)의 강성증가도 같은 방식으로 설명할 수 있다. 즉, MCM 및 MMC의 요소 배합을 사용할 경우의 각각의 전체에너지  $\Pi_{MCM}$ 과  $\Pi_{MMC}$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Pi_{MCM} = & \int_0^L (KGA/2) (a_1 - \bar{b}_0)^2 dS \\ & + \int_0^L (EI/2) (b_1 - c_0/R)^2 \{1 + f_{PB}\} dS \\ & + \int_0^L (C/2) (c_1 + \bar{b}_0/R)^2 dS \quad (42) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_{MMC} = & \int_0^L (KGA/2) (a_1 - \bar{b}_0)^2 dS \\ & + \int_0^L (EI/2) (b_1 - \bar{c}_0/R)^2 dS \\ & + \int_0^L (C/2) (c_1 + b_0/R)^2 \{1 + f_{PT}\} dS \quad (43) \end{aligned}$$

위 식(42)와 식(43)에서 밑줄친 부분들은 각각 굽힘가성구속과 비틀림가성구속에 의한 가성에너지로서 보의 두께가 감소하여 탈락성 에너지가 사라진 다하여도 지속성 에너지의 일부로 각각의 지속성 에너지에 계속 잔류하게 된다. 따라서 굽힘가성에너지는 굽힘강성을 증가시키고 비틀림가성에너지는 비틀림강성을 증가시킨다. 이 지속성 에너지의 가성에너지들은 식(27)과 식(28)에서 보는 바와 같이 두께에는 무관하다.

2.3절과 본 절의 논의와 Fig. 7과 Fig. 8의 수치 실험의 결과를 비교 검토하면 다음과 같은 사실들을 확인할 수 있다.

첫째, 면의 하중을 받는 곡선보의 강성 과잉현상은 탈락성 에너지(전단변형 에너지)의 가성에너지에 의해 발생한다.

둘째, 지속성 에너지의 가성에너지(굽힘 및 비틀림 가성에너지)에 의한 강성증가는 무시할 수 있을 정도로 작다. 이는 지속성 에너지의 가성에너지가 보의 두께 변화에 무관하기 때문이다. 이에 따라 지속성 에너지의 가성에너지에 의한 강성증가 중, 요소의 크기 변화에 따른 강성증가는 통상의 분할 오차(discretization error)에 의한 오차의 크기와 같다.

따라서 지속성 에너지 및 탈락성 에너지 개념은 강성증가현상을 설명하는 데 매우 유용하며 유효하다는 사실을 확인할 수 있다.

#### 4. 결 론

면의 변형이 가능한 곡선보의 선형 유한요소에 관한 본 논문의 결론을 요약하면 다음과 같다.

(1) 가성구속에 의한 수치해의 오차를 제거하기 위하여 수정 형상함수를 사용함으로써 보다 정확한 수치해를 얻을 수 있다.

(2) 탈락성 및 지속성 에너지의 개념은 강성증가 및 강성과잉현상을 설명하는 데 유용할 뿐만 아니라 가성구속에 의한 오차 발생의 정도를 예측하는데 기준이 될 수 있다.

(3) 가성구속에 의한 변위의 오차는, 지속성 에너지에 포함된 가성구속 보다는 주로 탈락성 에너지에 포함된 가성구속에 의해 심각한 영향을 받는다.

#### 참고문헌

- (1) Stolarski, H. and Belytschko, T. 1982, "Membrane locking and reduced integration for curved elements," *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol. 49, pp. 172~176.
- (2) Jean Louis Batoz, Klaus-Jürgen and Lee-Wing Ho, 1980, "A study of three-node triangular plate bending elements," *Int.J.Num.Meth.Engng.*, Vol. 15, pp. 1771~1812.
- (3) Dawe, D.J., 1974, "Numerical studies using circular arch finite elements," *Computers & Structures*, Vol.4, pp. 559~580.

- (4) Demetres Briassoulis, 1988, "The zero energy modes problem of the nine-node Lagrangian degenerated shell element," *Computer & Structures* Vol.30, No.6, pp. 1389~1402.
- (5) Prathap, G. and Babu, C.R., 1986, "An isoparametric quadratic thick curved beam element," *Int. J.Num.Meth.Engng*, Vol.23, pp. 1583~1600.
- (6) Min Oak Key and Kim Yong Woo, 1990, "A consideration of energy modes in isoparametric beam element," *Yonsei Nonchong*, Yonsei University, Vol. 26, pp. 315~331.
- (7) James Kirkhope, 1976, "Out-of-plane vibration of thick circular ring," *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol.102, No. EM2.
- (8) Júlio, M., Montalvao, E., Silva and António P. V. Urgueira, 1988, "Out-of-plane dynamic response of curved beams-An analytical model," *International Journal of Solids and Structures*, Vol.24, No.3, pp. 271~284.
- (9) Jerome, J. Connor, 1976, *Analysis of Structural Member Systems*, The Ronald Press Company, New York.
- (10) Oak-Key Min and Yong-Woo Kim, 1991, "The error due to spurious coefficients in isoparametric quadratic finite element analysis of curved beam subjected to out-of-plane loads," *Yonsei Nonchong*, Yonsei University, Vol.17, pp. 231~253