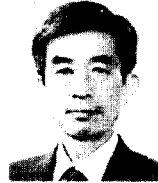


상사이론에 의한 실험 응력해법에 있어서 2, 3의 문제



최 선 호

영남대학교 기계설계학과 교수

●1931년생.
●실험응력해석, 파괴역학 및 삭도공학을 전공하였으며, 상사이론에 응력 확대 계수 측정법 개발과 삭도(케이블카) 연구에 관심을 가지고 있다.

1. 머리말

상사 실험법(analogous experimental method)이라 함은 물리적현상을 다른 물리적현상으로 변환하여, 후자를 실험적으로 측정하여 전자의 제반 물리량을 얻는 과정을 말한다. 이 때 두 물리량 사이에는 수학적 상사관계, 특히 미분방정식 상의 유사관계가 성립함을 전제로 한다.

예를 들어, 역학에 있어 끝에 굽힘 혹은 비틀림을 받는 얇은 막대기(thin rod)의 균형방정식과 고정점 돌레를 회전하는 강체의 운동방정식의 상사관계(Kirchhof의 원리), 일정한 압력을 받는 박막의 변위의 경사(deflection slope)와 상사되는 형상 경계조건을 갖는 단면의 비틀림응력 분포의 유사관계(박막 상사이론(membrane analogy)), 단면의 비틀림응력 분포와 박막의 정상 전기 포텐셜(steady state electric potential)의 상사법칙 등이 이에 속한다.

일반적으로 임의형상의 내부응력을 실험적으로 해석하는 데는 탄소성 변위를 직접 전기적 저항으로 바꾸어 측정하는 방법(strain gauge method)이나 광파의 간섭무늬 fringe)로 가지화하는 광탄성법(photoelastic method), 또는 전자계산기를 이용하여 분할요소해석의 연계집

적으로서 얻는 유한요소법(F.E.M) 등이 널리 사용되고 있으나, 이들은 다같이 그 나름대로의 장단점을 지니고 있다.

전기저항식은 변형을 직접 측정할 수 있어 측정의 오차를 줄일 수 있고, 특히 실험측정과 동하중 해석에는 큰 강점이 있으나, 점해석(point by point analysis)이기 때문에 전시야적인 분포를 파악하기 어렵다. 또한 광탄성법은 명료한 전시야적 분포를 얻을 수 있지만 모형해석(model analysis)이기 때문에 정밀한 모형제작의 어려움이 수반되며, F.E.M.(B.E.M.도 포함)은 복잡한 형상에서의 요소분할이 매우 어렵고, 경계조건의 정확한 설정에 문제가 있다.

따라서 여러 실험적 방법은 실측대상에 따라 그 장단점을 감안하여 선택되어야 하며, 이 글에서 논술하고자 하는 상사실험법에 의한 응력해석도 이러한 관점에서 지금까지의 일련의 연구결과를 종합하여 그 효율적인 용도, 응용 및 그 전망과 더불어 장차 해결하여야 할 2, 3의 문제를 제시하고자 한다.

2. 응력분포의 상사이론

2.1 박막 상사이론(Membrance Analogy)

비틀림을 받는 일양(一樣)한 단면부의 비틀림 응력함수 ϕ 와 균일한 장력 T 를 받는 탄성

박막에 압력 q 를 주었을 때의 변위 W 사이에는 다음과 같은 미분방정식의 동형성(同形性)에 의한 상사관계가 성립한다.⁽¹⁾

$$\nabla^2 \phi = -2G\theta \quad (1)$$

$$\nabla^2 W = -q/T \quad (2)$$

여기서, G 는 전단탄성계수, θ 는 단위길이에 대한 비틀림각이다. 이 때 식 (1) 및 식 (2)에서 응력함수 ϕ 와 변위 W 사이에는 다음의 관계가 성립한다.

$$\phi = \frac{2G\theta T}{q} W \quad (3)$$

변형후의 박막 아래의 체적을 V 라 하면 비틀림강성 C 는 다음과 같다.

$$C = \frac{M_z}{\theta} = \frac{4GT}{q} V \quad (4)$$

여기서, M_z 는 비틀림모멘트이다. 비틀림을 받는 경우 전단응력 $\tau = \partial\phi/\partial S$ 에 식 (3), 식 (4)의 관계를 대입하면 다음의 관계를 얻는다.

$$\tau = \frac{M_z}{2V} \cdot \frac{\partial W}{\partial S} \quad (5)$$

따라서 단면의 한 점의 비틀림응력을 얻는데는 식 (2)의 조건하에 있는 박막의 그 점의 경사와 부푸름 체적 V 를 실험점으로 얻는 것으로 바뀌어진다.

특히 구멍과 같은 내부 경계를 갖는 단면에 대하여서는 그림 1과 같은 막의 변위를 구상하면 식 (1), 식 (2)를 만족하는 수학적 관계가

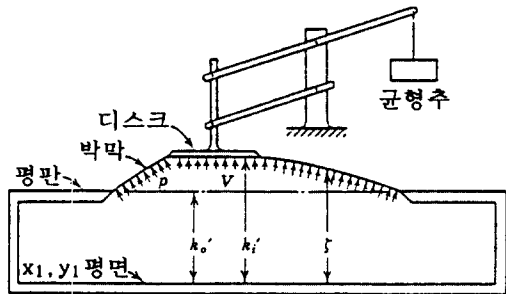


그림 1 박막상사 기구

성립함을 알 수 있다.

2.2 슬랩 상사이론

2차원 문제의 응력해석에서 Airy 응력함수 U 와 박판의 굽힘 변위(deflection) ξ 사이에는 ξ 가 적은 범위내에서 근사적으로 상사관계가 성립함을 잘 알려지고 있다.⁽²⁾ 즉, 판의 굽힘강성을 $D(=Eh^3/12(1-\mu^2))$ 여기서, E : 탄성계수, h : 판두께, μ : 포와송 비)라 하고, 판의 자중(自重) 등의 체적력을 무시하면 변위(수직) ξ 에 대한 U 의 미분방정식과 같은 형식의 식 (6)이 성립한다.

$$D\nabla^4 \xi = 0 \quad (6)$$

또한 이 해(解)로써 판(板)속의 점(x, y) 내에 있어서의 판면의 변위 ξ 는 충분한 정밀도로 식 (7)과 같이 주어진다.

$$\xi = \frac{k_x}{2} x^2 + \frac{k_y}{2} y^2 - k_{xy} xy \quad (7)$$

여기서,

$$k_x = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \quad k_y = \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}, \quad k_{xy} = -\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} \quad (8)$$

한편, 2차원 문제에서 Airy 함수 U 를 쓴 응력은 식 (9)로 표현된다.

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \quad \nabla^4 U = 0 \quad (9)$$

또한, 임의경계 C_i 에서의 경계조건은 경계에 작용하는 외력의 성분 X, Y 경계의 방향 여현 l, m, n 경계에 따른 거리 s 법선방향 거리를 γ 라 하고 다음과 같이 나타낸다.

$$U_{C_i} = \int (B_i l - A_i m) ds + \alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i$$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \nu^2}\right)_{C_i} = A_i l + B_i m + \alpha_i l + \beta_i m$$

$$A_i = -\int Y ds, \quad B_i = \int X ds$$

$$(i=1, 2, 3, \dots, n) \quad (10)$$

여기서, α_i, β_i 및 γ_i 는 C_i 경계에 대한 정수이

다. 식 (9)에 식 (11)과 같은 변환을 주면 이는 완전히 식 (6)~식 (9)의 표현과 일치한다.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \gamma_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \quad \sigma_y = \gamma_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}, \\ \tau_{xy} &= -\gamma_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y}, \quad U = \gamma_0 \xi \end{aligned} \quad (11)$$

여기서, γ_0 는 2차원 문제에 있어서의 응력과 박판의 굽힘에 있어서의 곡률과의 관계비를 나타내는 정수이다. 식 (11)의 변환을 식 (10)의 경계조건에 적용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \gamma_0 \xi_{,i} &= \int (B_i l - A_i m) ds + \alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i \\ \gamma_0 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial \nu^2} \right) C_i &= A_i l + B_i m + \alpha_i l + \beta_i m \\ A_i &= - \int Y ds, \quad B_i = \int X ds \\ (i=1, 2, 3, \dots, n) \end{aligned} \quad (12)$$

이상의 이론에서 식 (10)으로 나타내는 임의의 내외경계 C_i 를 갖는 평판의 면(面)내외력에

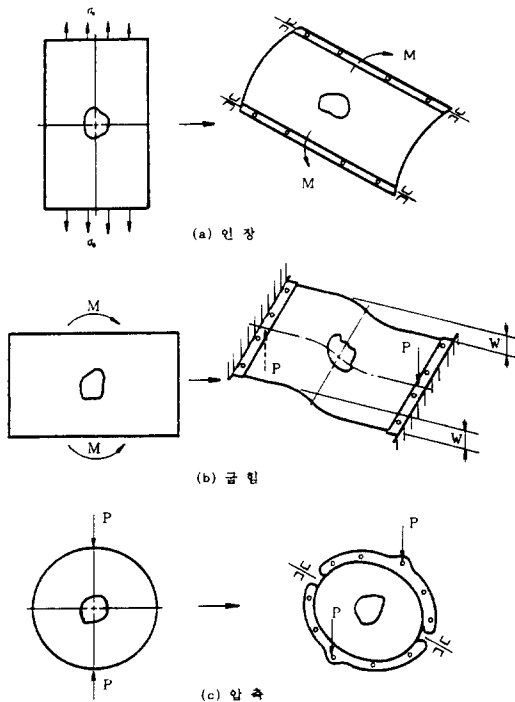


그림 2 슬랩상사의 변환

대한 이차원 응력의 분포는 식 (8)과 식 (11)을 비교함으로써 식 (12)의 경계조건을 충족하는 굽힘을 준 판의 굽힘곡률의 분포에 대응시킬 수 있다. 이들 슬랩(slab)상사예의 변환을 2, 3 예시하면 다음 그림 2와 같다.

3. 상사이론에 의한 실험응력 해석의 특성

위에서 논술한 박막 상사이론에 의한 비틀림 전단응력 τ 및 슬랩 상사이론에 의한 평면응력성분을 얻는 방법의 특성은 아래와 같이 요약된다.

1) 일반적으로 자유경계(free boundary)가 되는 절결(cut out)이나 자유주연(自由周緣)은 모두 강제경계(구속경계)로 바꾸어 놓을 수 있다. 즉, 직접측정법에 속하는 전기저항측정이나 광탄성적 모형해석에서의 내부구멍 또는 자유연은 이와 형상이 같은 강체를 판에 부착하여 굽혀 실험하게 된다. 물론, 이때 부착하는 강체는 시편에 비하여 강성이 월등히 커야 한다.

2) 박막상사에서는 가압한 박막의 부푸름 체적 V 와 막의 경사(수직변위의 1차 미분)를 측정하면 되고, 슬랩 상사에서는 구속주연(拘束周緣)에 가하는 모멘트 M 과 판의 곡률(근사적으로 2차 미분계수)을 측정하면 된다.

3) 이들의 변환으로써 모형 응력해석 실험에서의 경계가공을 때로는 매우 손쉽게 수행할 수 있다. 예를 들어 파괴역학의 응력확대계수 K_I, K_{II} 및 K_{III} 의 측정에 있어 광탄성법에 있어서의 예리한 균열첨단의 가공 또는 분포균열의 모형제작이라든가 분포, 임의형 내부경계의 가공은 강체로 부착하는 상사론에의 변환으로써 매우 손쉽게 이루어질 수 있다.

4. 상사법을 위한 실험재료 및 장치의 개발

4.1 박막 상사법에 대하여

비틀림 응력 측정용 박막은 균일한 장력과 수직압을 받는 박막의 형성이 전제조건이다.

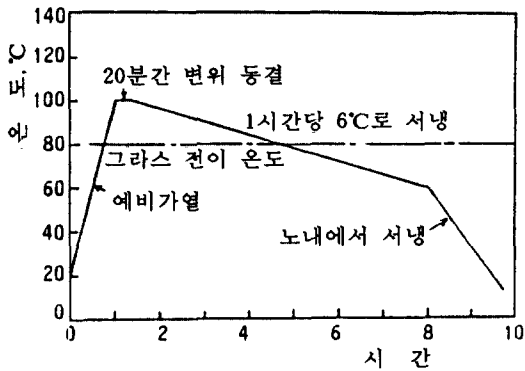


그림 3 박막 변위 동결 사이클

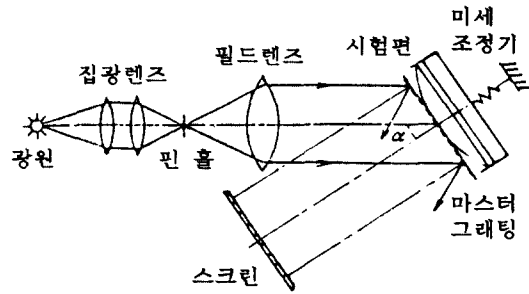


그림 5 모아레 간섭 장치

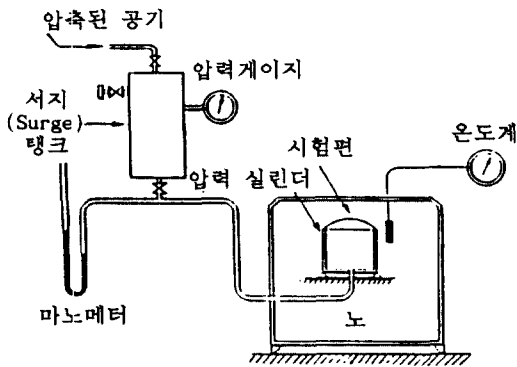


그림 4 변위동결을 위한 장치

이를 충족하는 박막의 하나로서는 실물단면과 상사한 구멍에 비누막을 쳐서 이를 부풀리는 방법(soap film analogy)이 있다.⁽³⁾ 막 하부체적 V 는 불어넣은 공기량으로 측정하고 막의 경사는 깊이 게이지(depth gage) 또는 오토콜리메터(autocollimator) 광선의 반사각으로 측정하는 방법을 택한다. 다만 비누막의 수명이 매우 짧고, 경사각의 측정의 정밀도가 낮은 것이 치명적인 결점이다. 그 뒤에 일본 동경대학의 Ikeda(池田)에 의하여 이 수명이 24시간으로 연장이 되었기는 하나 역시 정밀측정에는 마흡함을 면치 못하였다.

위의 상사이론을 만족하고 막의 변위를 영구히 동결하는 재료가 저자 등에 의하여 개발된 바 있다.⁽⁴⁾ 이는 열가소성 고분자 재료의 특성

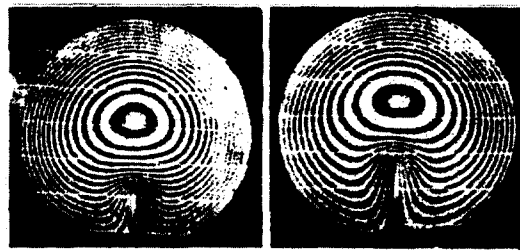


그림 6 환봉의 모아레 무늬 형태

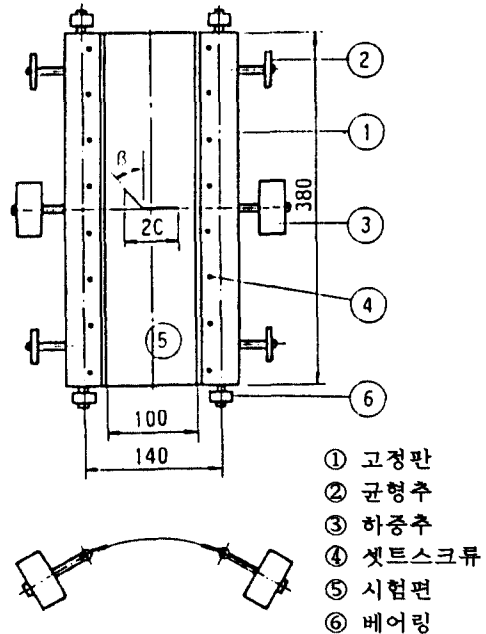


그림 7 슬랩 하중 장치

이 온도변화에 따라 현저하게 변화하는 사실에 착목(着目)하여 그라스 전위점 온도가 80°C에서 고무와 같은 상태가 되는 염화비닐(poly-vinyl chloride)을 사용하여 공기로 팽창하게 한 뒤 그림 3과 같은 온도-시간 사이클로 냉각하여 막의 변위를 동결한 것이다. 이를 위한 장치를 그림 4에 나타낸다.

이 때 막하(膜下)체적 V 는 그림 5와 그림 6에서 보는 바는 같이 액체 마노미터(manometer)로 경사각은 모아레(moire) 간섭에서 얻은 등고선 군(群)에서 구할 수 있다.

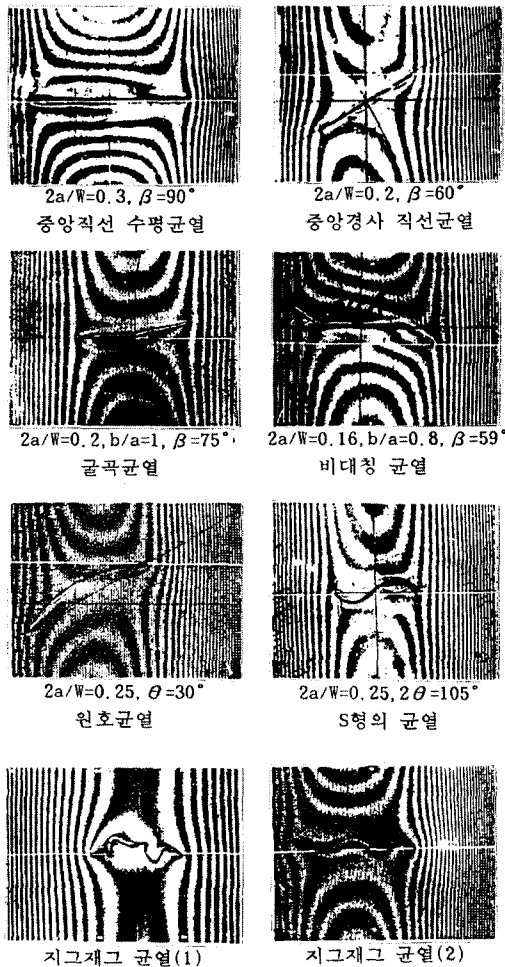


그림 8 슬랩 상사의 모아레 무늬 형태

4.2 슬랩 상사법에 대하여

슬랩 상사는 식 (10)의 경계조건에 알맞게 강체(구속)경계를 부착한 박판에 굽힘을 주어 측정점에서의 판의 굽힘곡률을 측정하여 식 (11)에 의하여 그 점의 응력을 얻는다. 슬랩상수 γ_0 는 일반적으로 기지(既知)의 응력점에서의 곡률에서 얻을 수 있다. 식 (6)에서 보는 바와 같이 굽힘강성 D 가 적을수록 경계주변의 굽힘감응이 높아지기 때문에 슬랩상사에 사용하는 판은 탄성을 지니면서도 얇을수록 효과가 있다. 저자 등은 이를 감안하여 0.5mm 두께의 P.V.C. 판에 강체(경계)를 부착하여 그림 7과 같은 굽힘장치를 개발하여 실험하였다.⁽⁵⁾ 그 결과의 모아레 무늬사진을 그림 8에 제시한다.

일반적으로 얇은 P.V.C.판은 탄성계수가 금속에 비하여 낮아 얇은 금속 등의 부착경계로서도 충분히 슬랩 상사의 경계 감성조건을 만족하고, 또한 손쉽게 손에 넣을 수 있다는 것이 그 한 이점이라 하겠다.

5. 상사법 실험응력해석의 효용 및 실험 예

위에 논술된 이론을 바탕으로 이 방법의 장점의 특성을 활용할 수 있는 실험의 하나는 기

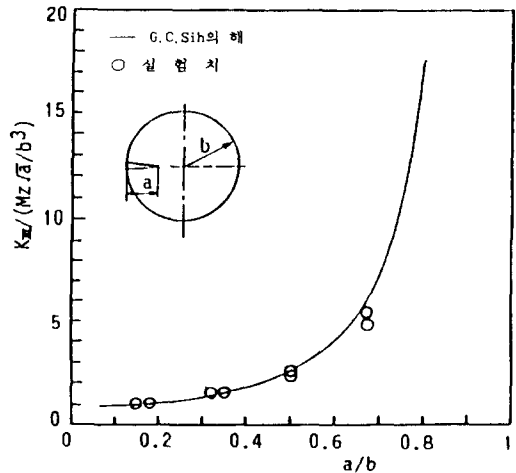


그림 9 표면균열을 가지는 환봉의 응력확대계수 K_{III}

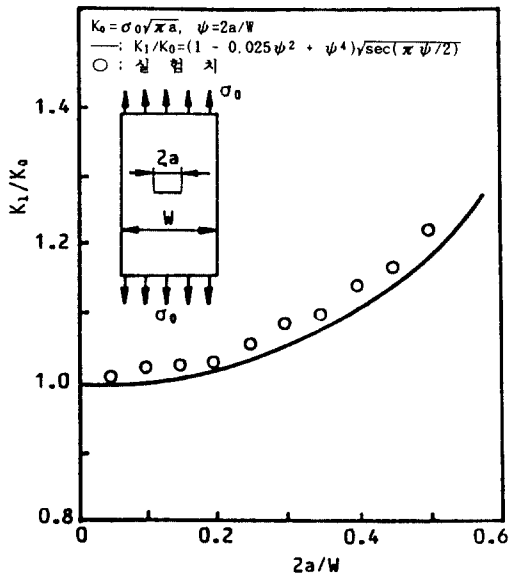


그림 10 중앙 직선 수평균열의 K_I

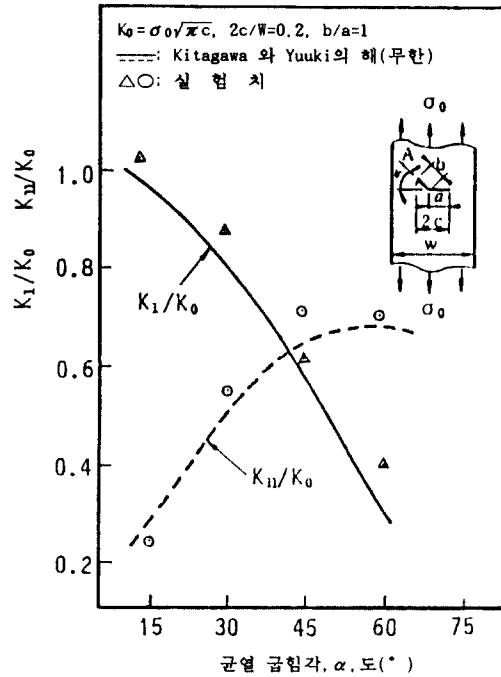


그림 12 굴곡균열의 K_I , K_{II}

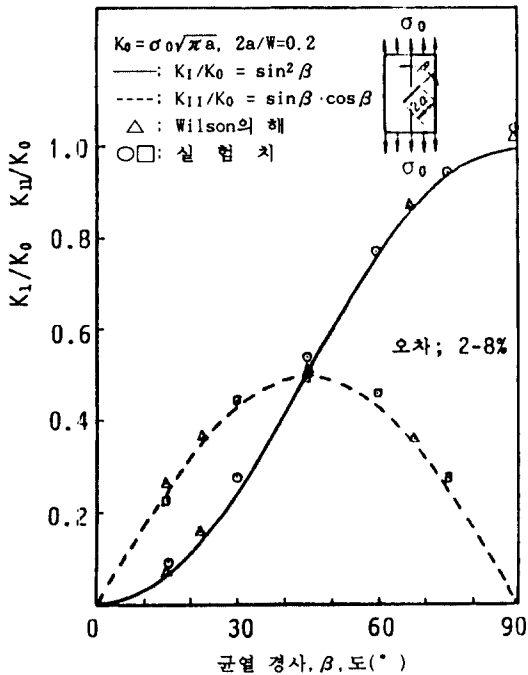


그림 11 중앙 경사 직선균열의 K_I , K_{II}

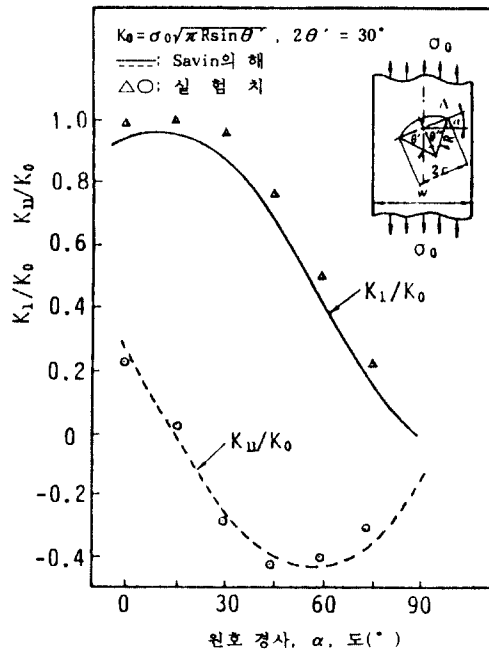


그림 13 원호균열의 K_I , K_{II}

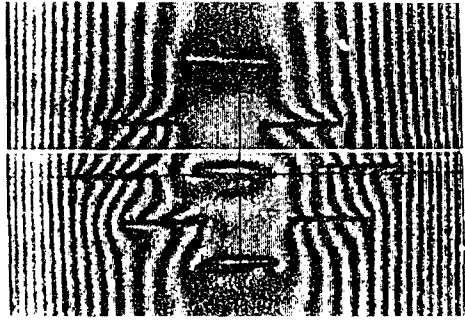


그림 14 수평으로 분포된 균열

존의 방법에서 모형 실험 시편제작이 어려운 임의의 경계를 갖는 경우의 응력측정이라 할 수 있을 것이다. 특히 광탄성 실험에서 제작이 곤란한 균열과 같은 예리한 첨단 가공이라든가, 서로 인접된 분포경계 등의 실험해석에는 그 위력을 발휘한다. 저자 등은 특히 파괴역학 분야와 단순균열에서 임의형 균열에 이르는 K_{I} , K_{II} 및 K_{III} 응력확대계수(S.I.F.) 측정에 이 방법을 적용하여 이론해와 비교하여 최대 8%, 최저 2%의 다른 방법에 결코 뒤지지 않는 결과를 얻은 바 있다.⁽⁶⁾ 그 실예를 그림 9~그림 14에 표시한다.

6. 맺음말

—방법의 문제점과 장래의 연구방향—

6.1 박막 상사에 대하여

박막 상사에 의한 비틀림 응력측정은 변위막의 경사 즉 변위의 1차 미분량이기 때문에 새도우 모아레(shadow Moire)법 등의 정밀한 등고선만 얻으면 비교적 정확한 측정을 할 수 있다. 또한 변화체적 V도 마노미터에 의하여 1/100cc 이하의 정도(精度)로서 구할 수 있어 측정치의 신뢰성이 높은 것도 사실이다. 그러나 그림 1에서 보는 바와 같이 편심 내부경계의 경우에는 강체경계(rigid boundary)의 자유로운 상하이동을 위한 기구가 필요하다.

비누막 등 파손되기 쉬운 막 재료는 그림 1과 같이 내부경계 자중을 밸런스 오프(balance off)할 필요가 있으나 P.V.C.에 의한 변위 동

결법을 쓰면 이를 생략할 수 있기는 하다. 다만 편심분포경계에 대한 새로운 수식적 해석 및 상하 평행이동 기구의 개발이 요구된다. 외부경계에 대해서는 표면균열을 포함하여 여타 실험법보다 뛰어나게 효과적이다. 막은 얇을수록 정밀해에 가까워지며 외연경계에서의 막의 격임(굴곡)도 민감하나 과도 부품(over blowing)에 의한 오차가 수반되기 쉬워 막 두께에 따른 구속연(restrained boundary)에서의 막의 적정경사를 미리 조정해 둘 필요가 있다. 0.2 mm 두께의 P.V.C.에서 15°C 이하에서는 큰 오차가 일어나지 않으나 이에 대한 예비실험 방법도 더 연구되어야 할 과제이며 80°C 근방의 전위영역을 지나면서 P.V.C.보다 탄성이 높은 얇은 막재료의 개발도 장차의 과제중 하나이다.

6.2 슬랩 상사에 대하여

슬랩 상사의 가장 큰 결점은 측정량이 슬랩 굽힘 변위의 2차 미분 형식(곡률)이기 때문에 측정오차가 크다는 것이다.⁽⁷⁾ 이 방법이 지금까지 직접 측정법으로서 크게 각광을 받지 못하였던 것도 여기에 기인한다. 그러나 새도우 모아레(shadow Moire) 측정법 등의 광학적 측정법의 향상과 더불어 점차 이 방법도 뒤돌아 볼 가치를 지니게 되었고, 장차 보다 정밀한 등고선군을 얻게 되면 광탄성의 주응력차만의 분포를 얻는 실험보다는 응력의 직접측정이라는 점에서 월등히 유리해질 것도 사실이다. 여기에는 레이저(laser) 간섭법, 홀로그래피(holography) 등에 의한 정밀 등고선 형성 또는 전자계산에 의한 외삽법 등의 이용에 의한 정밀 평면 변위곡선의 플롯(plot) 등도 장차 개발해야 할 것중 하나로 들 수 있다.

또한, 이 방법은 5절에서 논술한 바와 같이 수식상 변위함수에 대한 2중적분이 가능한 파괴역학의 균열첨단 응력분포에는 더 없는 위력을 발휘하나, 측정의 정밀도를 보다 높이기 위하여 전산기를 겸용한 다점선정법⁽⁸⁾ 등의 측정기법 도입도 개발할 여지가 충분히 있다.

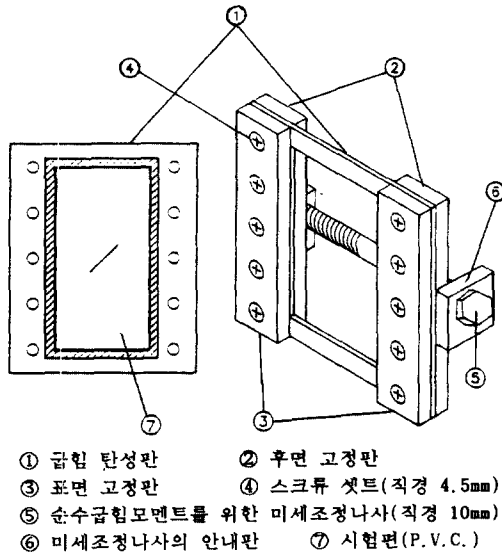


그림 15 고정 슬랩 상사 장치

슬랩 상사의 판의 두께는 얇을수록 그 측정 정밀도가 높아지나, 내부경계를 갖는 평판의 인장 등에 이를 적용할 때 내부경계에서 충분히 먼곳의 판의 굽힘이 일양(一樣)하지 않고 워핑(warping)이 일어날 우려가 있다. 이에 대한 대책으로 저자 등은 그림 7에 나타난 중추(重錘)에 의한 굽힘 대신 고정 프레임(frame)에 의하여 판을 일양하게 굽히는 방법을 개발하였다.⁽⁸⁾ 여기에 사용된 P.V.C. 판의 두께는 0.15mm로서 상당한 측정 정밀도 향상을 얻을 수 있었다.

이와 같은 문제점의 후적개량에 따라 슬랩 방법은 그림 15와 같이 장치 부식균열과 같은 그룹균열(group cracks)의 해석 및 분포유형에 따른 응력확대계수의 결정을 시도할 수 있는 유력한 수단으로 등장할 수 있는 가능성을 지니고 있는 것으로 사료된다.

또한 이 방법은 유한요소법(finite element method), 경계요소법(boundary element method)을 위한 정확한 경계조건 설정에도 큰 역할을 할 수 있는 것으로 기대된다. 더욱이, 박막 슬랩 상사법을 하나의 장치에 통합하여 전(全)하중 형태의 실험 응력해석을 하나의 장치

에 의하여 수행하는 방법도 역시 장치의 좋은 연구과제가 되리라 생각한다.⁽¹⁰⁾

참고문헌

- (1) Hetenyi, M., 1950, "Handbook of Experimental Analysis," John Wiley and Sons, pp. 703~714.
- (2) Hetenyi, M., 1950, "Handbook of Experimental Analysis," John Wiley and Sons, pp. 775~789.
- (3) Hetenyi, M., 1950, "Handbook of Experimental Analysis," John Wiley and Sons, pp. 725~731.
- (4) 崔善浩, 권재도, 北川英夫, 1986, "軸方向き裂のモードⅢ應力擴大係數の變位凍結類似法による解析," 日本機械學會論文集(A篇), 52卷 484號, pp.2653~2661.
- (5) 최선호, 권재도, 김종주, 서인보, 채영석, 1982, "모아레法和 슬랩相似의 複合에 의한 應力擴大係數의 實驗的 解析法 -有限板 크랙의 K_I 및 K_{II} 의 解析-, " 대한기계학회논문집, 제6권 제4호, pp. 315~322.
- (6) 崔善浩, 金鍾周, 徐仁輔, 權在度, 黃在錫, 北川英夫, 1990, "スラブアナロジーとモアレの組合せによる K_I , K_{II} 混合モードの應力擴大係數の 實驗的解析法," 日本機械學會論文集(A編), 55卷, 521號, pp. 63~71.
- (7) Ryan, I.J., 1952, Proceeding of SESA, 5.
- (8) 김종주, 서인보, 최선호, 1990, "다점 선정법에 의한 편심 및 굴절균열의 응력확대계수의 결정," 대한기계학회논문집, 제14권, 제5호, pp. 1079~1086.
- (9) 최선호, 황재석, 정진석, 1992, "응력확대계수 측정용 고정 슬랩상사 장치의 개발에 관한 연구," 대한기계학회논문집 제출.
- (10) 최선호, 권재도, 김종주, 서인보, 1983, "變位凍結法에 의한 應力擴大係數의 實驗的 決定法," 대한기계학회논문집, 제7권, 제4호, pp. 434~440. 