

곡면의 특성을 나타내는 특성뿔들의 정의 및 상호관계



김 덕 수

삼성종합기술원 그룹 CAE센터

● 1960년생
● 산업공학을 전공하였으며, Geometric Modeling, Computational Geometry Machining S/W 개발에 관심이 있다.

1. 머리 말

공간상에 한 곡면(이하, 다른 언급이 없는 한 곡면이라 함은 한 곡면 조각, 즉 patch를 뜻한다)이 있을 때, 만일 그 곡면상의 모든 점이 다른 점에 의해 가려지지 않고 한 방향에서 다 보이고, 공구의 지름이 충분히 작다면, 그 곡면은 같은 방향으로부터 NC밀링 작업으로 가공할 수 있다.^(6,7,9) 만일 그 같은 방향을 주어진 곡면에 관하여 모두 구할 수 있고, 그 방향 벡터들을 좌표축 상의 원점에 가져다 놓을 수 있다면, 그 방향 벡터들은 가시 뿔(visibility cone)이라 불리는 하나의 뿔을 형성하게 된다. 그림 1의 (a)는 한 곡면에 대한 두 개의 공구방향을 보여주고 있으며, 그림 1의 (b)는 그 곡면의 모든 가능한 가시방향의 집합인 가시뿔을 보여준다. 그림 1의 (b)에서 가시뿔과 중심이 원점에 있는 단위 구의 표면과의 공통부분은 가시맵이라 불리는데 가시뿔과 가시맵은 방향성에 있어 같은 정보를 갖는다. 가시뿔을 체계적으로 구하기 위해 접선 뿔(tangent cone)과 법선뿔(normal cone)이라 불리는 두 가지 종류의 다른 뿔들이 필요하게 된다.

직관적인 차원에서 설명하자면, 접선뿔은 주어진 곡면 상의 모든 점에서 각 매개변수에 관

해 구한 접선 벡터들을 좌표축상의 원점으로 이동시켜서 형성되는 뿔이고, 법선뿔은 주어진 곡면 상의 모든 점에서 구한 법선 벡터들을 좌표축상의 원점으로 이동시켜서 형성되는 뿔이다. 일반적으로 곡면은 두개의 매개변수 u 와 v 에 의해 정의되므로 하나의 곡면에는 두개의 법선뿔이 있다. 그림 2의 (a)는 한개의 곡면과 그 곡면상의 한 점에서의 두 접선 벡터와 법선 벡터를 보여주고, 그림 2의 (b), (c)와 (d)는 두 접선뿔과 법선뿔 그리고 대응하는 가시뿔을 보여준다.

이 세 가지 뿔들은 여러 가지 기하학적인 문제를 해결하는데 있어서 편리한 계산 기하학적 도구로 사용될 수 있다. 접선뿔은 두 곡면간의 교선이 꼬이는지(다시 말해서, 교선이 loop을 형성하는지)를 검증하거나,⁽¹³⁾ 주어진 곡면위에서 법선 벡터를 구할 수 있나 없나를 검증하는데 쓰일 수 있다.^(7,8) 법선뿔은 주어진 곡면이 실루엣 곡선을 갖는지를 검증하는데 쓰일 수 있고,⁽⁷⁾ 가시뿔은 앞에서 설명한 바와 같이 곡면의 가공성을 검증하는데 쓰일 수 있다.^(6,7,9)

앞에 설명한 특성뿔들은 임의의 곡면방정식으로 표현되는 곡면에 대해 정의할 수 있으나, 여기서는 아래와 같이 정의되는 베지에(Bezier) 곡면에 대해 유도하겠다.

차수가 $(m \times n)$ 인 베지에 곡면은 다음 식과

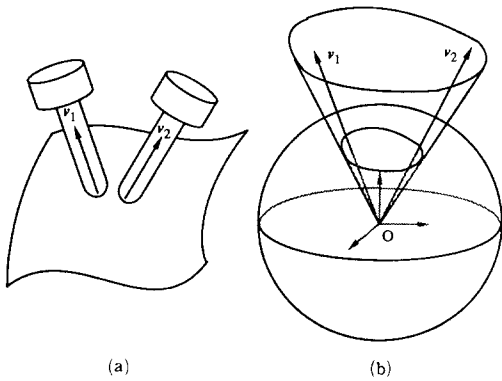


그림 1 공구방향(a)과 가시뿔(b)

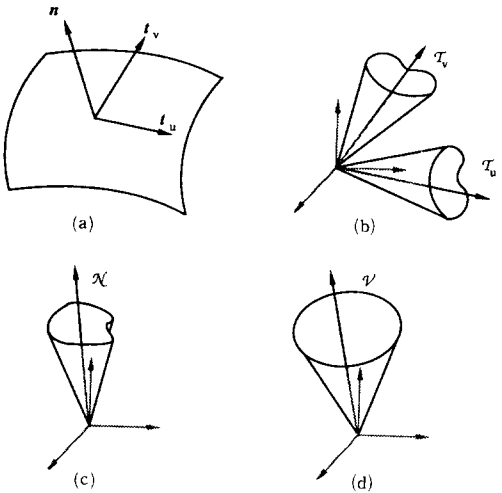


그림 2 매개변수 곡면과 대응하는 뿔들 (a), (b), (c), (d)

같이 정의되는 매개변수 곡면이다.

$$b^{m,n}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n b_{ij} B_i^m(u) B_j^n(v),$$

$$u, v \in [0, 1]$$

$$B_i^m(u) = \binom{m}{i} u^i (1-u)^{m-i} \quad (1)$$

$$B_j^n(v) = \binom{n}{j} v^j (1-v)^{n-j}$$

$$\binom{m}{i} = \frac{m!}{i!(m-i)!}$$

$$i=1, \dots, m, j=1, \dots, n$$

이 식에서 b_{ij} 는 조정점이라 불린다. 그림 3은 차수가 (3×3)인 양방향 3차 베지에 곡면의 예

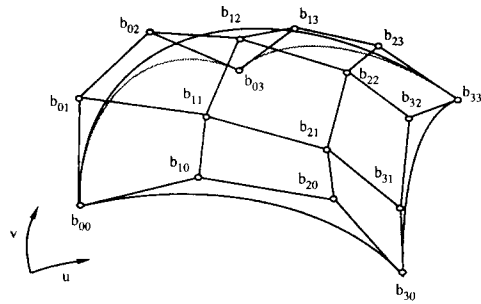


그림 3 차수가 (3×3)인 베지에 곡면

를 보여주고 있으며, 공간상에 있는 점들이 조정점들이며 이 조정점들에 의해 곡면은 정의된다. 그림 3에서 보이듯이, 식(1)에 의하여 정의된 곡면은 일반적으로 유한의 면적을 갖고 있고, 닫혀진 (bounded) 곡면조각(patch)인데, 복잡한 형상을 갖는 물체의 경우에는 일반적으로 이와 같이 낮은 차수의 곡면 조각들을 많이 사용하여 정의하게 된다. 베지에 곡면 표현 방식은 현존하는 많은 CAD 시스템에서 쓰이고 있는 가장 보편적인 방식 중 하나이고, 많은 다른 곡면 표현 방식으로부터 베지에 방식으로의 변환이 잘알려져 있다.^(3,4,11)

다음 단원부터 주어진 베지에 곡면의 특성을 나타내는 접선뿔, 법선뿔, 가시뿔을 정의하고 이들간의 관계를 보임으로써 궁극적으로 주어진 곡면의 가시뿔을 구할 수 있도록 하고자 한다. 앞서도 설명했듯이 어떠한 곡면의 가시뿔을 알고 있으면 그 곡면을 가공하기 위한 공구의 접근방향을 결정할 수 있게 되므로, 공구경로 계획에 매우 유익하게 사용될 수 있을 것이다.

2. 접선뿔

베지에 곡면 $b^{m,n}(u, v)$ 은 각각의 매개변수 u 와 v 에 대해 한 개씩의 접선뿔을 가지며, 접선뿔과 접선맵은 다음과 같이 정의된다.

정의 1. 접선 뿔 \mathcal{T}_u 와 \mathcal{T}_v 는 다음과 같이 정의된다.

$$\mathcal{T}_u = \{p | p = \lambda \frac{\partial}{\partial u} b^{m,n}(u,v) \text{ for some } \lambda > 0, u, v \in [0, 1]\} \quad (2)$$

$$\mathcal{T}_v = \{p | p = \lambda \frac{\partial}{\partial v} b^{m,n}(u, v) \text{ for some } \lambda > 0, u, v \in [0, 1]\}$$

여기서 p 는 공간 상의 한점 $p \in E^3$ 의 위치 벡터이다.

정의 2. 접선맵 T_u 와 T_v 는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} T_u &= \{p | (p \in \mathcal{T}_u) \cap \sigma\} \\ T_v &= \{p | (p \in \mathcal{T}_v) \cap \sigma\} \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 p 는 역시 공간 상의 한점 $p \in E^3$ 의 위치 벡터이며, σ 는 중심이 좌표축의 원점에 위치한 단위 구이다.

그림 4는 2차원 베지에 곡선과 대응하는 접선벡 \mathcal{T} 및 접선맵(tangent map) T 를 보여주고 있다. 그림 4의 (a)의 벡터들은 주어진 곡선의 각 매개변수 값에서의 접선 벡터들이고, 그 벡터들을 좌표상의 원점으로 옮김으로써 그림 4의 (b)가 얻어진다. 접선벡 \mathcal{T} 는 그런 모든 벡터에 임의의 양수를 곱해서 만들어지는 모든 벡터들의 끝점의 자취이다. 접선맵 T 는 접선

벡 \mathcal{T} 와 원점에 놓인 단위원과 공통부분이다. 여기서 T 와 \mathcal{T} 는 방향성에 있어서 같은 양의 정보를 가지며, \mathcal{T} 을 자르는 어떤 임의의 곡면의 \mathcal{T} 과의 공통부분과도 같은 양의 정보를 갖는다. 그림 4의 (b)에서 선분들 L 도 \mathcal{T} 이나 T 과 같은 양의 정보를 갖고 있다. 이와 같은 특성은 법선벡이나 가시벡에 있어서도 마찬가지로 성립한다.

베지에 곡선의 경우 접선벡 \mathcal{T} 는 베지에 곡선의 1차 미분으로부터 정의되는 호도그래프로부터 손쉽게 구해질 수 있다. 베지에 곡선은 다음과 같이 정의된다.

$$b^n(u) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(u), \quad u \in [0, 1], \quad i = 1, \dots, n \quad (4)$$

이 식의 호도그래프 $H(u)$ 는 아래와 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} H(u) &= \frac{d}{du} b^n(u) \\ &= n \sum_{i=0}^{n-1} (b_{i+1} - b_i) B_i^{n-1}(u) \end{aligned} \quad (5)$$

자세한 유도 과정에 대해서는 참고문헌 1, 2, 4, 5, 7을 참조하길 바란다.

$H(u)$ 의 의미는 임의의 매개변수 값에 해당

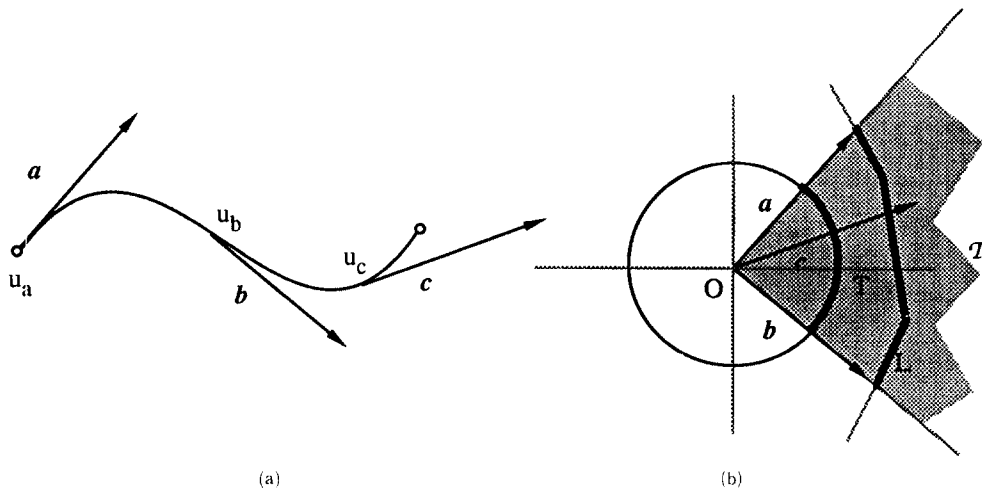


그림 4 평면곡선의 접선벡(a)과 접선맵(b)

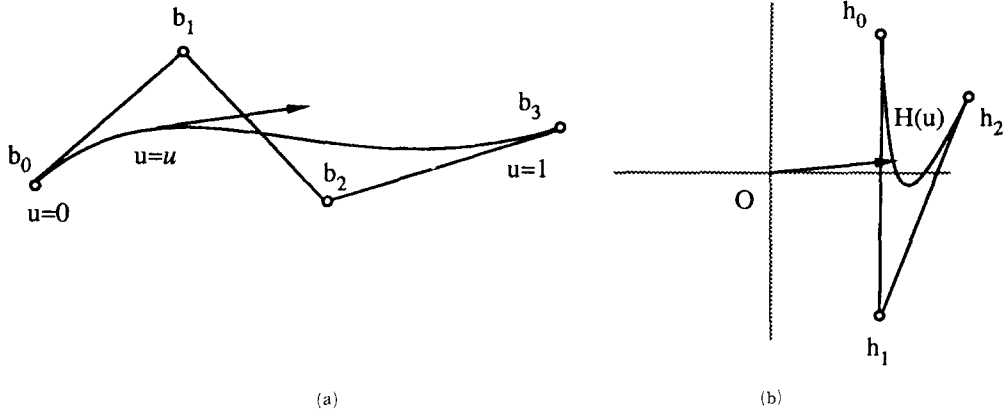


그림 5 3차 베지에 곡선과 대응하는 2차 Hodograph (a), (b)

하는 $H(u)$ 상의 점의 위치벡터는 원래의 곡선 $b^n(u)$ 상의 같은 매개변수 값에서의 접선 벡터를 뜻한다. 이와 같은 유용한 특성을 갖는 호도그래프는 식 (3)에서 나타나 있듯이 원래의 곡선 $b^n(u)$ 보다 차수가 하나 낮은 또 다른 베지에 곡선이다. $H(u)$ 의 조정점을 h_i 라 하면 아래와 같다.

$$h_i = n(b_{i+1} - b_i), \quad i=0, \dots, n-1 \quad (6)$$

식 (6)에 의해 조정점이 구해진다. 그림 5는 3차 베지에 곡선과 대응하는 2차 호도 그래프를 보여준다.

그림 6의 \mathcal{S} 로 나타나 있는 짙은 부분은 그림 5의 (a)의 3차 베지에 곡선의 진짜 접선뿔이

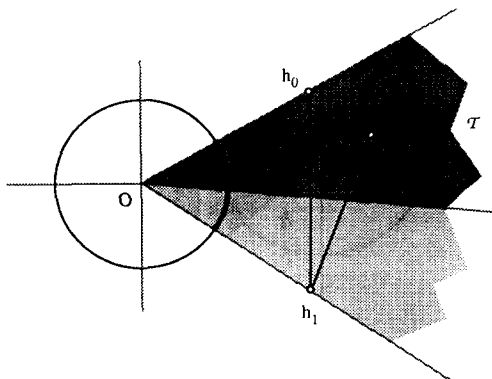


그림 6 접선뿔, 접선뿔 그리고 Hodograph.

며, T 로 나타나 있는 단위원 상의 검고 두꺼운 곡선부는 대응하는 접선뿔이다. 만일 접선뿔을 호도그래프의 세 조정점을 이용해서 구하면 그 결과는 그림 6에서 보이듯이 진짜 접선뿔의 과추정이 된다는 점을 주의해야 한다.

베지에 곡선의 경우와 비슷하게 베지에 곡면의 경우도 각 매개변수 u 와 v 에 대한 접선뿔은 호도그래프로부터 구할 수 있다. 임의의 베지에 곡면 $b^{m,n}(u, v)$ 의 경우 각각의 매개변수에 대한 호도그래프는 다음과 같이 유도될 수 있다. (1,2,4,5,7)

$$\begin{aligned} H_u &= \frac{\partial}{\partial u} b^{m,n}(u, v) = m \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^n (b_{i+1,j} - b_{i,j}) \\ &\quad B_i^{m-1}(u) B_j^n(v) \\ H_v &= \frac{\partial}{\partial v} b^{m,n}(u, v) = n \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{n-1} (b_{i,j+1} - b_{i,j}) \\ &\quad B_i^m(u) B_j^{n-1}(v) \end{aligned} \quad (7)$$

베지에 곡선의 호도그래프가 차수가 하나 낮은 또 하나의 베지에 곡선이듯이, 차수가 $(m \times n)$ 인 베지에 곡면의 호도그래프 H_u 와 H_v 는 각각 차수가 $(m-1) \times n$ 과 $m \times (n-1)$ 인 또 다른 베지에 곡면이 된다.

3. 법선뿔

베지에 곡면 $b^{m,n}(u, v)$ 은 한 개의 법선뿔을

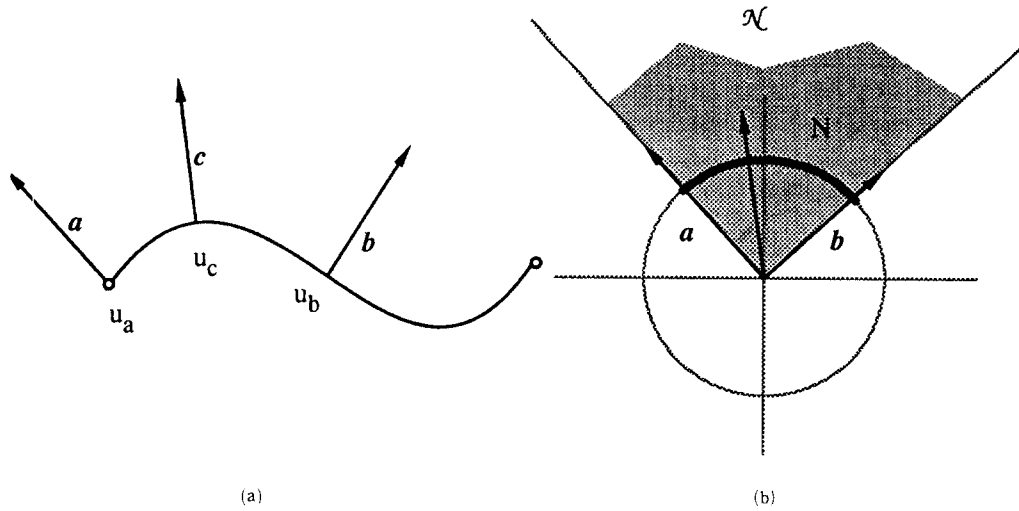


그림 7 평면곡선의 법선벡(a)과 법선맵(b)

가지며 법선벡과 법선맵은 다음과 같이 정의된다.

정의 3. 법선벡 \mathcal{N} 는 다음과 같이 정의된다.

$$\mathcal{N} = \{p \mid \exists \mathbf{n} \text{ such that } (\mathbf{n} = \lambda \mathbf{p}) \text{ 어떤 } \lambda > 0, u, v \in [0, 1]\} \quad (8)$$

여기서 p 는 역시 공간 상의 한점 $p \in E^3$ 의 위치 벡터이며, \mathbf{n} 는 곡면 $b^{m,n}(u, v)$ 에서의 물체의 바깥쪽으로 향하는 법선 벡터이다.

정의 4. 법선맵 N 는 다음과 같이 정의된다.

$$N = \{p \mid (p \in \mathcal{N}) \cap \sigma\} \quad (9)$$

여기서 σ 는 역시 중심이 좌표축의 원점에 위치한 단위 구이다. 이 글에서 정의하는 법선맵은 오래전부터 수학의 한 분야인 미분 기하학에서 가우스 맵⁽¹¹⁾이라 알려져 왔다. 그림 7은 평면 곡선과 그 곡선에 대응하는 법선벡과 법선맵을 보여준다. 그림 7의 (a)의 벡터들은 주어진 곡선의 각 매개변수 값에서의 접선 벡터들이고, 그 벡터들을 좌표상의 원점으로 옮김으로써 그림 7의 (b)가 얻어진다. 법선벡 \mathcal{N} 는 그런 모든 벡터에 임의의 양수를 곱해서 만들어지는 모든 벡터들의 끝점이 자취이다.

법선맵 N 는 법선벡 \mathcal{N} 와 원점에 놓인 단위원과 공통부분이다. 앞서 접선벡의 경우에서 언급했듯이, 여기서 \mathcal{N} 와 N 는 방향성에 있어서 같은 양의 정보를 가지며, 법선벡을 자르는 어떤 임의의 곡면의 법선벡과의 공통 부분과도 같은 양의 정보를 갖는다. 법선벡 \mathcal{N} 역시 호도그래프를 이용해서 구할 수 있다.

4. 가시벡

정의 5. 가시벡(visibility cone) \mathcal{V} 는 다음과 같이 정의된다.

$$\mathcal{V} = \{p \mid L = b^{m,n}(u, v) \text{ has at most one solution, 모든 } u, v \in [0, 1]\} \quad (10)$$

여기서 L 는 $p \in E^3$ 의 위치벡터 p 에 평행한 직선이고, p 는 물체의 곡면으로부터 외부로 향하는 벡터이다. 다시 말해서 가시벡이란 3차원 공간상의 점의 집합으로서, 그 집합안의 어떤 점의 위치 벡터의 방향으로부터 주어진 곡면상의 모든 점이 같은 곡면상의 다른 점에 의해 가려지지 않고 보인다는 조건을 만족한다.

정의 6. 가시맵 \mathcal{V} 는 다음과 같이 정의된다.

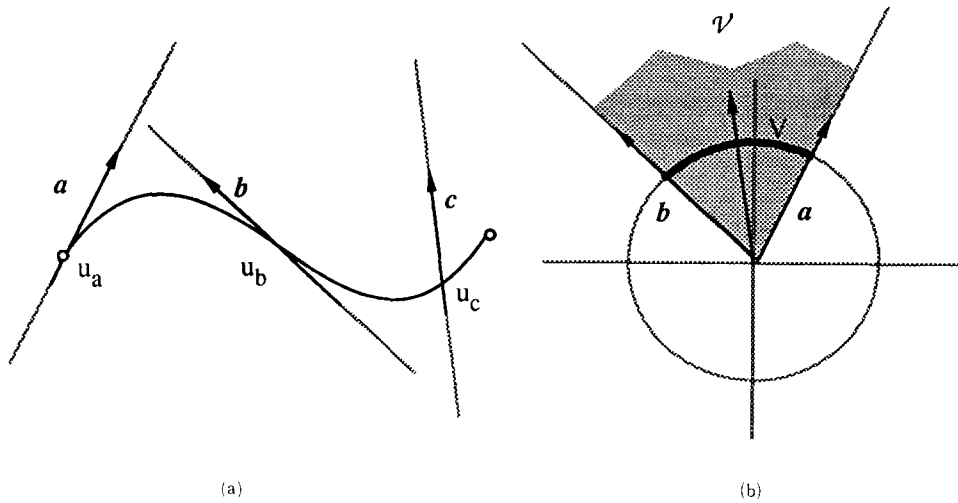


그림 8 평면곡선의 가시뿔(a)과 가시뿔(b)

$$V = \{p \mid (p \in \mathcal{V}) \cap \sigma\} \quad (11)$$

여기서 σ 는 역시 중심이 좌표축의 원점에 위치한 단위 구이다. 다시 말해서 가시뿔 V 는 가시뿔 \mathcal{V} 와 원점에 놓인 단위원과의 공통부분이다. 앞서 접선뿔의 경우에서 언급했듯이, 여기서 V 와 \mathcal{V} 는 방향성에 있어서 같은 양의 정보를 가지며, \mathcal{V} 를 자르는 어떤 임의의 곡면의 \mathcal{V} 과의 공통부분과도 같은 양의 정보를 갖는다. 그림 8은 주어진 2차원 곡선과 그 곡선에 대응하는 \mathcal{V} 과 V 를 보여준다. 그림 8의 (a)에서 보이는 곡선상의 세 벡터 a, b, c 는 각 벡터에 평행한 어떤 직선도 주어진 곡선과 두 번 이상 교차하지 않는다. 가시뿔 \mathcal{V} 는 그런 모든 벡터에 임의의 양수를 곱해서 만들어지는 모든 벡터들의 끝점의 자취이다.

여기서 주목해야 할 사실은 주어진 곡선이나 곡면에 대해 접선뿔, 접선뿔, 법선뿔, 그리고 법선뿔은 항상 존재하지만 가시뿔과 가시뿔은 존재하지 않을 수도 있다는 사실이다.

정리 1. N 가 반구보다 작을 때(다시 말해서 hemispherical일 때)만 V 가 존재한다.

정리 2. 만일 N 가 반구보다 작다면 N 의 경계는 V 를 결정한다.

정리 3. N 가 스페리컬 컨벡스이고 n_i 가 N 의 정점이라 하면 다음과 같다.

$$V(N) = D(\cup n_i) = \cap D(n_i) \quad (12)$$

가시뿔 \mathcal{V} 의 경계는 법선뿔 N 의 경계면으로부터 \mathcal{V} 의 안쪽으로 향하는 법선 벡터에 의해 정의된다는 것을 알 수 있다. 이 정리로부터 3차원 공간상의 법선뿔에 의해 정의되는 N 의 경우도 N 의 극한점인 꼭지점에 대해서만 스페리컬듀얼을 고려하면 N 로부터 V 를 구할 수 있다.

여기서 스페리컬듀얼(spherical dual)은 다음과 같이 정의된다.

정의 7. D 는 $D: p \rightarrow S$ 인 사상으로서 다음을 만족한다.

$$\begin{aligned} S &= D(p) = p^{c+} \cap \sigma \\ D(p_1 \cup p_2) &= D(p_1) \cap D(p_2) \end{aligned} \quad (13)$$

여기서 $p \in \sigma$ 이며, p^{c+} 는 p 의 위치 벡터인 p 에 원점 O 에서 수직인 반공간 중에서 점 p 를 포함하는 공간이다. 여기서 S 와 p 는 상호간에 스페리컬듀얼이라 한다.

그러나 정리 3만으로는 N 로부터 V 를 구하

는 것이 유한개의 반공간의 공통부분 문제이고, 이는 다음의 관찰에 의해 더욱 쉬워질 수 있다.

정리 4. N 가 구면상에서 볼록이며 좌표계의 원점으로부터 뻗어 나오는 삼각형면들 $\{F_i\}$ 에 의해 정의된다고 하고, m_i 가 삼각형 면 F_i 의 \mathcal{V} 의 내부로 향하는 법선벡터라 하자. 만일 $m_i \in E^3$ 가 각 면의 법선벡터 m_i 를 좌표계의 원점으로 수평이동했을 때의 끝점을 나타낸다면, 그림 9와 같이 \mathcal{V} 는 $CH(m_i, O)$ 의 삼각형면들 중 좌표계의 원점을 공유하는 면들로서 정의된다. 여기서 $CH(m_i, O)$ 는 m_i 와 원점으로 이루어진 컨벡스얼(convex hull)을 의미한다.

정리 4에 의해서 가시뿔은 법선뿔의 각 면으로부터 단순히 법선 벡터를 구한후 좌표계의 원점과 그 벡터들의 끝점들의 컨벡스얼을 취하면 되는 것이다. 여기서 정리 4의 증명 과정을 좀더 조심스럽게 살펴보면 다음과 같은 사실들을 관찰할 수 있다. 이들에 대한 증명은 참고 문헌 (7)을 참조하기 바란다.

1. N 이 구면상에서 볼록인 경우에 N 과 V 는 같은 수의 정점과 모서리를 갖는다.

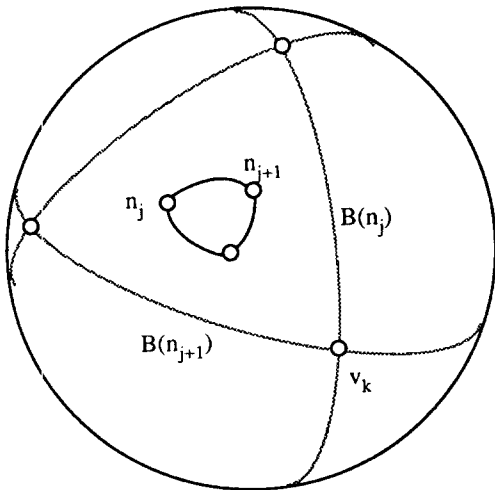


그림 9 법선뿔과 가시뿔 간의 Edge와 Vertex의 관계

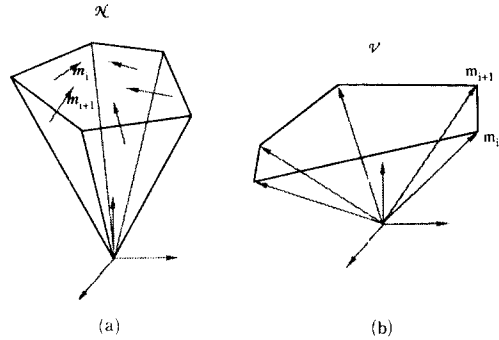


그림 10 법선뿔(a)로부터 가시뿔을 구함.

2. N 이 스페리컬리 컨벡스인 경우에 법선뿔 \mathcal{V} 의 이웃하는 두 삼각형 면 F_i 과 F_{i+1} 의 법선 벡터 m_i 와 m_{i+1} 는 좌표계의 원점과 더불어 가시뿔 \mathcal{V} 의 한 삼각형 면을 유일(unique)하게 결정한다.

정리 4와 앞의 관찰을 통해 법선뿔이 주어졌을 때 가시뿔을 구하기 위하여 컨벡스얼 $CH(m_i, O)$ 을 구하는 것이 불필요함이 증명되었다. V 의 각면은 단순히 \mathcal{V} 의 이웃한 두면의 법선 벡터만 구하면 결정되기 때문이다. 그림 10의 (a)는 법선뿔과 법선뿔을 구성하고 있는 각 삼각형 면의 뿔 내부로 향하는 법선 벡터를 보여주고 있고, 그림 10의 (b)는 이와 같은 방법으로 계산한 가시뿔을 보여주고 있다.

5. 맺음말

이 글에서는 베지에 곡면상에서 접선뿔, 법선뿔, 그리고 가시뿔 등이 정의되었고, 또 그 뿔들을 구하는 방법이 설명되었으며, 그 과정에서 뿔들 상호간에 특성을 설명하였다.

이 뿔들은 기하학적인 문제를 해결하는데 있어서 편리한 도구로 사용될 수 있다. 접선뿔은 두 곡면간의 교선이 꼬이는지(다시 말해서, 교선이 loop을 형성하는지)를 검증하거나,⁽¹²⁾ 주어진 곡면위에서 법선 벡터를 구할 수 있으나 없나를 검증하는데 쓰일 수 있고^(7,8) 법선뿔은 주어진 곡면이 실루엣 곡선을 갖는지를 검증하는

데 쓰일 수 있다.⁽⁷⁾ 가시뿔은 앞에서 설명한 바와 같이 곡면의 가공성을 검증하는데 쓰일 수 있다.^(6,7,9)

한 가지 언급되어야 할 것은 이 글에서는 한 개의 곡면 조각에 대해서만 각 뿔들이 논의되었다. 만일 주어진 곡면상에 한 개 이상의 곡면 조각이 있다면(일반적으로는 이 경우가 대부분이지만), 각 곡면 조각에 대해서 구한 뿔들을 다른 곡면 조각에 대해서 검증해 보아야 한다. 특히 가시뿔의 경우에는 한 곡면 조각에 대해서 구한 가시뿔에서 다른 곡면 조각에 의해 가리워지는 부분을 빼 주어야 한다. 여기에 대한 자세한 논의는 참고문헌 (8)을 참조하기 바란다.

참고문헌

- (1) Bezier, P., 1972, Numerical Control Mathematics and Applications, John Wiley and Sons.
- (2) Bezier, P., 1986, The Mathematical Basis of the Unisurf CAD System, Butterworths.
- (3) Boehm, W., 1977, Cubic B-spline Curves and Surfaces in Computer Aided Geometric Design, Computing, 19, pp. 29~34.
- (4) Farin, G., 1988, Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design, Academic Press.
- (5) Forrest, A.R., 1972, Interactive Interpolation and Approximation by Bezier Polynomials, The Computer Journal, 15(1), pp. 71~79.
- (6) Kim, D.S., 1988, Surface Visibility and Automated Machining, Dissertation Proposal, Department of Industrial and Operations Engineering, The University of Michigan, Ann Arbor, MI.
- (7) Kim, D.S., (1990-a), Cones on Bezier Curves and Surfaces, Ph.D. Dissertation, Department of Industrial and Operations Engineering, The University of Michigan, Ann Arbor, MI.
- (8) Kim, D.S. (1990-b), Detection of Degenerate Normal Vectors on Bezier Patch with Tangent Cones, Submitted to Computer Aided Geometric Design.
- (9) Kim, D.S., Woo, T.C., and Papalambros, P.Y., 1990, Tangent, Normal, and Visibility Cones for Bezier Surfaces, submitted to Computer Aided Geometric Design.
- (10) O'Neill, B., 1966, Elementary Differential Geometry, Academic Press.
- (11) Piegl, L., 1988, Hermite-and Coons-like Interpolants Using Rational Bezier approximation form with Infinite Control Points, Computer-Aided Design, 20(1), pp. 2~10.
- (12) Sederberg, T.W. and Meyers, R.J., 1988, Loop Detection in Surface Patch Intersections, Computer Aided Geometric Design, 5, pp. 161~171. 