韓國軍事運營分析學會誌
第18卷, 第2號, 1992. 12. 31.

生産容量減少가 許容되는 2個 生産施設의 生産 및 在庫模型
(A Two-location Production and Inventory Model for Production Facilities with Capacity Reductions)

姜炳秀, 河碩太*

Abstract

This paper considers a two-location production and inventory model for a single product which can be produced and demanded at each of two locations. Demands during a finite number of discrete time periods are known and must be satisfied by production, inventory or transshipment.

We consider the change of production capacity. The costs to be incurred are restricted to production, inventory and transshipment costs, and all cost functions are assumed to be concave.

The objective is to minimize the total cost of production, inventory and transshipment.

The model is formulated as a shortest path problem for an acyclic network from which properties associated with optimal solutions are derived. Using these properties, we develop a dynamic programming algorithm that finds optimal solutions for problems.

* 國防大學院

1. 序　論

增加되는 수요에 의해 생산용량을 擴張시키는 경우는 사기업 및 공공서비스사업등에서 흔히 찾아 볼 수 있다. 이와 같은 容量擴張問題(capacity expansion problem)는 주로 現在價値를 最少化할 수 있도록 추가(확장)되는 생산시설의 規模, 時期, 그리고 位置를 결정하는 것이다.

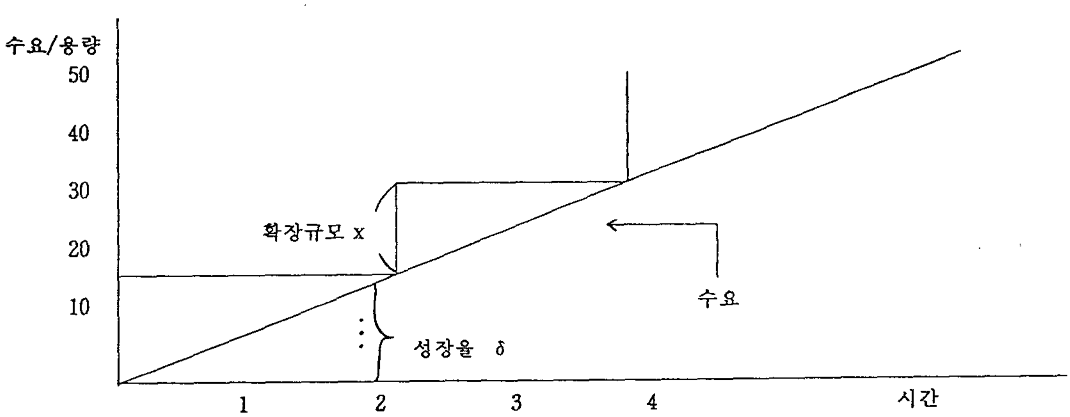
용량확장에 관한 최초의 연구로는 1958년에 單一 施設의 생산, 재고문제를 다룬 Wagner와 Whitin[8]의 硏究를 들 수 있다. 이들은 動的計劃法을 이용하여 향후 n週期 동안의 각 주기별 生産量을 결정할 수 있는 롯사이즈문제(lot-size problem)를 提示하였다.

이후 용량확장문제를 해결하기 위해 여러가지 模型과 解法들이 서로 상이한 응용분야에서 많은 사람들에 의해 운영분석적 방법을 이용하여 硏究 開發되어 왔다. 예를 들면, 인도에서 實際 事例(철광석 생산계획 등)를 연구한 Manne[7], 生産·在庫分野에서 네트웍 極點解의 특성을 제시한 Zangwill[10], 通信施設擴張模型을 연구한 Luss[4, 5, 6] 등이 그것이다.

<그림 1>은 수요가 일정한 용량에 도달하면 용량을 x단위 증가시키는 단일 시설용량확장문제를 보여준다. 이 때 最適擴張規模는 확장을 통한 규모의 경제성(economies of scales)과 割引率에 따르게 된다. 가장 간단한 모형은 Manne[7]이 제시한, 수요가 매년 δ율로 線型增加하는 결정적 수요를 갖는 경우이다. 그는 한번 설치된 시설은 無限經濟壽命을 갖고, 수요가 일정용량에 이르면 용량이 x단위 증가한다고 가정하였다.

Manne은 $f(x)$를 용량 x의 擴張費用, δ를 수요증가율, r을 割引率이라 할 때 무한기간에 걸친 모든 확장에 대한 總 割引費用 $C(x)$를 다음과 같이 계산하였다.

$$C(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-rkx/\delta) f(x)$$



<그림 1> 容量擴張 過程

$$= f(x)/[1-\exp(-rx/\delta)] \qquad (1)$$

여기에서 擴張費用函數 $f(x)$는 대량확장에 의한 規模의 經濟性 原理에 의하여 일반적으로 오목함수(concave function)로 간주된다. 가장 많이 이용되는 확장비용함수로는 수요가 시간에 따라 지수적으로 변하는 경우에 상용되는 멱승비용함수 (power cost function)

$$f(x)=Kx^{\alpha} \quad (0<\alpha<1), \quad x\geq 0 \qquad (2)$$

와 수요가 일정한 성장율에 따라 선형증가하는 경우에 사용되는 固定費用函數(fixed charge cost function)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x=0 \\ A + Bx, & x > 0, \end{cases} \qquad (3)$$

그리고 위 2개의 결합형으로 나타난다.

單一施設을 갖는 생산·재고모형은 대부분이 한정된 시간범위를 다루는 有限計劃期間問題로 다루어 진다. 일반적으로 이러한 모형에서의 시간(time scale)은 이산형 시간주기 $t=1,2,\ldots,T$로 제시된다.

單一施設 容量擴張問題에서, r_t는 주기 t에서 추가용량을 필요로 하는 수요의 증가량, x_t 및 $f_t(\cdot)$는 각각 주기 t에서의 확장량 및 확장비용, I_t 및 $h_t(\cdot)$는 각각 주기 t말에서의 초과용량(또는 재고량) 및 초과용량유지비용을 의미한다.

용량부족이 허용되지 않는다면 주기 1에서 주기 T까지의 總割引費用은 各 週期에서 발생된 모든 용량확장 및 재고유지에 소요된 비용의 합이다. 單一擴張模型의 목적함수는 總割引費用을 최소화하는 시설확장대안에 관한 확장량과 재고량을 결정하는 것이다. 여기서 재고량은 0 또는 0보다 크며, 시설확장 계획기간의 시작과 말에서 재고량은 0이라고 가정한다. 또한 t의 재고량 I_t는 週期 t-1의 재고량 I_{t-1} 과 週期 t의 확장량 x_t 에서 週期 t의 수요증가량 r_t 를 뺀 값이다. 이를 수식으로 요약하면 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\text{최소화} \quad \sum_{t=1}^{T} [f_t(x_t)+h_t(I_t)] \qquad (4)$$

$$\text{제약조건} \quad I_t = I_{t-1} + x_t - r_t$$

$$t=1,2,\ldots,T$$

$$I_t \geq 0$$

$$I_0 = I_T = 0$$

施設이 2개인 문제는 각 확장에 있어서 위치(또는 형태)에 대한 새로운 차원(new dimension)을 필요로 한다. 어느 위치 $i(i=1,2)$에서의 용량은 다른 위치$j(j=1,2,\ j\neq i)$에서 요구하는 需要를 충족시킬 수 있으며 일정한 輸送費가 발생될 수 있다.

1985년 Lee[2]는 생산과 수요를 동시에 갖는 2개 地域의 롯사이즈모형에 대해 연구하였다. 그는 각 지역에서의 한정된 T 週期 동안의 수요는 알고 있고, 수요는 생산, 재고 및 수송에 의해서만 충족되며, 계획기간의 시작과 마지막 時點에서 재고량은 0으로 가정하였다. x_{it}를 週期 t에 지역 i에서의 생산증가량$(i=1,\ 2)$, y_{it}를 週期 t에 지역 i로부터 j로의 수송량 (단 $j\neq i$), I_{it}를 週期 t의 말에 지역i에서의 재고량, r_{it}를 週期 t에 지역 i에서의 수요증가량, k_{it}를 週期 t에서 지역 i의 고정생산비, c_{it}를 週期 t

에서 지역 i의 단위당 생산비, g_{it}를 週期 t에서 지역 i로부터 j로의 단위당 수송비($j \neq i$), h_{it}를 지역 i에서 週期 t로부터 t+1까지의 단위당 재고유지비라고 하자.

향후 T 週期 동안의 2개 지역에 대한 需要를 알고 있다고 할 때 生産增加計劃을 樹立하는 目的은 주기 1에서 주기 T까지 발생된 고정비용, 생산증가비용, 재고유지비용 및 수송비용의 합을 최소화하는 생산대안 즉, 각 주기별 2개 지역에서의 생산증가량, 재고량 및 수송량을 決定하는 것이다.

이때 주기 t에서 지역 i에 대한 需要增加量 r_{it}는 주기 t-1에서의 在庫量 I_{it-1} , 주기 t에서의 생산증가량 x_{it} 및 주기 t에 지역 j에서 들어오는 輸送量 y_{jt}를 모두 합한 것에서 주기 t에 지역 i에서 지역 j로 輸送된 量 y_{it}와 주기 t에서의 在庫量 I_{it}를 감한 것이 된다. 여기에서 生産增加量 x_{it} 와 輸送量 y_{it} , 在庫量 I_{it} 는 모두 0 또는 0보다 큰 값을 갖는다.

$\delta(x_{it})$를 生産增加時에는 1, 생산증가가 이루어지지 않을 때는 0인 二變量 變數라고 하면 $t=1, 2, \ldots, T$, $i, j=1, 2$, $i \neq j$에 대하여 위의 내용은 다음과 같은 數式으로 要約될 수 있다.

$$\text{최소화} \quad \sum_{i=1}^{2} \sum_{t=1}^{T} [\, k_{it}\,\delta(x_{it}) + c_{it}x_{it} + g_{it}y_{it} + h_{it}I_{it}] \tag{5}$$

제약조건

$$I_{i,t-1} + x_{it} + y_{jt} - y_{it} - I_{it} = r_{it} \tag{6}$$

$$I_{i0} = I_{it} = 0 \tag{7}$$

$$x_{it} \geq 0, \quad y_{it} \geq 0, \quad I_{it} \geq 0 \tag{8}$$

$$\delta(x_{it}) = \begin{cases} 1, & x_{it} > 0 \\ 0, & \text{기타} \end{cases} \tag{9}$$

Lee는 어떤 주기 t에서 2개 지역에서 재고량이 최소한 하나라도 0인 주기 t를 생산점(production point)이라고 정의하고, 이를 이용하여 위의 문제를 마디들이 생산점이 되도록 하는 最短經路 네트워크問題로 변화시켰다. 그런 다음에 순환식(recursion)을 유도하여 動的計劃法으로 해를 구하는 매우 효율적인 알고리즘을 개발하였다.

그러나 Lee의 模型은 생산증가량이 항상 0 또는 0보다 큰 경우만을 고려함으로써 需要減少로 생산시설이 축소되는 경우는 적용하기 곤란하고, 在庫量의 上限값에 대한 고려가 되어 있지 않다. 또한 生産, 輸送 및 在庫 維持에 소요되는 비용이 수량에 따라 模型增加하는 특수한 비용구조인 점도 현실적으로는 상당한 제약이 될 수 있을 것이다.

本 硏究는 이러한 문제점을 보완할 수 있도록 2개 지역 生産施設에 있어서 需要減少로 시설규모가 감소하는 경우를 허용하고 재고의 上限値가 존재하는 경우를 고려하며, 生産增加(減少), 輸送 및 在庫維持時 발생되는 모든비용은 規模의 經濟性을 반영할 수 있는 生産 및 在庫模型을 설정하고 그 解法을 개발한다.

硏究目的을 달성하기 위하여 첫째, 施設容量減少가 허용되고 재고량의 上限이 부여되는 경우에 대한 생산 및 在庫模型을 有限計劃期間을 갖는 결정적 용량확장문제의 관점에서 설정하며, 둘째, 설정된 模型을 단일 출발지를 갖는 네트웍(single source network)으로 나타

내고, 이러한 네트웍에서 실행가능해의 극점흐름 특성을 살펴보며, 셋째, 극점흐름 특성을 이용하여 動的計劃法으로 최적해를 구하는 알고리즘을 수립한다.

2. 生産容量減少가 許容되는 2個 生産施設의 生産 및 在庫模型

가. 模型設定

본 연구는 Lee〔2〕의 연구에 부가하여 生産容量이 감소되는 경우를 허용하고, 在庫量이 상한선을 가지며, 모든 費用函數가 오목함수로 가정된 2개지역에 관한 生産 및 在庫模型을 設定한다.

본 연구에서는 어떤 단일 상품에 대한 生産活動과 수요가 2개 地域의 각각에서 發生되는 生産 및 在庫管理體系에서 향후 T 주기에 대한 각 지역에서의 需要는 알고 있다고 가정한다. 또한 費用은 生産增加(減少), 輸送 및 在庫維持에 의한 것만 고려하며 모든 費用函數는 오목(concave)이라고 가정한다. 計劃期間의 시작과 마지막 時點에서 在庫量은 0 이며

本 硏究에서 사용되는 變數는 다음을 의미한다.

r_{it} : 週期 t의 시작시점에 발생된 지역 i에서의 需要增加量으로서 정수(需要增加인 境遇는 양수, 需要減少인 境遇는 陰數)

$R_i(t_1 t_2)$: 週期 t_1에서 週期 t_2까지 地域 i의 總 需要增加量

x_{it} : 週期 t初期에 地域 i의 生産 增加量(增加時 $x_{it} > 0$, 減少時 $x_{it} < 0$)

Y_{it} : 週期 t에 地域 i로부터 j로의 輸送量, $j \neq i$.

I_{it} : 週期 t의 初期에 地域 i가 保有한 在庫量.

W_{it} : 週期 t의 초기에 지역 i의 在庫上限値(정수), $0 \le W_{it} \le \infty$.

$C_{it}(x_{it})$: x_{it}에 대한 生産증가 또는 減少費用函數.

$g_{it}(y_{it})$: y_{it}에 대한 輸送費用函數.

$h_{it}(I_{i,t+1})$: 주기t에서 t+1까지 재고량 $I_{i,t+1}$의 在庫維持費用函數.

모든 費用函數는 0에서 멀어질수록 非減少이고 오목(concave) 함수이며 생산증가(감소) 비용함수 $c_{it}(x_{it})$를 제외하고 모든 費用函數의 범위는 0에서 ∞이다. 반면에 $c_{it}(x_{it})$는 0 에서 ∞와 0에서 -∞의 구간을 갖는다. $c_{it}(x_{it})$가 전구간(-∞, ∞)에서 오목일 필요는 없다. 이러한 函數를 Zangwill〔9〕은 부분오목함수(piecewise concave function)라고 정의하였다. 편의상 $c_{it}(0) = g_{it}(0) = h_{it}(0) = 0$ 이라고 假定한다.

향후 T주기 동안의 2개 지역에 대한 需要를 알때 이를 충족하기 위한 생산량 증가 방침은 주기 1에서 주기 T까지 발생된 총 비용을 最小化하는 것이다. 여기에서 고려되는 비용은 生産增加(減少)費用, 輸送費用 및 在庫維持費用이므로 目的函數는 총 비용을 최소화하는 각 주기에서의 각 지역별 생산증가(감소)량, x_{it} ,

수송량 y_{it} 및 재고량 I_{it}을 결정하는 것이다.

이때 生産增加(減少)費用函數 $c_{it}(x_{it})$의 구조는 수요증감 변화의 양상에 따라 식(2) 또는 식(3)의 어떤 형태도 가능하다. 예를 들면 고정비용함수인 形態에서는 $(A_i + B_i x_{it})\ r^{t-1}$로 놓을 수 있다(여기에서 A_i, B_i는 地域特性常數, x_{it}는 生産增加(減少)量, r은 割引率). 또한 수송비용 및 재고비용함수도 각각 이와 유사한 구조를 가지며, 이용하려는 상황에 적합한 비용구조로 가정할 수 있다. 이러한 비용함수구조는 수량이 대량으로 다루어지는 대부분의 실제상황에서 生産, 輸送 및 在庫費用이 規模의 經濟性에 따라 限界費用이 감소하게 되므로 보다 합리적이라고 할 수 있다.

위의 내용에 의하여 총비용을 최소화하는 식은 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\text{최소화} \quad \sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{2} [\ c_{it}(x_{it}) + g_{it}(y_{it}) + h_{it}(I_{i,t+1})] \tag{10}$$

어느 한 주기에서의 在庫量은 그 前週期에서 이루어진 생산, 수송, 외부수요량 및 재고량에 의하여 결정된다. 즉, 지역 i에 대한 주기 t+1에서의 재고량은 주기 t에서의 재고량, 生産增加(減少)量 및 지역 j에서 지역 i로의 수송량의 합에서 주기 t에서 지역 i에 대한 수요량과 지역 j로 수송된 양을 뺀 것이 된다.

$$I_{i,t+1} = I_{it} + x_{it} - y_{it} + y_{jt} - r_{it} \tag{11}$$

거의 모든 실제상황에서 창고용량은 어떤 제한을 갖는다. 어떤 주기 t에서의 각 지역별 재고량은 상한값 W_{it}를 초과할 수 없다. 즉,

$$0 \le I_{it} \le W_{it} \tag{12}$$

가정에 의하여 계획기간의 시작과 마지막에서의 재고량은 0이다.

$$I_{i0} = I_{i,T+1} = 0 \tag{13}$$

또한 수송량 y_{it}는 항상 0보다 크거나 같다.

$$y_{it} \ge 0 \tag{14}$$

最適生産代案 즉, 주기1에서 주기 T 동안에 걸쳐 각 주기에서 각 지역별 生産增加(減少)量, 輸送量 및 在庫量을 결정하기 위한 모형은 식(10)-식(14)에 의해서 다음과 같이 要約 될 수 있다.

$$\text{최소화} \quad \sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{2} [\ c_{it}(x_{it}) + g_{it}(y_{it}) + h_{it}(I_{i,t+1})]$$

제약조건

$$I_{i,t+1} = I_{it} + x_{it} - y_{it} + y_{jt} - r_{it}$$

$$0 \le I_{it} \le W_{it}$$

$$I_{i0} = I_{i,T+1} = 0$$

$$y_{it} \ge 0$$

여기에서, $t=1, 2, \cdots, T \quad i, j=1, 2 \ (j \neq i)$

여기에서 變數 x_{it}는 2개의 非陰變數의 차로 대체된다고 假定한다. 즉, $x_{it} = x_{it}' - x_{it}''$이다. 여기에서 $x_{it}' \ge 0$는 生産增加量, $x_{it}'' \ge 0$는 감소된 생산량을 나타낸다. 제한식 (11) - (14)는 볼록집합(a nonempty convex set)을 形成하며, 목적함수의 각 항이 0에서 한정된 값을 가지면서 0에서 멀어질수록 非減少하므로 유한한 最適解가 存在한다. x_{it}가 2개의 非陰變數로 대체되면, 목적함수는 全體實行可能域에서 오목이며 따라서 하나의 極點最適解가 存在하게 된다[10]. 식(11)이 전체적으로 단일모듈

(totally unimodular) 이고, r_{it}, w_{it}가 整數로 假定되었으므로 Hu[1]에 의하여 이 문제에 관한 極點解는 整數가 된다.

나. 模型解法

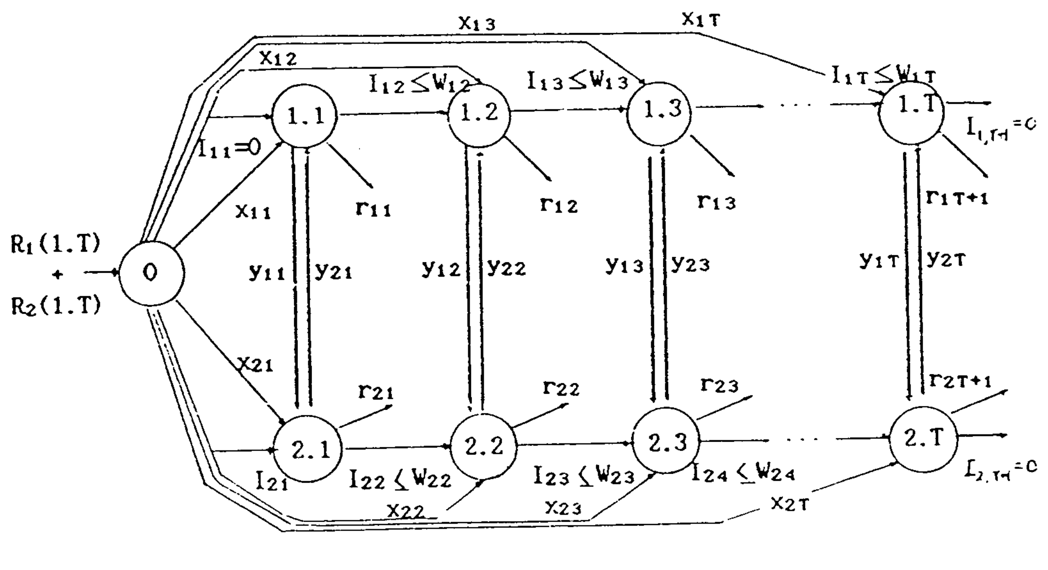
문제(10)-(14)는 〈그림 2〉와 같은 네트웍 흐름으로 나타낼 수 있다.

〈그림 2〉에서 처럼 이 네트웍은 $R_1(1,T) + R_2(1,T)$의 供給量을 갖는 단일 출발지(마디 0)를 갖는다. 따라서 총 마디의 수는 2T+1개이다. 이들 각 마디는 (i, t)로 표시되는 데 i는 地域, t는 週期를 意味한다. 각 마디에는 외부수요 r_{it}가 存在하며 r_{it}는 陰數도 可能하다. 마디를 連結하는 호는 生産增加(減少), 輸送 및 在庫量 등의 흐름을 갖는다. 이때 x_{it}의 흐름을 갖는 호의 방향은 양방향이다.

각 마디들은 다음과 같은 호에 의해 連結되어 있다.

- 마디 0에서 각 마디(i, t)로 x_{it}의 흐름을 갖는 호. 이때 x_{it}가 陰數이면 마디 (i, t)에서 마디 0으로 흐른다.
- 각 마디(i, t)에서 마디(i, t+1)로 흐름량 $I_{i,t+1}$을 갖는 호
- 각 마디(i, t)에서 (j, t)로 흐름량 y_{it}를 갖는 호

식(10)-(14)에서는 x_{it}를 非陰인 2개의 변수의 차로 수정 할 수 있다. 이렇게 修正된 문제의 極點解가 만약 모든 I_{it}가 $0 < I_{it} < w_{it}$를 만족하는 양의 흐름을 갖는 어떤 循環(cycle)도 包含하고 있지 않으면 이것은 〈그림 2〉에 제시된 네트웍의 實行可能흐름과 同一하다 (필요충분조건)



〈그림 2〉 모형의 네트웍 흐름

Lee가 소개한 生産點(production point)은 "최소한 한 지역 i에서의 在庫量 I_{it}가 0을 갖는 週期 t"로 定義 된다. 그러나 本 硏究에서는 이것을 "최소한 한 지역 i에서의 在庫量 I_{it}가 0 또는 w_{it}를 갖는 週期 t"라고 定義 한다. 극점최적해가 정수이므로 $t=1,2,...,T$에 대하여 生産點의 집합은 다음과 같게 된다:

$I_{11} = I_{21} = 0$

$I_{1t} = (0,\ W_{1t})$; $I_{2t} = (0,\ W_{2t})$

$I_{1t} = (0,\ W_{1t})$; $I_{2t} = (1,2,\cdots,\ W_{2,t-1})$

(15)

$I_{2t} = (0,\ W_{2t})$; $I_{1t} = (1,2,\cdots,\ W_{1,t-1})$

$I_{1t,T+1} = I_{2,T+1} = 0$

生産點의 값을 편의상 단일모수(simple parameter) α_t로 定義하자. 예로써, $\alpha_t = 1, 2, 3, 4$는 식(15)에 提示된 條件을 組合하여 具體化하는데 利用될 수 있다. 즉, ($I_{1t} = 0$, $I_{2t} = 0$)일 때 $\alpha_t=1$, ($I_{1t} = 0$, $I_{2t} = W_{2t}$)일 때 $\alpha_t = 2$ ($I_{1t} = W_{1t}$, $I_{2t} = 0$) 일 때 $\alpha_t = 3$, ($I_{1t} = W_{1t}$, $I_{2t} = W_{2t}$) 일 때 $\alpha_t = 4$ 로 할 수 있다. 生産點의 집합은 식(16)에 의하여 制限될 수 있으며 이것은 週期 t 初期의 總在庫量은 週期 t에서 T까지의 蓄積되는 需要를 超過할 수 없다는 것을 나타낸다.

$$I_{1t} + I_{2t} \le R_1(t,T) + R_2(t,T) \qquad (16)$$

식(10)-(14)를 풀기 위하여 이것을 最短經路問題로 構成한다.

$d_{uv}(\alpha_u,\ \alpha_{v+1})$를 주기 u와 v+1이 연속되는 生産點이고, 그 값이 각각 α_u, α_{v+1}일 때 식(10)-(14)의 極點解와 관련한 週期 u, u+1, ... , v 동안의 최소비용으로 定義하고 수식으로 나타내면 다음과 같다.

$$d_{uv}(\alpha_u,\ \alpha_{v+1}) = \min_{x_{it},\, y_{it}} \sum_{t=u}^{v} \sum_{i=1}^{2} [\ c_{it}(x_{it}) + g_{it}(y_{it}) + h_{it}(I_{i,t+1})] \qquad (17)$$

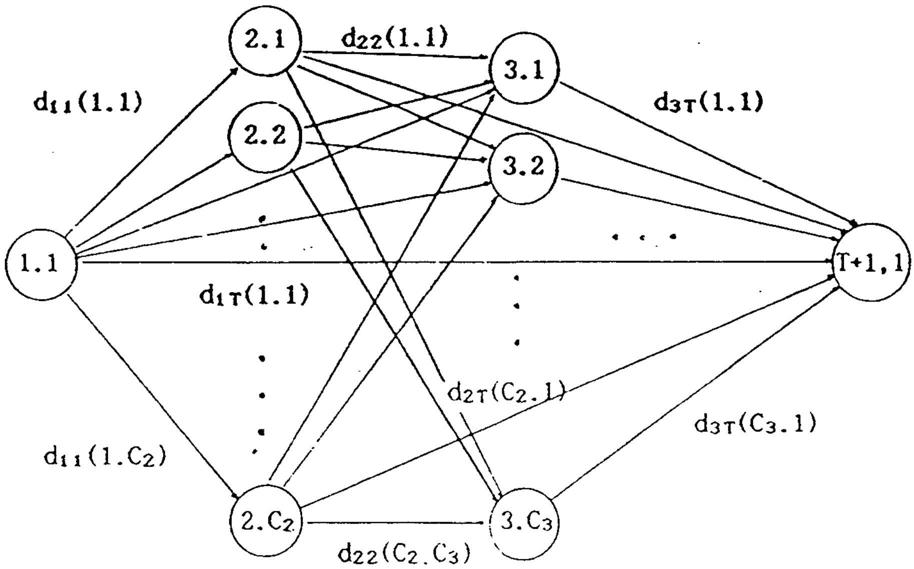
여기에서 원 문제의 제약조건인 식(11)은 $t= u, u+1, \cdots, v$에 限定되며, $i = 1, 2$ 및 $t = u+1,\ u+2,\ \cdots,\ v$에 대하여 $0 < I_{it} < W_{it}$ 이다. 또한 I_{1u} 와 I_{2u}는 α_u로 定義되며 $I_{1,v+1}$과 $I_{2,v+1}$은 α_{v+1}로 定義된다.

모든 d_{uv}값을 알면 最適解는 生産點의 最適發生順序(optimal sequence of production point)와 그 값을 探索함으로써 구할 수 있다.

〈그림 3〉에서 알 수 있는 것처럼 식(10)-(14)는 마디들이 生産點의 가능한 값을 나타내는 最短經路問題로 구성할 수 있다. 각 마디는 2개의 값(t, α_t)에 의해 나타나는 데 t는 週期, α_t는 生産點의 값이다. 각 마디는 (u, α_u)로부터 $v \ge u$인 $d_{uv}(\alpha_u,\ \alpha_{v+1})$ 의 費用을 갖는 호에 의해 다른 마디 (v+1, α_{v+1})로 직접 연결된다. 여기에서 C_t를 주기 t에서 生産點값의 가능한 수라 하자. $C_1 = C_{T+1} = 1$ 이다. 그리고 모든 다른 週期에서의 C_t는 식(15)-(16)을 통해 구할 수 있다. 만약 N을 위 最短經路問題에서 호의 總 數라면

$$N = \sum_{i=1}^{T} C_i \left[\sum_{j=i+1}^{T+1} C_j \right].$$

모든 容量擴張問題에서 大部分의 計算量은 $d_{uv}(\alpha_u,\ \alpha_{v+1})$을 구하는 데 集中된다. 따라서 可能하면 N을 減少시키는 것이 重要하다. 實



〈그림 3〉 最短經路問題의 네트웍 흐름

際應用問題에서는 W_{it}에 적정한 값을 附與하여 C_t의 값을 減少시킨다.

위의 最短經路問題는 간단한 動的計劃法을 利用하여 풀 수 있다. 먼저 α_t를 정수 1, 2, …, C_t의 집합으로 나타내자. 여기서 $\alpha_{t=1}$은 $I_{1t} = I_{2t} = 0$을 意味한다. 다음에 $f_t(\alpha_t)$를 週期 t가 하나의 生産點이고, I_{1t}와 I_{2t}가 α_t에 의해 구체화 될 수 있다고 할 때 週期 t, t+1, …, T 동안의 最適代案에 대한 費用이라 하자. 그러면 다음과 같은 動的計劃式을 얻을 수 있게 된다.

$$f_{T+1}(\alpha_{T+1}) = 0, \quad \alpha_{T+1} = 1$$

$$f_u(\alpha_u) = \min_{\substack{u \le v \le T \\ 1 \le \alpha_{u+1} \le C_{v+1}}} [\, d_{uv}(\alpha_u, \alpha_{v+1}) + f_{v+1}(\alpha_{v+1}) \,] \qquad (18)$$

단, u = T, T-1, …, 1 α_u = 1, 2, …, C_u

여기에서 식(18)의 첫번째 항은 週期 u, u+1, …, v동안 最適方針에 대한 最小費用이며 이때 u와 v+1은 값 α_u와 α_{v+1}을 갖는 2개의 연속되는 生産點들이다. 두번째 항은 α_{v+1}이 주어졌을 때 주기 v+1, v+2, …, T 까지의 最適費用이다. 식(18)은 週期 u=T에서 始作하여 u=1에서 終了되는 後方 動的計劃式 (backward dynamic programming)이며 α_1=1을 갖는 費用 $f_1(\alpha_1)$이 식(10)-(14)의 最適解가 된다.

Lee의 硏究에서처럼 $r_{it} \ge 0$, $x_{it} \ge 0$, $W_{it} = \infty$인 境遇와 比較하여 r_{it} 및 x_{it}가 음수를 허용하는 경우는 部分問題 $d_{uv}(\alpha_u, \alpha_{v+1})$를 푸는 計算量은 크게 增大할 수 밖에 없다. 따라서 d_{uv}

(α_u, α_{v+1}) 을 보다 효율적으로 구할 수 있는 方法의 開發이 매우 重要하다.

〈그림 4〉는 전체문제중에서 주기 u에서 주기 v까지에 해당하는 部分問題의 네트웍 흐름을 보여 주고 있다.

〈그림 4〉에서 部分問題 $d_{uv}(\alpha_u, \alpha_{v+1})$ 의 실행가능 흐름은 만약 다음 特性을 滿足하면 그 네트웍내에 循環(cycle)을 포함하지 않음을 알 수 있다.

$$x_{it1}\ x_{it2} = 0 \quad (t_1 = t_2) \quad i = 1, 2 \qquad (19)$$

$$y_{it1}\ y_{it2} = 0 \quad (t_1 = t_2) \qquad u \le t_1, t_2, t_3 \le v \quad (20)$$

$$x_{it_1}\ x_{jt_2}\ y_{it_3} = 0 \qquad (21)$$

식 (19)는 $d_{uv}(\alpha_u, \alpha_{v+1})$ 의 最適解에서 各地域에 대해 많아야 한번의 生産增加 또는 감소가 있어야 됨을 나타내고 식(20)는 많아야 한개 地域의 輸送이 가능함을 보여준다. 또한 식(21)은 한개 地域에서 한번씩 두번의 生産增加나 廢棄가 발생되면 輸送은 고려될 수 없다는 것을 의미한다.

D_i 를 "주기 u, u+1, …, v동안 지역 i에서의 生産容量의 變化量"이라 定義하자. 즉,

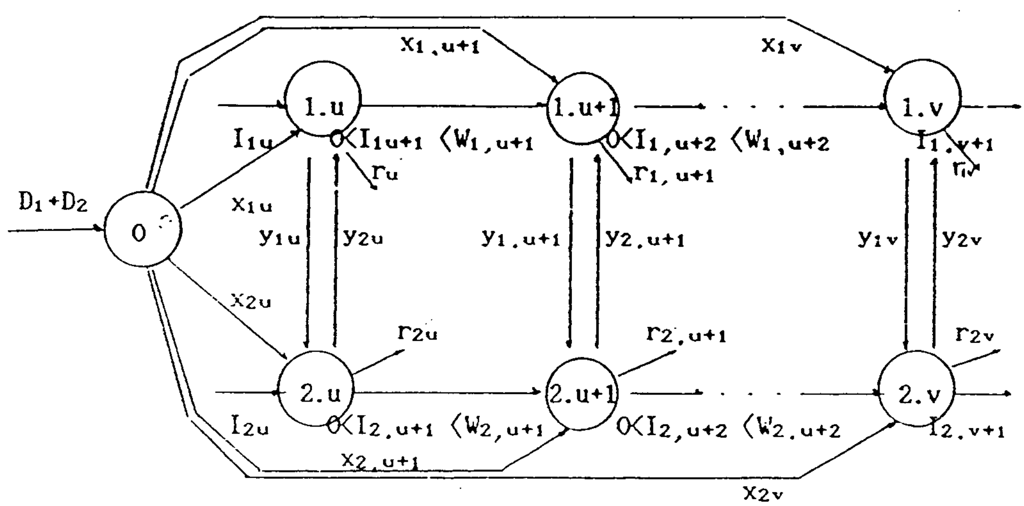
$$D_i = I_{i,v+1} + R_i(u, v) - I_{iu}, \quad i = 1, 2 \qquad (22)$$

또는

$$D_1 = \sum_{t=u}^{v} (x_{1t} - y_{1t} + y_{2t})$$

$$D_2 = \sum_{t=u}^{v} (x_{2t} - y_{2t} + y_{1t}) \qquad (23)$$

t_1과 t_2를 $u \le (t_1, t_2) \le v$ 인 2개의 週期라 하자. 식(19)-(21)에 提示된 最適特性으로부터 어떤 部分問題 $d_{uv}(\alpha_u, \alpha_{v+1})$ 의 최적해를 구하는 가능한 代案들은 3가지로 制限될 수 있다. 이러한 方針들이 〈표 1〉에 要約되어 있다. $D_1 \le 0$ 및 $D_2 \ge 0$인 열을 보면서 표를 說明한다. 代案(a)는 地域 1에서 D_1容量의 감소를 가리킨다. 代案(b)는 만약 $D_1 + D_2 \ge 0$이면 地域 1



〈그림 4〉 부분문제의 네트웍 흐름

에 대해 容量 D_1+D_2단위의 增加를 $D_1+D_2 \leq 0$이면 지역 1에서 D_1+D_2단위 만큼 감소를, 그리고 지역1에서 2로 D_2만큼 輸送한다는 것을 意味한다. $D_1+D_2=0$이면 生産增加 또는 감소는 이루어지지 않는다. 代案(c)는 $D_1+D_2 \geq 0$이면 지역 2에서 D_1+D_2容量을 增加하고 $D_1+D_2 \leq 0$이면 지역 2에서 D_1+D_2容量을 감소시키며 지역 1에서 2로 D_1만큼 輸送한다는 것을 意味한다. 따라서 部分問題 $d_{uv}(\alpha_u, \alpha_{v+1})$ 의 最適解는 다음 節次를 통해 얻어진다.

(1). 〈표 1〉에서 代案 (a), (b) 및 (c)의 각각에 대하여 식(16)으로 제시된 $d_{uv}(\alpha_u, \alpha_{v+1})$ 의 값을 最少化하는 t_1과 t_2의 최적값을 찾는다. 만약 t_1 및 t_2에 대한 實行可能解가 存在하지 않으면 해당 대안의 값(비용)은 무한대로 놓는다.

(2). (1)에서 찾은 것 중 最善의 것을 最適案으로 選定한다. 代案 중 아무 것도 實行可能하지 않으면 $d(\alpha_u, \alpha_{v+1}) = \infty$ 이다.

다. 例題

向後 3個 週期동안의 需要를 알고 있는 例題를 考慮한다. $(r_{11}, r_{12}, r_{13}) = (1, -1, 1)$, $(r_{21}, r_{22}, r_{23}) = (1, -1, 1)$ $(w_{12}, w_{13}) = (1, 2)$, $(w_{22}, w_{23}) = (2, 2)$

費用函數는 〈표 2〉와 같다.

〈표 1〉 部分問題 最適解의 可能한 代案

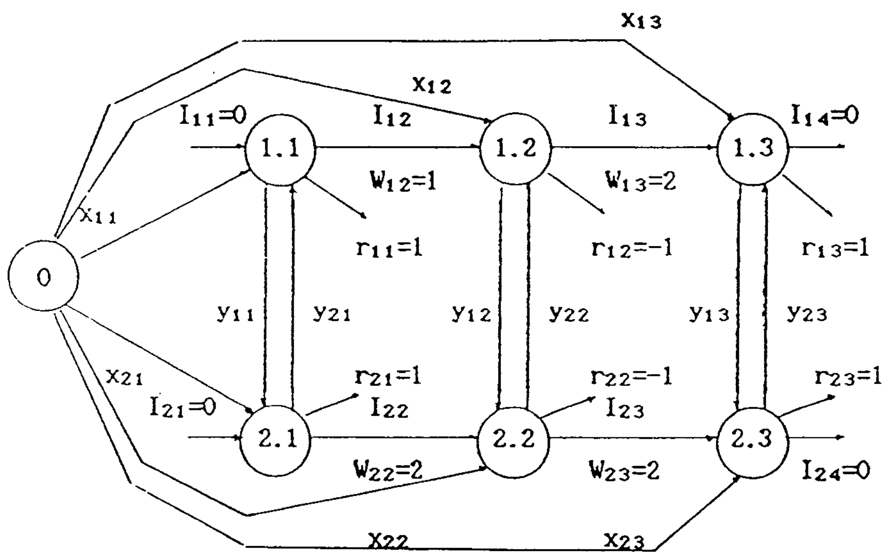
대안 \ D_1, D_2	$D_1 \geq 0$ $D_2 \geq 0$	$D_1 \leq 0$ $D_2 \geq 0$	$D_1 \geq 0$ $D_2 \leq 0$	$D_1 \leq 0$ $D_2 \leq 0$
(a) $x_{1t1}=D_1$, $x_{1t}=0$, $t \neq t_1$ $x_{2t2}=D_2$, $x_{2t}=0$, $t \neq t_2$ $y_{it}=0$, 단, $t=1, 2, \cdots, T$ $i=1, 2$	生産增加 生産增加	減少 生産增加	生産增加 廢棄	減少 減少
(b) $x_{1t1}=D_1+D_2$, $x_{1t}=0$, $t \neq t_1$ $y_{it2}=D_2$, $y_{it}=0$, $t \neq t_2$ $x_{2t}=0$, 단, $t=1, 2, \cdots, T$ $i=1, 2$	生産增加 지역1에서 2로 輸送	生産增加 또는 減少 지역 1에서 2로 輸送	生産增加 또는 減少 2에서 1로 輸送	減少 2에서 1로 輸送
(c) $x_{1t1}=D_1+D_2$, $x_{2t}=0$, $t \neq t_1$ $x_{it2}=D_1$, $y_{it}=0$, $t \neq t_2$ $x_{1t}=0$, 단, $t=1, 2, \cdots, T$ $i=1, 2$	生産增加 2에서 1로 輸送	生産增加 또는 減少 1에서 2로 輸送	生産增加 또는 減少 2에서 1로 輸送	減少 1에서 2로 輸送

〈표 2〉 例題의 費用函數

함수 구분	$C_{1t}(x_{1t})$	$C_{2t}(x_{2t})$	$h_{it}(I_{i,t+1})$	$g_{it}(y_{it})$
양수	$(30+8x_{1t})0.9^{t-1}$	$(20+10x_{2t})0.9^{t-1}$	$5I_{i,t+1}0.9^{t-1}$	$5y_{it}0.9^{t-1}$
0	0	0	0	0
음수	$7 \cdot 0.9^{t-1}$	$6 \cdot 0.9^{t-1}$	0	0

이 例題를 네트웍으로 圖示하면 〈그림 5〉와 같다.

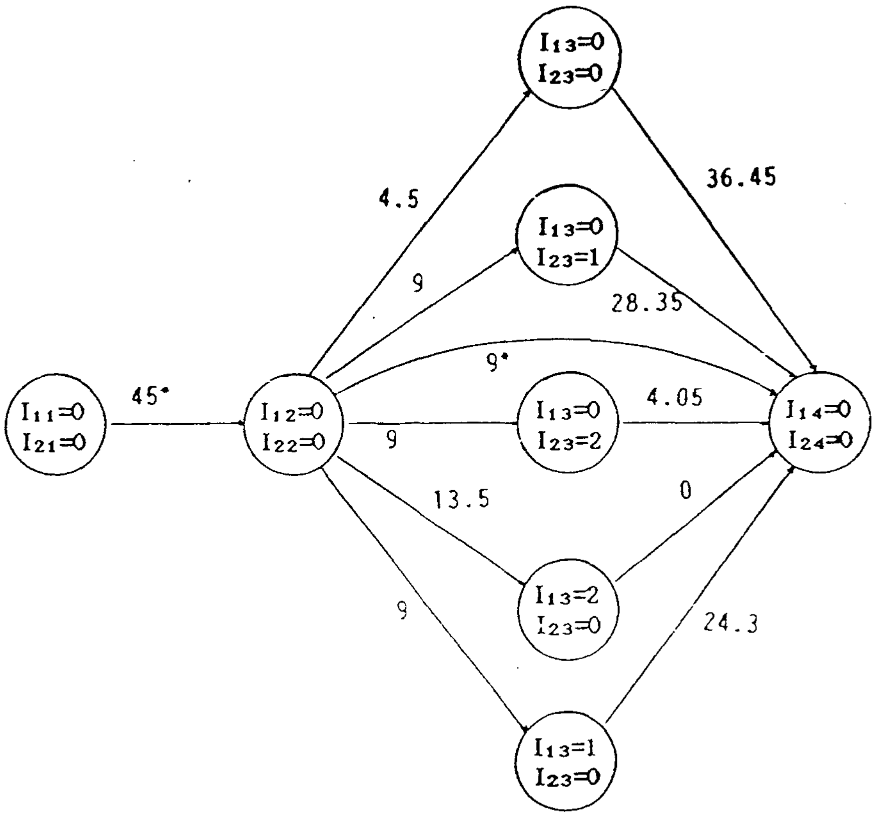
이것을 다시 最短經路問題로 構成한 것이 〈그림 6〉에 提示되어 있다. 〈그림 6〉에서 生産點의 값은 α_t 대신 I_{1t} 와 I_{2t}로 각 마디에 나타나 있다. 식(16)을 이용함으로써 一部 生産點값이 週期2와 3에서 省略되어 있다. 여기서 주기1에서 3 및 4로 가는 모든 호가 省略되어 있는 것은 $0 < I_{12} < w_{12}$ 에 해당하는 部分問題의 實行可能解가 없기 때문이다. 각 호에 제시된 숫자가 當該 部分問題의 最適解이다.



〈그림 5〉 예제의 네트웍 흐름

部分問題 $d_{11}(\alpha_1, \alpha_2)$를 고려하자. 여기서 α_1은 生産點값 $I_{11}=I_{21}=0$을 나타내고, α_2는 $I_{21}=I_{22}=0$을 나타낸다. 식 (17)에 의하여 $D_1=1$ 및 $D_2=1$이다. 표(3-1)의 結果를 利用하면 代案(a)는 $x_{11}=x_{21}=1$일 때 총 비용이 68이다. 代案(b)는 $x_{11}=2$, $y_{11}=1$에서 費用 46, 代案(c)는 $x_{21}=2, y_{21}=1$에서 費用 45이다. 따라서 代案(c)가 最適이다.

다음으로 $d_{23}(\alpha_2, \alpha_4)$를 고려하자. 여기서 α_2는 $I_{12}=I_{22}=0$ 이며 α_4는 $I_{14}=I_{24}=0$ 이다. 〈표 1〉로 부터 $D_1=D_2=0$ 이므로 모든 決定變數들은 3가지 代案 모두에서 0이며, 總 費用은 지역 1, 2에서 각 1개의 재고유지비용의 합인 9가 된다. 〈그림 6〉에 나타난 모든 호에 대한 部分問題를 계산한 후에 最短經路는 식(18)을 사용하여 구한다.



〈그림 6〉 예제의 최단경로 네트웍 흐름

例題에서 最短經路는 54이며 2개의 호로 이루어 진다. 첫번째 호는 마디 $I_{11}=I_{21}=0$과 $I_{12}=I_{22}=0$을 이어주며 두번째 호는 마디 $I_{12}=I_{22}=0$에서 마디 $I_{14}=I_{24}=0$으로 連結된다. 〈그림 6〉에서 最短經路는 별표로 표시되어 있다.

全體 問題의 最適解는 $x_{21}=2$, $y_{21}=1$이며 다른 모든 變數들 x_{it} 와 y_{it} 는 0 이다.

3. 結 論

本 研究는 각 지역에서 어떤 單一商品이 生産되고 消費도 이루어지며 각지역 상호간 輸送이 존재하는 경우 중에서 地域이 2개일 때의 生産 및 在庫模型을 취급하였다.

本 研究는 수요감소로 生産量이 감소되고, 在庫受容能力이 제한받는 경우 T 주기 동안에 발생되는 費用模型을 設定하고 이것을 최소화하는 生産方針 즉, 각 주기별 生産增加(減少)量, 輸送量 및 在庫量을 구하였다. 여기에서 費用模型은 생산비용, 수송비용 및 재고비용의 합을 최소화하는 것이며 각각의 비용은 一般的인 函數形態로 취급하였다.

설정된 模型의 해를 구하기 위하여 이 模型을 단일 출발지를 갖는 네트웍으로 나타내고 네트웍상에서 實行可能解의 극점흐름특성을 탐색하였다. 극점흐름특성을 이용하여 模型을 最短經路問題로 재구성하고 이것의 해는 動的計劃法으로 구하였다.

參 考 文 獻

1. Hu, T. C., *Integer Programming and Network Flows*(Addison Wesley, Roading, Massachusetts), 1969, pp. 124-127.
2. Lee, S. B., *A Two-Location Dynamic Lot-size Model with Transshipment*, Working Paper, Graduate School of Business, New York, Columbia University, 1985.
3. Lee, S. B., and H. Luss, "Multifacility Type Capacity Expansion Planning : Algorithms and Complexities", *Opns Res.*, 35, 1987, PP. 249-253.
4. Luss, H., "Capacity-Expansion Model for Two Facility Types", *Naval Res. Logist Quart.*, 26, 1979, pp. 291-303.
5. Luss, H., "Operations Research and Capacity Expansion Problems; A Survey", *Opns. Res.*, 30, 1982, pp. 907-947.
6. Luss, H., "A Multifacility Capacity Expansion Model with Joint Expansion Set-up Costs", *Naval Res. Logist. Quart.*, 30, 1983, pp. 97-111.
7. Manne, A. S., " Capacity Expansion and Probabilistic Growth", *Econometrica*, 29, 1961, pp. 632-649.
8. Wager, H. M., and T. M. Whitin, "Dynamic Version of the Economic Lot Size Model", *Mgmt. Sci.*, 5, 1958, pp. 89-96.
9. Zangwill, W. I., "The Piecewise Concave Function", *Mgmt. Sci.*, 13, 1967, pp. 900-912.
10. Zangwill, W. I., "Minimum Concave Cost Flow in Certain Network", *Mgmt. Sci.*, 14, 1968, pp. 429-450.