財務管理硏究 第九卷 第一號(1992.6)

長期옵션에 內在된 株價變動性의 危險프레미엄에 관한 硏究*

鄭 文 卿**

〈요 약〉

Black과 Scholes가 옵션價格模型을 개발한 후 그 모형에서의 가정들을 완화시킴으로써 옵션모형들이 발전되어 왔다. Black-Scholes의 옵션價格模型의 문제점중의 하나는 주가의 분산이 만기일까지 一定하다는 가정이다. 본 연구에서는 장기옵션이 score를 이용하여 株價分散의 중요성을 고찰하였다. 즉 Cox, Ingersoll과 Ross의 一般均衡理論에 근거한 random variance 옵션모형을 도출하였고 이것을 Black-Scholes 옵션모형과 비교하였다. 장기유럽식 옵션에 대하여 株價變動性의 危險프레미엄이 중요한 요소이고 危險프레미엄을 고려한 random variance 옵션모형이 危險을 고려치 않는 random variance옵션模型보다 예측력이 높게 나타났다.

I. 序 論

Black과 Sholes(1973)가 옵션價格模型을 개발한 이후 많은 재무학자들이 블랙-숄즈 옵션價格模型의 假定을 제거함으로써 그 모델을 발전시켜왔다. 블랙-숄즈 옵션價格模型의 문제점 중의 하나는 株價의 分散이 만기일까지 일정하다는 假定이다. 이러한 假定은 Scott(1987), Clark(1973), Epps and Epps(1976), Christie(1983)과 Kon(1984) 들의 硏究에 의하여 현실과 거리가 있음이 밝혀졌다. 株價의 變動性이 옵션價格에서 매우 중요한 역할을 하며 다른 變數들, 즉, 無危險利子率, 배당들보다 더 硏究에 대상이 되었다.

최근에 random variance 옵션모형에 관하여 많은 硏究가 되어졌다. 예를 들면, Merton(1976), Eisenberg(1985), Hull and White(1987), Wiggins(1985), Chesneys and Scott

* 이 논문은 1992년 5월중 韓國財務管理學會의 연구발표회에서 발표한 것으로, 필자는 발표회에 참가하여 유익한 조언을 해주신 한국재무관리학회 여러분과 이 논문을 읽고 도와주신 익명의 편집 및 심사위원에게 감사를 드립니다.
** 東西經濟硏究所 責任硏究員

(1989), Johnson and Shanno(1987), Baily and Stulz(1989) 등의 연구가 있다. Hull과 White(1987)는 株價의 變動性이 투자자의 부와 상관관계가 없을 때 콜옵션의 편미분방정식의 해를 조사하였다. 이들 논문에서의 공통점은 Cox, Ingersoll과 Ross(1981)의 一般均衡模型(general eqilibrium model)이 사용된 점이다.

이 논문에서는 5년만기 유럽식 옵션인 scores에 대한 random variance옵션모델을 도출하였고 그 모형과 변형된 Black-Scholes모형을 비교하였다. 장기유럽옵션에 대하여 株價의 變動性에 대한 危險프레미엄이 중요한 요소이며, 이 危險프레미엄을 random variance옵션모델에 고려하였을 때, random variance옵션모델은 Black-Scholes 모델보다 나은 예측력을 나타냈다. 그러나 株價의 變動性에 대한 危險프레미엄을 고려하지 않을 때, random variacne옵션모형은 Black-Scoles옵션모델과 차이가 없었다.

Americus Shareowners Service회사가 26개의 우량기업에 대해 Americus신탁을 만들었으며 그 신탁을 통하여 기존 株式을 2개의 증권, 즉, prime과 score로 분리하여 American Stock Exchange에서 거래된다. 이 신탁에 속하는 株式들은 American Express, American Home Product, ATT, ARCO, Bristol, Myers, Chevron, Coca-Cola, Dow, Du Pont, Kodak, Ford, GE, GM, GTE, Helett Packard, IBM, Johnson&Johnson, Merck, Mobil, Phililp Morris, Procter&Ganble, Sears, Union Pacific과 Xerox 등이 있다. 각 신탁이 설립된 즉시, 투자자는 신탁에 株式을 맡기고 unit라 하는 증권을 교부받게 된다. 각 unit는 prime과 score로 구성되어 있는데 그 prime과 score를 각각 다른 투자자에게 양도할 수 있다. 한 단위의 株式을 두 단위의 증권으로 分割하여 투자자로 하여금 配當과 의결권을 가지는 권리와 일정한 價格이상의 資本利益을 구분하여 투자할 수 있게 되었다. 각 신탁의 만기일은 5년이며, prime을 소유한 투자자는 배당과 미리 정하여진 行使價格 이상의 자본이득을 얻는다. 만기일에 score의 현금흐름은 $V=\mathrm{Max}[S-X, 0]$ 이다. 여기서 V는 T시점의 score의 가치이고, S는 T시점의 株價이고, X는 行使價格이며 T는 만기일이다. 그러므로 score는 만기가 5년인 유럽식 콜옵션과 동일하다.

본 논문의 II장에서는 Cox, Ingersole과 Ross의 一般均衡模型을 이용하여 株價의 變動性이 確率的(stochastics)으로 움직일 때, score의 價格모형을 도출하였고, III장에서는 株價의 確率的 過程(stochastic process)에 대한 媒介變數(parameter)를 추정하였다. IV장에서는 score의 가치를 평가함에 있어 Black-Scholes모형과 株價의 變動性에 대한 危險프레미엄을 고려한 또는 危險프레미엄을 고려치 않은 random variance옵션모형을 실증적으로 비교하였다. V장에서는 結論을 도출하였다.

II. 模型設定

株價의 變動性이 確率的으로 움직일때 score價格에 대한 모델을 설정하기 위해 다음과 같은 假定이 필요하다.

1. 가 정

1) 資本市場이 完全市場 (perfect market)이다.
2) 無危險利子率이 시간에 따라 변함이 없고, 無危險利子率을 r로 명시한다.
3) 세금과 거래비용이 존재하지 않는다.
4) 자산이 연속적으로 거래가 가능하다.
5) 株價와 株價의 變動性이 다음의 確率的 微分方程式(stochastic differential equation)에 따라 움직인다.

$$
\begin{aligned}
dv &= (\alpha V - C)dt + \sigma dz_1 \\
d(\ln\sigma) &= \beta(\sigma - \ln\sigma)dt + \theta dz_2
\end{aligned}
$$

여기서 V : 株價

α : 시간당 株式의 순간적인 기대수익률(instantaneous expected return)

θ^2 : 시간당 수익률의 순간적인 分數(instantaneous variance)

C : 시간당 순간적인 현금유출

β : 株價分散의 장기적 평균수준(mean reverting level)

σ : 株價分散의 장기적 평균수준(mean reverting level)

θ : $d\sigma$의 순간적인 分散(instanteous variance)

6) score는 株價와 株價分散의 파생적 증권이다. t시점에서의 score의 가치는 f(t)로 명시하며 $f(t)=f(V(t), \sigma, t)$로 한다.
7) 배당은 prime을 소유한 투자자에게 연속적으로 지급되고 주기에 비례한다. 즉 $D=\delta V$ 여기서 δ는 연속적 배당율이다.

2. score의 편미분방정식

株價分散이 Ornstein-Uhlenbeck 과정에 따라 움직인다는 假定은 몇가지 문제점을 초래할 수 있다. Scott(1987)는 Black-Scholes의 옵션모형을 도출하는 것과는 달리 하나의 옵션과 하나의 株式만으로 無危險포트폴리오를 구축할 수 없음을 보여 주었다.

Wiggins(1987)는 두개의 옵션과 하나의 株式을 가지고도 株價와 株價分散의 파생적 증권에 대하여 적절히 價格을 평가할 수 없음을 밝혔다. 그 이유는 株價의 分散이 基礎變數(state variable)로써 시장에서 관찰되지 못하기 때문이다. 즉 株價分散의 움직임과 동일한 과정을 따르는 자산이 시장에서 거래가 되지않기 때문에 株價分散에 대한 危險프레미엄을 관찰할 수 없으므로 裁定去來方法(arbitrage method)에 의해 score를 평가할 수 없다. 이에 대해 Cox와 Rubinstein(1985)는 이 문제를 다음과 같이 지적하였다. 株價 이외의 無作爲變數(random variable)로써 株價分散이나 無危險利子率이 매우 중요하기 때문에 옵션의 만기까지 일정하다는 假定이 현실과 괴리가 있을 때, 재정거래방법에 의한 옵션價格의 평가는 할 수 없고, 자산평가의 一般均衡理論에 의해 옵션價格을 평가해야 한다(p.420).

Cox, Ingersoll과 Ross (CIR)에 의한 一般均衡理論이 random variance옵션價格模型에 적용되어 왔다. Hull과 White(1987), Scott(1987), Wiggings(1987) 등의 연구에서 보면 CIR의 균형이론에서 균형 score價格의 기대수익률은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$E(df/f)=\{r+\frac{\partial f}{\partial V}\cdot\frac{V}{f}(\alpha-r)+\frac{\partial f}{\partial\sigma}\cdot\frac{1}{f}\cdot\mu^*\} \tag{1}$$

여기서 $(\alpha-/r)$: 株價에 대한 危險프레미엄

α : 株價의 기대수익률

μ^* : 株價分散에 대한 危險프레미엄

f(v, σ, t)의 함수로 표시될 수 있는 score는 Ito's Lemma에 의해 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} df=[&1/2\theta^2 V^2\frac{\partial^2 f}{\partial V^2}+\delta\sigma\theta v\frac{\partial f}{\partial V\cdot\partial\sigma}+1/2\theta^2\frac{\partial_2 f}{\partial V^2} \\ &+(\alpha V-C)\frac{\partial f}{\partial V}+\beta(\sigma-\sigma)\frac{\partial f}{\partial\sigma}-\frac{\partial f}{\partial\tau}]dt \\ &+\sigma V\frac{\partial f}{\partial V}+dz_1+\theta\frac{\partial f}{\partial\sigma}dz_2 \end{aligned} \tag{2}$$

여기서 σ : dz_1과 dz_2의 상관계수

τ : 만기잔여기간 $(T-t)$

dz_1, dz_2 : Wiener process

df의 기대평균은 다음과 같다.

$$E(df)=\{1/2\sigma V^2 \frac{\partial^2 f}{\partial V^2} + \delta\sigma\theta V \frac{\partial^2 f}{\partial V \cdot \partial\sigma} + 1/2\theta^2 \frac{\partial^2 f}{\partial V^2} + (\alpha V - C) \frac{\partial f}{\partial V}$$

$$+[1/2\theta^2 \ \sigma + \beta(\sigma - \ln\sigma)\sigma] \frac{\partial f}{\partial V} \cdot \frac{\partial f}{\partial \tau} \} \qquad (3)$$

(1)과 (2)식으로부터 score의 편미분방정식을 구하면

$$1/2\sigma V^2 \frac{\partial^2 f}{\partial V^2} + \delta\sigma\theta V \frac{\partial^2 f}{\partial V \cdot \partial\sigma} + 1/2\theta^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2} + [r-\pi] V \frac{\partial f}{\partial V}$$

$$+[1/2\theta^2 \ \sigma + \beta(\sigma - \ln\sigma) - \mu^*\sigma]\sigma \frac{\partial f}{\partial \sigma} - rf = 0 \qquad (4)$$

이다. 여기서 π : 연속적 배당율$(C=\pi)$

σ : V와 σ의 상관계수

제약조건 : $f(V, \sigma, \theta) = Max[V-X, 0]$

$f(V, \sigma, \tau) = 0$

$f(V, \sigma, \tau) \leq V$

III. 確率的 過程의 變數 推定

1. 方法論

株價에 대한 確率的 過程의 變數(β, θ와 σ)를 추정하기 위해서 GMM(generalized method of moments)가 사용되었다. Scott(1987)과 Wiggins(1987)는 Hansen의 GMM을 이용하여 株價의 確率的 過程變數들을 추정하였다. 과거의 硏究들과 마찬가지로 株價가 로그정산분포를 따르고, 株價의 確率的過程이 다음과 같다고 假定할 수 있다.

$$dV = \alpha\ Vdt + \sigma\ Vdz$$

여기서 V : 株價

α : 株價의 평균수익률

σ : 株價의 變動性

V에 대해 로그함수를 취하고 Ito's Lemma를 적용하면,

$$G = \ln V$$

$$dG = (\alpha - 1/2\sigma^2)dt + \sigma dz$$ 이다

위의 식을 불연속적인 형태로 나타내면,

$$\Delta \ln V(t) = (\alpha - 1/2\sigma_{t-1}^2)\Delta t + \sigma_{t-1}\theta z \tag{5}$$

이다. Vasicek(1977)의 硏究에 의하면 Orstein-Uhlenbeck(O-V)process인 σ^t는 $e^{-\beta\Delta t}\sigma_{t-1} + \sigma(1-e^{-\beta\Delta t})$인 평균과 $\theta^2(1-e^{-2\beta\Delta t})/2\beta$ 分散인 정상분포이다. 그러므로 σ의 불연속적 형태는

$$\sigma = e^{-\beta}\sigma_{t-1} + \sigma(1-e^{-\beta}) + \varepsilon i$$

이다. 여기서 Δt는 1로 가정되었다. 또한 lnσ의 불연속적 형태는

$$\ln\sigma_t = e^{-\beta}\ \ln\sigma_{t-1} + \sigma(1-e^{-\beta}) + \varepsilon_t \tag{6}$$

이다. (5)식과 (6)식을 實證的 硏究를 위한 형태로 치환하면

$$\Delta \ln Vt = \pi + \sigma_t - l_n V_\tau \tag{7}$$

$$\ln\sigma_t = a + \rho\ \ln\sigma_t - 1 + \varepsilon_t \tag{8}$$

이다. (5)식~(8)식을 이용하면 각 變數를 나타낼 수 있는데

$$\sigma = a/(1-\rho)$$
$$\beta = -\ln\rho$$
$$\theta^2 = \sigma\varepsilon^2(-2\ \ln\rho)/(1-\rho^2) \tag{9}$$

이다. Scott(1977)의 硏究에서와 마찬가지로 $X_t = \Delta\ln V_t - \mu = \sigma_{t-1}\ U_t$를 이용하여 모델의 變數들이 도출되었다. ARMA(1,1)모형을 이용하여 ρ를 추정한 다음, β, σ, 와 θ를 (8)식으로 부터 도출하였다.

2. 結果

〈표 1〉 推定된 變數의 分布(1978년 7월~1987년 6월)[a)]

$X_t = \Delta\ln V_t - \alpha\Delta t$

Company	N	mean	standard deviaton	kurtosis
AHP	2528	0.000353	0.0132	5.951
ARCO	2528	0.000436	0.0174	4.595
AMOCO	2528	0.000552	0.0170	5.267
ATT−2	2528	0.000524	0.0098	5.727
CHEVRON	2528	0.000654	0.0171	5.239
DOW	2528	0.000189	0.0178	5.495
DUPONT	2528	0.000408	0.0152	5.446
EXXON	2528	0.000704	0.0119	5.259
FORD	2528	0.000598	0.0182	5.339
GE	2528	0.000657	0.0134	5.629
GM	2528	0.000653	0.0149	5.246
GTE	2528	0.000669	0.0119	5.647
KODAK	2528	0.000218	0.0156	5.913
MOBIL	2528	0.000704	0.0173	5.545
PROCTER	2528	0.000287	0.0111	5.529
SEARS	2528	0.000316	0.0162	5.801
UNION	2528	0.000487	0.0173	5.324

a) X_t = log deviation from the sample mean at t.

V_t = stock price at t.

CRSP의 1일 株式收益率을 이용하여 確率的 과정의 變數를 추정하였다. 이 研究에 사용된 株式은 American Home Products, AMOCO, ARCO, AT&T, GM, EXXON, KODAK, GE, DuPont, DOW, UNION, FORD, Proctor&Gamble, Chevron, Mobil, GTE, Sears 등이다. 추정을 위하여 사용된 기간은 1978년 7월1일부터 1987년 6월30일까지이다. 각 회사에 대하여 2,528개의 표본으로 구성되어 있다.

確率的 과정의 變數를 추정하기 위해 X_t가 이용되었는데 〈표 1〉은 X_t의 평균, 分散과 Kurtosis등을 나타내며, GMM을 적용하기 위해서는 Kurtosis가 3보다 커야한다. 그리고 표본에서 Kurtosis는 4.259에서 6.545의 범위에 있는데, 정상분포의 Kurtosis는

〈표 2〉 變數 X_t의 確率的 過程에서 ρ의 推定

$$(1-\rho L)\ \ln|X_t| = \mu + (1-\rho L)\ \ln|U_t| + \varepsilon_t$$

Company	ρ	μ
AHP	0.963 (0.017)[a]	−5.219 (0.049)[a]
ARCO	0.992 (0.004)	−4.487 (0.098)
AMOCO	0.996 (0.002)	−4.885 (0.150)
AT&T	0.996 (0.002)	−5.431 (0.137)
CHEVRON	0.997 (0.002)	−4.839 (0.141)
DOW	0.870 (0.149)	−4.912 (0.032)
DUPONT	0.984 (0.009)	−4.975 (0.051)
EXXON	0.977 (0.010)	−5.134 (0.048)
FORD	0.997 (0.010)	−4.811 (0.159)
GE	0.984 (0.006)	−5.016 (0.068)
GM	0.998 (0.001)	−4.897 (0.191)
GTE	0.984 (0.005)	−5.257 (0.087)
KODAK	0.988 (0.006)	−4.926 (0.069)
MOBIL	0.992 (0.003)	−4.875 (0.111)
PROCTER	0.971 (0.012)	−5.293 (0.052)
SEARD	0.995 (0.003)	−5.014 (0.106)
UNION	0.996 (0.002)	−4.905 (0.139)

a) Parentheses represent standard errors.

X_t = deviation from the sample mean.

ρ = first order correlation coefficient for X_t process.

μ = constant term in the ARMA(1,1) process of X_t process.

3이기 때문에 표본의 분포는 정상분포보다 긴 꼬리를 갖고 있다고 할 수 있다.

〈표 2〉에서 ARMA모형의 變數를 알 수 있는데, ρ는 0.87부터 0.998까지였다. 대부분 ρ는 1에 근접하고 있으며 이는 Scott(1977)의 結果와 비슷하였다. 〈표 3〉에서는 17개 회사에 대한 σ, β, θ의 추정치를 알 수 있다. 평균적으로 目標分散 (σ)은 0.217이고 分散의 조정속도 β는 0.02이고, θ는 0.058이다. 이 變數들이 random variance option모형의 變數로 사용되어 score의 이론적 價格이 計算되었다. 株價와 株價의 分散 사이의 상관관계인 δ는 본 硏究에서는 0로 假定하였다.

〈표 3〉 分散의 確率的 過程의 母數 推定値

$$\ln \sigma_t = \beta(\underline{\alpha} - \ln \sigma) + \theta_{dz}$$

Company	$\underline{\alpha}$	β	θ
AHP	−4.19	0.036	0.110
ARCO	−4.15	0.007	0.040
AMOCO	−4.21	0.003	0.030
AT&T−2	−4.16	0.032	0.030
CHEVRON	−4.20	0.002	0.032
DOW	−4.17	0.139	0.205
DUPONT	−4.32	0.015	0.067
EXXON	−4.51	0.023	0.064
FORD	−4.15	0.003	0.028
GE	−4.11	0.015	0.057
GM	−4.34	0.001	0.018
GTE	−4.58	0.015	0.070
KODAK	−4.27	0.011	0.052
MOBIL	−4.24	0.007	0.053
PROCTER	−4.59	0.029	0.077
SEARS	−4.23	0.005	0.034
UNION	−4.19	0.003	0.032

$\underline{\alpha}$ = mean reverting level in ln σ.

β = speed of adjustment coefficient of ln σ.

θ = standard deviation of proportional changes in ln σ.

Ⅳ. Random Variance Option 모형을 이용한 Score價格의 추정

1. 方法論

株價의 分散에 대한 危險프레미엄과 score의 값은 1987년 7월1일에서 1989년 6월30일까지 일일 자료를 이용하여 추정하였다. 그러나 과거의 株價와 score의 값으로부터 危險프레미엄을 구하기 어렵기 때문에 이 논문에서는 暗示的 危險프레미엄(implied risk premium)이 사용되었다. 이 暗示的 危險프레미엄은 (3)식의 편미분방정식에서 실제score값과 이론적 값의 차이를 극소화시킴으로써 구해질 수 있다. 주어진 暗示的 프레미엄, μ에 관하여 (3)식의 편미분방정식으로부터 score의 값이 구해진다.

대부분의 편미분방정식은 정확한 解(analytical solution)를 갖고 있지 않으므로 수치해석을 통해서 근접한 값을 얻을 수 있다. 이항분포식, 몬테칼로(Monte Carlo)와 finite difference 방법들이 재무관리에서 종종 사용되어졌다. Couley(1970)가 제안한 line hoscotch방법이 본 논문에서는 사용되었는데 이 방법은 explicit와 implicit가 혼합된 방법이라 할 수 있다.

score에 대한 편미분방정식에서 解의 收斂性(convergence)을 얻기 위해 V와 σ에 대하여 로그 변환을 취하였다.

$$y = \ln V \qquad x = \ln \sigma \qquad w = (y,\ x,\ \tau) = f(V,\ \sigma,\ \tau)$$

라 하고 σ는 로그정상분포과정을 따르면, score의 편미분방정식은 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$1/2\ \sigma^2(W_{yy} - W_y) + (r - \pi)W_y - rW - W + 1/2\ \theta^2(W_{xx}W_x)$$

$$+ \delta\theta\sigma W_{yx} + W_x(1/2\ \theta^2 + \beta(\underline{\sigma} - \ln\sigma) - \mu/\sigma) = 0$$

여기서 π는 배당율이다.

위의 식이 finite difference 방법의 explicit 형태는 다음과 같이 나타낼 수있다.

$${}_{t-1}W_{y.x} = E_{1c}W_{y.x} + E_{2c}W_{y-1.x} + E_{3c}W_{y-1.x} + E_{4c}W_{y.x-1} + E_{5c}Y_{y.x-1}$$

$$+ E_{6c}W_{y+1.x+1} + E_{7}W_{y-1.x+1}$$

여기서 $_{t+1}W_{y,x}$는 $t+1$ 시점에서 주어진 x 와 y 에 대한 W의 값이다.

$$E_1 = 1 - r\Delta t - \Delta t e^{2x}/(\Delta y)^2 - \Delta t\theta^2/(\Delta x)^2 - \Delta t\delta\theta e^x/\Delta x\Delta y$$

$$E_2 = \Delta t e^{2x}/2(\Delta y)^2 + \Delta t\delta\theta\sigma/2(\Delta y)^2 + \Delta t/\Delta y(-e^{2x}/4 + r/2 - \pi/2)$$

$$E_3 = \Delta t\delta\theta e^x/\Delta x\Delta y + \Delta t/\Delta y(-e^{2x}/4 - r/2 - \pi/2) + \Delta t e^{2x}/2(\Delta y)^2$$

$$E_4 = \Delta t\theta^2/2(\Delta x)^2 - \Delta t\delta\theta e^x/2(\Delta x)(\Delta y) + \Delta t/2\Delta x(\beta(\alpha - \chi) - \mu^*/e^x)$$

$$E_5 = \Delta t\theta^2/2(\Delta x)^2 - \Delta t\rho\delta e^x/2(\Delta x)(\Delta y) + \Delta t/2\Delta x(\beta(\alpha - \chi) - \mu^*/e^x)$$

$$E_6 = -\Delta t\delta\theta e^x/2(\Delta x)(\Delta y)$$

$$E_7 = -\Delta t\delta\theta e^x/2(\Delta x)(\Delta y)$$

계약조건은

$$W_{0.x} = 0$$

$$W_{m-1.x} = W_{m.x} + \exp(y_{m-1}) - \exp(y_m)$$

$$X_{y.n-1} = -W_{y.n}$$

$$W_{y.0} = W_{y.1}$$

여기서 M과 N은 각각 y와 x의 段階數(number of steps)이다.

2. 結果

socre값이 lnV에 대해 50간격과 lnσ데 대해 50간격으로 된 grid을 이용하여 계산되었다. 시간은 1년당 52간격으로 나누었고 즉, 1주당 1간격으로 계산되었다. lnV와 lnσ에 대한 간격의 크기는 각각 0.05 이다. 시간에 대한 간격을 줄임으로써 수치해석의 오차를 줄일 수 있지만 상대적으로 계산상의 시간은 커진다. 이때 control variate

〈표 4〉 實際價格, 危險이 없는 確率變數模型의 價格, 블랙－숄즈 模型의 價格間의 比較

	Actual	R－V Price[a] With No Risk Premium	B－S Price[b]
	American Home Products		
Mean	12.49	13.44	13.45
Max.[c]	22.50	19.85	19.75
Mid.[d]	8.50	9.61	9.45
	AMOCO		
Mean	7.09	8.29	8.27
Max.[c]	10.75	13.10	13.09
Min.[d]	4.75	4.07	4.05
	ARCO		
Mean	8.41	6.98	6.92
Max.[c]	12.38	14.42	14.41
Min.[d]	5.63	3.63	3.56
	ATT2		
Mean	6.98	7.31	7.29
Max.[c]	12.75	11.64	11.62
Min.[d]	4.25	3.81	3.76
	CHEVRON		
Mean	4.48	2.24	2.23
Max.[c]	7.13	4.49	4.48
Min.[d]	3.00	0.82	0.81
	DOW		
Mean	15.86	15.99	15.32
Max.[c]	21.50	21.67	21.86
Min.[d]	12.38	8.21	7.49

〈표 4-1〉

	Actual	R-V Price[a] With No Risk Premium	B-S Price[b]
		DUPONT	
Mean	15.32	17.34	17.26
Max.[c]	27.00	28.27	28.21
Min.[d]	7.38	7.95	7.84
		EXXON	
Mean	6.37	7.25	7.22
Max.[c]	9.24	10.66	10.71
Min.[d]	3.18	4.23	4.38
		FORD	
Mean	20.59	23.96	23.96
Max.[c]	25.25	31.38	31.78
Min.[d]	15.75	14.84	14.81
		GE	
Mean	9.09	7.17	7.29
Max.[c]	19.38	13.14	13.03
Min.[d]	7.00	3.68	3.54
		GTE	
Mean	8.01	9.53	9.54
Max.[c]	17.63	17.14	17.13
Min.[d]	3.63	4.48	4.47
		GM	
Mean	8.79	11.42	11.44
Max.[c]	14.25	17.04	17.04
Min.[d]	6.00	5.89	5.89

〈표 4-2〉

	Actual	R-V Price[a] With No Risk Premium	B-S Price[b]
		KODAK	
Mean	8.87	8.75	8.72
Max.[c]	17.38	15.33	15.73
Min.[d]	6.38	6.48	6.44
		MOBIL	
Mean	5.43	7.15	7.11
Max.[c]	8.13	9.59	9.58
Min.[d]	3.75	4.82	4.78
		PROCTER	
Mean	13.32	14.99	14.98
Max.[c]	31.00	30.57	30.54
Min.[d]	7.50	8.96	8.92
		SEARS	
Mean	4.37	4.10	4.10
Max.[c]	7.13	8.87	8.88
Min.[d]	3.00	1.58	1.56
		UNION	
Mean	9.07	9.92	9.91
Max.[c]	14.88	15.72	15.74
Min.[d]	5.75	5.39	5.37

a) R-V price is based on the random variance option pricing model without risk premium.
b) B-S price is based on the Black-Scholes option pricing model.
c) Max. represents the maximum value during the testing period.
d) Min. represents the minimum value during the testing period.

방법을 사용할 경우 시간에 대한 간격을 줄이지 않고도 상대적으로 오차를 줄일수 있다.

우선 危險프레미엄이 0이라고 假定한 후 Random Variance option pricing모형을

〈표 5〉 危險이 없는 確率變數模型과 블랙-숄즈 模型의 推定誤差[a]

Company	R−V Model With No Risk Premium	B−S Model	t−value[b]
AHP	1.445	1.491	−0.235
AMOCO	1.372	1.359	0.077
ARCO	2.265	2.291	−0.099
AT&T−2 SERIES	0.636	0.639	−0.048
CHEVRON	2.250	2.266	−0.081
DOW	2.610	2.777	−0.380
DUPONT	2.093	2.026	0.193
EXXON	1.781	1.810	−0.013
FORD	3.748	3.751	−0.005
GE	2.351	2.398	−0.143
GM	2.895	2.913	−0.048
GTE	1.616	1.618	−0.072
KODAK	1.719	1.727	−0.029
MOBIL	1.830	1.802	0.156
PROCTER	1.950	1.967	−0.071
SEARS	1.789	1.802	−0.068
UNION	1.994	1.996	−0.005

a) Mean absolute deviation = | Actual price − model price | /n where n is the sample size.

b) t-value is calculated to test whether the difference of mean absolute deviations between the two models is significant.

적용하였다. 과거의 배당율을 Black-Scholes모형과 Random Variance Option모형에 사용하였다. 배당율은 1978년 6월1일부터 1987년 6월30일까지의 배당락 시점에서의 배당금과 株價를 이용하여 계산되었다.

〈표 4〉에서는 Black-Scholes모형과 危險프레미엄을 고려하지 않은 Random Variance Option모형을 비교하였다. 비교한 結果, 두 모형에서 예측한 score의 價格은 통계적으로 차이가 없었다. 〈표 5〉에서는 두 모형의 예측치의 절대값이 計算되었는데,

〈표 6〉 株價의 變動性에 대한 危險프레미엄의 推定値

Company	Risk premium[a]
American Home Products	0.0367 (0.002)
Amoco	0.0241 (0.001)
Arco	−0.0127 (0.002)
AT&t−2 series	0.0182 (0.003)
Chevron	−0.0685 (0.021)
Dow	0.0095 (0.002)
DuPont	0.0051 (0.002)
Exxon	0.0173 (0.004)
Ford	0.0628 (0.003)
General Elctric	−0.0335 (0.025)
GM	0.0210 (0.002)
GTE	0.0365 (0.001)
KODAK	0.0055 (0.002)
MOBIL	0.0240 (0.002)
Procter&Gamble	0.0114 (0.003)
SEARS	−0.0064 (0.001)
UNION	−0.0047 (0.001)

a) Parentheses represent standard errors.

두 예측된 값은 차이가 없었다. 危險프레미엄을 고려하지 않은 random variance옵션모형은 Black-Scholes옵션모형과 score값을 예측하는데 차이가 없었다. 평균적으로 그 차이는 0.01이었으며 그 차이가 통계적 의미는 없었다.

株價分散에 대한 危險프레미엄이 모형에서 얻어진 값과 실제값 사이의 차이를 최소화시킴으로써 추정되었다. 〈표 6〉은 株價의 變動性에 대한 危險프레미엄의 추정치를 나타내고 있는데, 0.05유의수준에서 17회사중 12개 회사의 危險프레미엄이 正의 값이 도출되었다. 〈표 5〉에서 危險프레미엄을 고려하지 않았을 때, 두개의 모형이 차이가 없는 이유가 危險프레미엄 자체를 고려하지 않았기 때문일 것이다. 이러한 현상을 더욱 조사하기 위해서 〈표 7〉에서는 Black-Scholes모형과 危險프레미엄을 고려치 않은 random variance옵션모형보다 score의 값을 예측하는데 월등하다.

危險프레미엄을 고려한 random variance옵션모형은 17개의 회사중 15개 회사에

〈표 7〉 平均絶對偏差에 의한 危險이 없는 確率變數模型과 블랙－숄즈 模型의 推定誤差[a]

Company	R－V Model With No Risk Premium	B－S Model	t－value[b]
AHP	1.297	1.491	－0.827
AMOCO	1.120	1.359	－1.659*
ARCO	1.988	2.291	－1.083
AT&t-2 SERIES	0.511	0.639	－1.981
CHEVRON	1.528	2.266	－3.323*
DOW	2.511	2.777	－0.237
DUPONT	1.758	2.026	－0.992
EXXON	0.899	1.507	－3.824*
FORD	1.972	3.748	－4.560*
GE	2.603	2.398	0.752
GM	1.984	2.913	－3.049*
GTE	0.633	1.618	－10.770*
KODAK	1.695	1.727	－0.089
MOBIL	0.919	1.802	－5.954*
PROCTER	1.266	1.967	－3.149*
SEARS	1.782	1.802	－0.033
UNION	2.131	1.996	0.462

a) Mean absolute deviation= | Score price－model price | /n where n is the sample size.

b) * represents that the statistics are significant at the five percent level.

대하여 적은 평균절대오차를 나타냈다. 이중 9개회사가 0.05유의수준에서 그 차이가 의미가 있었다. 이러한 현상은 Black-Scholes옵션모형이 株價의 變動性에 대한 危險프레미엄을 고려한 random variance옵션모형보다 과대 또는 과소하게 평가되었음을 알 수 있다.

이러한 현상중 예외는 GE와 Union 이었으며, 그 차이는 통계적으로 의미가 없었다. 이러한 현상은 과거 硏究와는 대조적인 結果를 제시해 준다. Hull과 White(1987)은 株價의 變動性이 투자자의 총소비와는 무관하여, 株價變動性의 危險프레미엄이 0이

라고 假定하였다. 이 논문의 結果는 장기옵션에 대한 價格을 결정하는데는 株價變動性에 대한 危險프레미엄이 중요한 요소로써 작용할 수 있다는 것을 예시한다. 본 연구의 제약으로는 표본집단으로 score만 포함한 것에 있다. 추후 연구에서는 장기채권옵션 등도 고려하여 연구함이 바람직할 것으로 생각된다.

V. 結　　論

본 논문에서 장기옵션인 score의 價格을 평가하기 위하여 Cox, Ingersoll and Ross (1985)의 一般均衡理論에 근거한 random variance옵션모형을 도출하였고, 그것은 Black-Scholes옵션모형과 비교하였다. score을 이용할 경우 장기유럽식옵션에 대하여 株價變動性의 危險프레미엄이 중요한 요소이고 危險프레미엄을 고려한 random variance 옵션모형이 危險을 고려치 않은 random variance옵션모형과 Black-Scholes모형보다 예측오차가 적었다. 즉, 투자자들은 장기옵션에 투자할 때 株價의 變動性에 대한 危險의 事前的(ex-ante)프레미엄을 요구한다.

참 고 문 헌

Ames, W. F., Numerical Methods for practical Differectial Equations, Academic Press, 1977.

Bailey, W. and R. Stulz, "The Pricing of Stock Index Options in a General Equilibrium Model," Journal of Financial and Quantative Analysis 24, March 1989, 1－2.

Black, F. and M. Scholes, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," Journal of Poitical Economics 81, May 1973, 637－659.

Brennan, M. and E. S. Schwartz, "Finite Difference Methods and Jump Processes Arising in the Pricing of Contingent Claims : A Synthesis," Journal of Financial and Quantitative Analysis, September 1978, 461－475.

Christie, A., "The Stochastic Behavior of Common Stock Variances : Value, Leverage, and Interest Rate Effects," Journal of Financial Economics 10, December 1982, 407－432.

Chesney, M. and L. Scott, "Pricing European Current Options : A Comparison of the Modified Black-Scholes Model and a Random Variance Model," Journal of Financial and Quantitative Analysis, September 1989, 267－284.

Clark, P., "A Subordinated Stochastic Process Model with Finite Variance for Speculative Prices," Econometrica 41, January 1973, 135－155.

Courtadon, G., "A More Accurate Finite Difference Approximation for the Valuation of Options," Journal of Financial Quantitative Analysis, December 1982, 697－703.

Cox, J., J. Ingersoll and S. Ross, "An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices," Econometrica 53, March 1985, 363－384.

Cox, J. and S. Ross, "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes," Journal of Financial Economics 3, March 1976, 145－166.

Cox, J. and M. Rubinstein, Option Markets. Englewood Cliffs, NJ : Prentice Hall 1985.

Dietrich-Campbell, B. and E. Schwartz, "Valuing Debt Options," Journal of Financial Economics, 1986, 321－343.

Eisenberg, L., "Relative Pricing from No-Arbitrage Conditions : Random Variance Option Pricing," Working Paper, University of Illinois, 1985.

Epps, T. W. and M. L. Epps, "The Stochastic Dependence of Security Price Changes and Transaction Volumes : Implications for the Mixture-of-Distribution Hypothesis," Econometrica 44, March 1976, 305－321.

Geske, R. and K. Shastri, "Valuation by Approximation : A Comparision of Alternative Option Valuation Techniques," Journal of Financial and Quantitative Analysis, March 1985, 45－71.

Gourley, A. R., "Hopscotch : A Fast Second-Order Partial Differential Equa tion Solver," J. Inst. Maths Applics, 1970, 391－399.

Gourley, A. R. and G. R. McGuire, "General Hopscotch Algorithm for the Mumerical Solution of Partial Differential Equations," J. Inst. Matsh Applics, 1971, 216－227.

Gourley, A. R. and S. Mckee, "The Construction of Hopscotch Methods for Parabolic and Elliptic Equations in Two Space Dimensions with a Mixed Derivative," Journal of Applied and Computational Mathematics 3, September 1977, 201－206.

Hansen, L. P., "Large Sample Properties of Generalized Method of Moments Estimators," Econometrica 50, July 1982, 1029－1054.

Hull, J. and A. White, "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities," Journal of Finance 42, June 1987, 281－301.

Jarrow, R. and M. O' Hara, "Primes and Scores : An Essay on Market Imperfections," Journal of Finance 42, December 1989, 1263－1288.

Johnson, H. and D. Shanno, "Option Pricing when the Variance is Changing," Journal of Financial and Quantitative Analysis 22, June 1987, 143－153.

Kon, S., "Models of Stock Returns-A Comparision," Journal of Finance 39, March 1984, 147－166.

Lauterback, B. and P. Schultz, "Pricing Warrants : An Empirical Study of the Black-Scholes Model and Its Alternatives," Journal of Finance 45, September 1990, 1181－1210.

Lo, A., "Statistical Tests of Contingent Claims Asset Pricing Models," Journal of Financial Economics, 1986, 143－173.

Merton, R., "Option Pricing When Underlying Stock Returns Are Discountinous," Journal of Financial Economics 3, January 1976, 125－144.

Scott, L., "Option Pricing When the Variance Changes Randomly : Theory, Estimation, and Application," Journal of Financial and Quantitative Analysis 22, December 1987, 419－438.

Vasieck, O., "An Equilibrium Characterization of the Term Structure," Journal of Financial Economics, 1977, 177－178.

Wiggins, J., "Stochastic Volatility Option Valuation : Theory and Emprical Tests," Journal of Financial Economics 19, December 1987, 351－372.