韓國軍事運營分析學會誌
第18卷, 第2號, 1992. 12. 31.

유방향 네트워크에서 최대물동량경로 문제에 관한 연구[1)]

(The Maximum Origin-Destination Flow Path Problem in a Directed Network)

성기석*, 송성헌**

Abstract

In this paper, we define a problem finding a simple path that maximizes the sum of the satisfied Origin-Destination(O-D) flows between nodes covered by that path as a Maximum O-D Flow Path Problem(MODFP).

We established a formulation and suggested a method finding MODFP in a directed network. The method utilizes the constraint rélaxation technique and the Dual All Integer Algorithm.

1. 서론.

오늘날 산업이 발달하고 각 지역간의 유기적인 연관성이 증가함에따라 지역간의 운송 서어비스에 대한 수요가 증가하게 되었고, 그러한 운송 서어비스 수요를 충족시키기 위해서 차량, 열차, 선박, 항공기 등의 수송수단을 이용하는 도로, 철도, 해운, 항공 등의 수송체계가 다양한 형태로 발전하여 왔다.

수송체계를 마디(node)와 호(arc)들로 이루어진 그래프로 나타낸것을 수송네트워크(transportation network)라 한다. 이러한 수

1) 이 연구는 '91년도 한국과학재단 연구비 지원에 의한 결과임.
* 강릉대학교
** 홍익대학교

송네트워크는 그것이 유도되는 수송체계에 따라 제각기 다른 특성을 가진다.

도시간의 수송체계는 주로 화물의 운송과 관련하여, 철도를 이용하는 열차, 고속도로 및 일반도로를 이용하는 정기화물트럭, 정해진 항로나 운하등을 따라 운항하는 콘테이너 선박, 공항을 이용하는 항공기 등을 들 수 있다.

반면 도시내의 수송체계는 주로 지역 주민의 출퇴근 및 일상생활에 따른 이동과 관련하여, 도시 가로망에서 정해진 경로를 따라 운행하는 노선버스와 지하철을 들 수 있다.

노선버스나 지하철은 정해진 출발지점에서 도착지점에 이르는 일정한 경로를 따라 운행하면서 그 경로상에서 경유하는 지점들 사이에 발생하는 운송수요를 충족시켜 준다. 그런데 이 경로는 그 물리적 특성과 제약으로 인하여 중도에 분리되거나 결합될 수 없다.

수송네트워크에서 경로의 가치를 그 경로상에 있는 지역들간에 운송되는 물동량의 합이라고 볼 수 있다. 예를 들어 새로운 고속도로나 철도를 건설할 경우에, 각 지역간의 연계의 중요도와 화물물동량등을 조사하여 가능한 한 많은 화물을 운송하고 지역간의 연계를 이룰 수 있도록 해야할 것이다. 버스나 지하철의 운행노선을 정할 때에도 각 지역간에 이동하는 승객수 등을 조사하여 가능한 한 많은 승객을 운송할 수 있도록 해야 할 것이다.

노선상에 포함되는 경유지역이 많을수록 더 많은 화물이나 승객을 운송할 수 있다. 그렇지만, 지형적인 특성에 의한 제약이나 건설비용의 제약, 또는 시설의 물리적, 기술적 제약등으로 인하여 모든 지역을 다 경유할 수 없는 경우도 있다. 이때, 어느 지역을 노선상에 포함시키고 또 어느 지역을 제외할 것인지를 결정해야 한다. 노선상에서 제외된 지역들에 대해서는 운송수요가 충족되지 않는다.

그래서 노선을 결정할 때는 전체지역들의 운송수요를 최대한으로 충족시키기 위해서 기술적, 지리적, 경제적 여건이 허용되는 범위내에서 전체지역간에 이동하는 물동량의 합이 최대가 되도록 해야 한다.

이와 같은 노선을 결정하는 문제를 최대물동량경로문제라 한다. 수송네트워크가 환을 가지지 않는 제한적인 경우에 대해서 단순경로인 최대물동량경로를 찾는 해법에 대한 연구는 성기석과 박순달[3, 4]에 의해서 이미 수행된 바 있다. 현실적으로는 수송네트워크가 환을 갖는 것이 더 일반적이다. 기존에 연구된 모형과 해법은 환이 존재하는 일반적인 유방향 수송네트워크에서는 적용될 수가 없다.

본 연구의 목적은 일반적인 유방향 네트워크에서도 단순경로인 최대물동량경로를 찾는 수리모형을 세우고 그에 대한 해법을 제시하는 것이다.

2. 연구배경.

J. R. Current[6]등은 경로에 의해서 만족되는 수요를 최대화하고, 또한 그 경로의 길이를 최소화하는 두가지 목표를 고려한 경로문제 (maximum covering / shortest path problem)를 모형화하고 가중치를 이용한 해법

을 제시하였다. 그들의 모형은 수송네트워크의 각 마디에 일정한 수요가 주어져 있고, 경로가 경유하면 그 마디의 수요가 만족되는 것으로 가정했다. 이 모형은 지방의 이동진료센타나 이동수리센타 등의 이동경로를 결정하는데 사용할 수 있으며, 새로운 고속도로, 철도, 지하철 등을 건설할 때, 각 지역의 인구밀도와 개별적인 중요도를 고려하여 그 경유지를 결정하는 경우에 사용할 수 있다.

그러나 고속도로나 철도, 지하철 등의 경우에는 단순히 어떤 한 지점을 경유하는 것만으로는, 그 지역과 다른 모든 지역들 사이의 기종점(origin-destination)간 물동량을 만족시켜 줄 수는 없다. 즉, 어떠한 두 지역 사이의 기종점간 물동량을 만족시켜주기 위해서는 경로상에서 두 지역이 연결되어야만 한다.

또 J. R. Current[7]등은 수송네트워크에서 고속도로의 경유지를 정함에 있어서, 고속도로의 길이에 따른 건설비용(construction cost)과, 고속도로가 통과하지 못하는 지역으로부터 고속도로까지의 접근거리에 따른 접근비용(accessibility cost)을 고려하여 정하는 문제를 경로문제로 모형화하고 최적해법을 제시하였다. 이 모형에서, 수송네트워크의 각 마디에 운송수요가 주어져있고, 각 마디로부터 정해진 경로까지의 최소거리와 그 마디의 운송 요량을 곱한 값의 총합을 접근비용으로 가정했다.

이 모형에서도 역시 운송수요를 각 마디에 주어진 것으로 가정하였고, 기종점에 따른 물동량을 고려하지 않았다. 여태까지 경로모형들은 이러한 운송수요를 수송네트워크상의 마디 각각에 대하여 주어진 것으로 가정한 모형들이었다. 따라서 운송수요를 수송네트워크상의 마디쌍들에 대하여 주어진것, 즉 기종점간의 물동량으로 보고 이들을 다루는 연구가 필요하다. 이 연구에서 다루는 최대물동량경로 문제는 이러한 기종점간 물동량을 최대로 만족시켜 주는 경로를 찾는 문제이다.

수리모형에 있어서도 지금까지의 경로문제들은 네트워크상의 각 마디나 호에 주어진 값을 다루었다. 즉, 최단경로(shortest path), 최대신뢰경로(most reliable Path), 최대통과용량경로(maximum capacity path), 최단거리/시간경로(shortest distance / time path), 최장경로(longest path), 외판원문제(salesman problem), 우체부문제(postman problem) 등은 모두 네트워크상의 각 호에 주어진 길이, 신뢰도, 통과용량, 통과시간 등을 다루는 문제들이다. 그렇지만 이 연구에서 다루는 문제는 네트워크상에서 경로에 의해서 연결이 가능한 마디쌍들의 물동량을 다룬다는 점에 있어서 기존의 경로문제들과 다르다.

또한, 최대유통(maximal flow)문제, 최소비용유통(mincost flow)문제, 다품목최소비용유통(multi-commodity mincost flow)문제 등은 수송네트워크의 각 호에 통과용량(capacity)과 단위당 통과비용이 주어져 있을 때, 정해진 출발마디로부터 도착마디까지 최소의 비용으로 최대의 양을 유통시키기 위해서 수송네트워크상의 각 호에서의 유통량을 결정하는 문제들로서, 이 문제와는 다른 특성을 가지고 있다.

성기석과 박순달[3, 4]은 위 문제의 주어진 수송네트워크가 환을 가지지 않는 경우에 대해서 최적해법과 발견적해법을 제시하였다. 그 연구에서는 주어진 수송네트워크가 환을 가지지 않아야 한다는 가정이 있었으나, 일반적인 수송네트워크는 환을 가질 수 있으므로 그에 대한 연구가 필요하게 되었다. 따라서 본 연구에서는 수송네트워크를 더 일반화하여 환이 있는 유방향 네트워크에서도 최대물동량경로를 찾는 수리모형을 세우고 그에 대한 최적해법을 제시한다.

3. 수리 모형

주어진 유방향 네트워크 $G=(V, A)$ 상에서 연결가능한 마디쌍의 집합을 $C=\{(u, v) \mid (u, v) \in V \times V, u \langle v\}$ 라고 하고, 마디쌍 $(u, v) \in C$ 사이의 물동량을 fuv 라고 하자. 그리고 임의의 마디 i의 후행마디와 선행마디의 집합을 각각 $F(i)$, $B(i)$ 라고 하자. 마디집합 V의 임의의 부분집합을 Vs라 하자. 그리고 주어진 시발마디와 종착마디를 각각 s, t라하자. 그리고 마디쌍 (u, v) 에서 u는 출발마디, v는 도착마디라 하자. 그러면 최대물동량경로를 구하는 수리모형은 다음과 같다.

$$\text{Max } \sum_{(u,v)\in C} f_{uv}\, y_{uv} \quad \text{-----------------------------------} (1)$$

s.t

$$\left.\begin{array}{l} y_{uv} \le \sum_{j\in F(u)} x_{uj}, \ \forall\ (u,v)\in C \\ y_{uv} \le \sum_{i\in B(v)} x_{iv}, \ \forall\ (u,v)\in C \end{array}\right] \text{-----------------} (2)$$

$$\sum_{j\in F(r)} x_{rj} - \sum_{i\in B(r)} x_{ir} = \left[\begin{array}{l} 1, \text{ for } r=s \\ 0, \ \forall r\in V,\ r\ne s,t \\ -1, \text{ for } r=t \end{array}\right. \text{--------} (3)$$

$$\sum_{i\in V_s} \sum_{j\in V_s} x_{ij} \le |V_s|-1, \ \forall\ V_s \subseteq V, \text{ such that } |V_s| \ge 2 \text{ --} (4)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \ \forall (i,j)\in A \quad \text{-------------------} (5)$$

$$y_{uv} \in \{0,1\}, \ \forall (u,v)\in C \quad \text{-------------------} (6)$$

위의 수리식에서 변수 yuv는 마디 u와 v가 경로상에 존재하면 1, 아니면 0의 값을 갖는다. 또 xij는 호(i, j)가 경로상에 존재하면 1, 아니면 0의 값을 갖는다. 그리고 목적함수식 (1)은 경로상에서 만족되어지는 물동량을 최대화 하자는 것이다. 제약식(2)는 마디쌍의 두마디 모두 경로상에 존재할 때에만 그 마디쌍의 물동량을 만족시킬 수 있도록 하는 식이다. 제약식(3)은 네트워크상에서 정해진 시발마디로부터 종착마디에 이르는 경로를 만들도록하는

식이다.

경로는 마디간의 연결을 통해서 형성된다. 마디간의 연결시 어떤 특정마디로부터 출발하여 다시 그 마디로 되돌아오는 경로가 형성될 수 있는데, 이러한 경로를 환이라한다. 환이 없는 경로를 단순경로라 하는데, 이 문제에서 결정되는 경로는 단순경로이어야 한다.

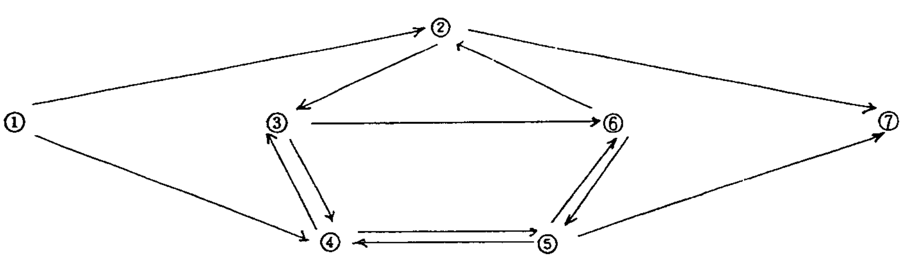
제약식(4)는 환을 방지하는 제약식이다. 이 제약식은 그 수가 $2^{|V|}$ 개나 되므로 다루기가 어렵다. 즉, 경로에서 환을 방지하는 제약식이 문제의 난이도를 현저히 증가시킨다.

이 수리모형을 벡터와 행렬을 이용하여 다음과 같이 표현한 모형을 문제[P]라 하자.

$$
\begin{array}{lll}
\text{Max } Z = Wy & \text{---------(1)} & \\
\text{s.t.} & & \\
\quad y - FX \le 0 & \text{---------(2a)} & \\
\quad y - BX \le 0 & \text{---------(2b)} & \text{문제[P]} \\
\quad EX = b & \text{---------(3)} & \\
\quad X \in \Pi & \text{--------(4)} & \\
\quad X \in \{0,1\} & \text{-----(5)} & \\
\quad y \in \{0,1\} & \text{-----(6)} &
\end{array}
$$

여기서, F와 B는 각각 네트워크의 마디쌍-출발호와 마디쌍-도착호의 사건행렬이다. 출발호란 마디쌍의 출발마디로부터 나가는 호를, 도착호란 마디쌍의 도착마디로 들어오는 호를 말한다. E는 네트워크의 마디-호 사건행렬이고, W는 마디쌍의 물동량 벡터이다. 그리고 X는 경로상의 호에 대한 변수벡터, Y는 경로에 의해서 연결되는 마디쌍의 변수벡터이다.

유방향 네트워크가 〔그림 1〕과 같고 각 마디쌍의 물동량이 $f_{12}=1$, $f_{13}=1$, $f_{14}=2$, $f_{16}=1$,



〈그림 1〉 유방향 네트워크

〈표 1〉 각 경로의 물동량 W_p

경 로	물 동 량
1-2-3-4-5-7	(1+1+2+0+1)+(1+0+2+1)+(0+1+1)+(0+1)+(1)=13
1-2-3-6-5-7	(1+1+0+1+1)+(1+2+1+1)+(1+2+1)+(0+1)+(1)=15
1-4-3-6-2-7	(1+1+2+1+1)+(1+0+1+1)+(0+2+1)+(3+1)+(1)=17
1-4-3-6-5-7	(1+2+0+1+1)+(0+1+2+1)+(0+3+1)+(0+1)+(1)=15
1-4-5-6-2-7	(1+2+0+1+1)+(0+2+1+1)+(0+3+1)+(0+1)+(1)=15

$f_{17}=1$, $f_{23}=1$, $f_{25}=2$, $f_{26}=1$, $f_{27}=1$, $f_{35}=1$, $f_{36}=2$, $f_{37}=1$, $f_{46}=3$, $f_{47}=1$, $f_{57}=1$, $f_{67}=1$과 같다고 하자. 여기에서 출발마디 1로부터 도착마디 7에 이르는 각 경로들의 물동량을 계산하면 위의 〔표 1〕과 같다. 이 경로들 중에 최대물동량경로는 1-4-3-6-2-7 을 지나는 경로이고 이 경로의 물동량은 17 이다.

4. 쌍대 전정수 알고리즘 (Dual All Integer Programming)

쌍대전정수 알고리즘은 절단평면 알고리즘과 유사한 정수계획의 계산방법이다.

쌍대전정수법은, 계산을 시작하여 일련의 제약식 추가와 선회연산을 수행하고 계산이 끝날때까지 단체표상의 모든 계수들이 정수로 유지되도록 한다. 또 이 알고리즘은 쌍대가능해로 시작하여, 쌍대가능성을 유지하면서, 원가능성을 만족하지 않는 제약식으로 부터 절단평면식을 유도하고, 그것을 추가하면서 선회연산을 수행해 나가다가 원가능성이 만족되면 곧바로 최적정수해를 구하게 된다.

새로이 추가되는 절단평면식의 계수는 모두 정수이며, 특히 선회점이 되는 계수는 -1의 값을 가지도록 하는데, 이는 선회연산을 수행한 후에 단체표상의 모든 계수가 정수로 유지되도록 하기 위해서이다.

이러한 쌍대전정수 알고리즘의 계산 단계를 나타내면 다음과 같다.

단계 1 : 모든 계수가 정수로 이루어진 단체표 상에서 임의의 쌍대가능해를 구한다.

단계 2 : 원가능성이 만족되지 않은 임의의 행 v를 선택한다. (즉, $a_{v0} < 0$, $v \neq 0$) . 만약 모든 행이 원가능성을 만족하면 현재의 단체표상에 나타난 해가 최적정수해이다.

단계 3 : $a_{vj} < 0$인 열들 중에서 사전편찬순으로 최소인 열 α_p를 선회열로 삼는다. 만약 존재하지 않으면 (즉, $a_{vj} \geq 0$ for $j=1,\ldots,n$), 정수가능해가 존재하지 않으므로 끝낸다.

단계 4 : 단계 2에서 선택한, 원가능성이 만족되지 않은 행 v를 이용하여, 모든 계수가 정수이며 α_p 열에 -1의 값을 가지는 전정수절단평면식을 생성하여 단체표에 추가하고 쌍대단체 선회연산을 수행한다. 단계 2로 간다.

열	α_0	α_1	.....	α_n	
변수	1	$-x_1$	.....	$-x_n$	
$x_0 =$	a_{00}	a_{01}	.....	a_{0n}	
$x_1 =$	0	-1			≥ 0
.	.		.		.
.	.		.		.
$x_n =$	0			-1	≥ 0
$x_{n+1} =$	$a_{n+1,0}$	$a_{n+1,1}$	....	$a_{n+1,n}$	≥ 0
.	.				.
$x_{n+m} =$	$a_{n+m,0}$	$a_{n+m,1}$	....	$a_{n+m,n}$	≥ 0

〈그림 2〉 쌍대단체표

한편 위의 단계 4에서 추가하는 전정수절단평면식은 절단평면법에서와 마찬가지로 최적정점해 부근에서의 실수해영역을 감쇄시킴으로써 최적정점해가 정수해가 되도록한다. 이러한 전정수절단평면식을 구하는 방법은 다음과 같다.

우선 원가능성이 만족되지 않은 임의의 행 v가 다음과 같다고 하자.

$x_v = a_{v0} + \sum_{j=1}^{n} a_{vj}(-x_{J(j)}),\ a_{v0} < 0.$

단, J(j)는 j번째 비기저변수의 지수.

그러면 전정수절단평면식은 다음과 같이 구해진다.

$[a_{v0}/\lambda] + \sum_{j=1}^{n} [a_{v0}/\lambda]\ (-x_{J(j)}) \ge 0$

이때 λ는 양수로서 다음과 같은 규칙에 의해서 구한다.

단계 1 : 원가능성이 만족되지 않은 임의의 행을 v라 하고, $a_{vj} < 0, j=1,...,n$ 인 열들 중에서 사전편찬순으로 최소인 열을 α_p 라고 둔다.

단계 2 : $u_{p=1}$이라 두고 $a_{vj} < 0, j=1,...,n, j \neq p$인 모든 j에 대해서 다음을 만족하는 최대의 정수를 u_j 라고 둔다.

$(1/u_j)\ \alpha_j \succ -\alpha_p$, 단 ≻는 '사전편찬순으로 큼'을 나타낸다.

단계 3 : $a_{vj} < 0, j \ge 0$인 모든 j에 대하여 다음과 같이 둔다.

$\lambda_j = -a_{vj}/u_j$

단계 4 : $\lambda = \text{Max}\ \lambda_j$ 라고 둔다.

이와 같이 λ의 값을 구하는 이유는, 추가되는 전정수절단평면식에서 선회점의 계수가 -1 의 값을 가지도록하고, 쌍대단체선회연산을 수행한 후에도 단체표상의 모든 계수가 정수로 유지되도록 하기 위해서이다.

5. 해법.

앞의 수리모형에서 나타낸 문제〔P〕에서 환을 방지하는 제약식(4)를 완화하고, 제약식(5)와 (6)을 다음과 같이 새롭게 표현한 문제를 문제〔PR〕이라 하자.

$$
\begin{aligned}
&\text{Max } Z = Wy && \text{---------------(1)} \\
&\text{s.t.} \\
&y - FX \le 0 && \text{---------------(2a)} \\
&y - BX \le 0 && \text{---------------(2b)} \qquad \text{문제[PR]} \\
&EX = b && \text{---------------(3)} \\
&0 \le X \le 1, \ X \text{ 는 정수벡터} && \text{------(5)} \\
&y \ge 0 && \text{---------------(6)}
\end{aligned}
$$

여기서 제시하는 최대물동량경로의 해법의 절차를 개략적으로 나타내면 다음과 같다.

단계 1 : 문제[PR]를 풀어서 최적해 X를 구한다.

단계 2 : 구해진 X가 나타내는 경로상에서 환을 찾는다. 환이 존재하지 않으면 현재의 해 X를 최대물동량경로로 삼고 계산을 끝낸다. 환이 존재하면 단계 3으로 간다.

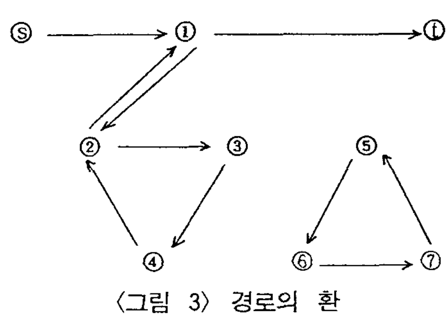
단계 3 : 찾아진 환들에 대해서 환제거식을 만들어서 문제[PR]에 첨가하고 쌍대전정수 알고리즘을 이용하여 새로운 최적해 X를 구한다. 단계 2로 간다.

5-1 환 제거식의 생성

문제[PR]을 풀어서 구한 임의의 정수해 X가 나타내는 경로가 다음과 같다고 하자.

위의 경로 중에서 ①→②→①, ②→③→④→②, ⑤→⑥→⑦→⑤ 등은 환을 이루고 있다. 최대물동량경로에서는 이러한 환들이 있어서는 안된다. 그러나 문제[PR]을 풀어서 구한 경로에는 환이 나타날 수 있는데, 그 이유는 문제[PR]이 문제[P]에서 식(4)를 완화한 것이기 때문이다. 따라서 이러한 환들을 제거하기 위한 환제거식(4)를 만들어서 문제[PR]에 추가하여 풀어야 한다. 식(4)를 만들려면 우선 구한 경로상에 환이 있는지를 점검하고, 환이 있는 경우에 그 환을 제거하는 식(4)를 추가해야 한다.

여기서, 문제[PR]을 풀어서 구한 임의의 정



〈그림 3〉 경로의 환

수해 X가 나타내는 경로상에 있는 임의의 환을 이루는 마디의 집합을 Vs라 하면 그 환을 제거하는 식은 다음과 같다.

$$\sum_{i,j \in v_s} x_{ij} \le |V_s|-1. \quad \text{———} (4)'$$

V_s 는 경로상에서 임의의 환을 이루는 마디의 집합.

이렇게 생성시킨 환 제거식을 문제〔PR〕에 추가하여 풀어서 새로운 최적정수해 X를 구하고, 그 정수해로부터 또다시 식(4)'와 같은 환 제거식을 생성시키고 추가하여 푸는 과정을 반복한다.

만약 구해진 최적정수해 X에 환이 존재하지 않으면, 최적정수해 X가 나타내는 경로는 단순경로이며, 그것이 바로 최대물동량경로가 된다.

5-2 전정수절단평면식의 생성.

앞절에서 서술한 바와 같이 새로이 추가되는 환 제거식은

$$\sum_{i,j \in v_s} x_{ij} \le |V_s|-1. \quad (a)$$

와 같은 형태로 표현된다. 그런데 〔그림2〕의 쌍대단체표 상에서 주어진 기저해에 대해서 각 제약식은

$$x_v = a_{v0} + \sum n_{j=1}\ a_{vj}\ (-x_{J(j)}), \quad (b)$$

와 같이 여유변수 또는 인공변수가 비기저변수들의 조합으로 표현된다. 따라서 문제〔PR'〕에서 최적기저해에 도달한 쌍대단체표에 (a)와 같은 형태의 환제거식을 추가하려면, 거기에 여유변수 x_s를 첨가하고 x_s가 쌍대단체표상의 비기저변수들 만으로 표현되도록 변수들을 치환해서 다음과 같은 형태로 바꾸어야 한다.

$$x_s = a_{s0} + \sum N_{k=1}\ a_{sk}\ (-x_{J(k)}) \ge 0, \quad -(a)'$$

그러면 이 제약식 (a)'는 현재의 기저해에 의해서 형성되었던 환을 방지하도록 하는 식이므로 $a_{s0} < 0$이 될 것이고, 이것이 바로 원가능성이 만족되지 않은 행으로서 선택되어진다.

그리고 나서 쌍대전정수 알고리즘의 단계 3과 단계 4의 절차를 수행한다. 즉 다음과 같은 형태의 전정수절단평면식을 생성하여 그것을 단체표에 추가하고 쌍대단체 선회연산을 수행한다.

$$x_s' = [\ a_{s0}/\lambda] \ + \sum N_{k=1}$$

$$[\ a_{sk}/\lambda]\ \ (-x_{J(k)}) \ge 0 \qquad (4)''$$

5-3 계산단계.

앞의 절들에서 서술한 각 부분별 계산 절차를 종합하여 나타내면 다음과 같다.

단계 1 : 문제〔PR〕를 쌍대전정수 알고리즘을 적용하여 최적해 X를 구한다.

단계 2 : 현재의 기저해 X로부터 임의의 환을 하나 찾고, 그 환을 이루는 마디의 집합 V_s 로부터 다음의 식(4)'을 생성한다.

$$\sum_{i,j \in v_s} x_{ij} \le |\ V_s|\ -1. \qquad (4)'$$

만약 환이 존재하지 않으면 현재의 기저해 X를 최대물동량경로로 삼고 계산을 끝낸다.

단계 3 : 식(4)'에서 $a_{sj} < 0$인 열들 중에서 사전편찬순으로 최소인 열 α_p를 선회열로 삼는다.

식(4)'로부터 다음의 식(4)"과 같은 전정수절단평면식을 생성하여 단체표에 추가하고 쌍대단체 선회연산을 수행한다.

$$x_s' = [\,a_{s0}/\lambda] + \sum N_{k=1} [\,a_{sk}/\lambda]\ (-x_{J(k)}) \geq 0 \qquad (4)''$$

단계 4 : 원가능성이 만족되지 않은 행 v를 선택한다.

만약 없으면 단계 2로 간다.

단계 5 : $a_{vj} < 0$인 열들 중에서 사전편찬순으로 최소인 열 α_p를 선회열로 삼는다. 그리고 행 v로부터 전정수절단평면식을 생성하여 단체표에 추가하고 쌍대단체 선회연산을 수행한다. 단계 4로 간다.

5-4 예제풀이.

다음의 〔그림 4〕와 같이 주어진 예제를 제시한 해법을 적용하여 풀어보기로 하자.

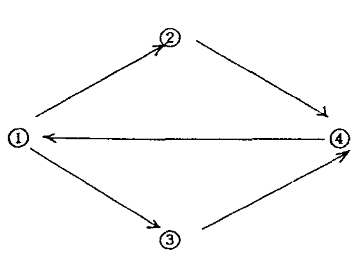
우선 위의 예제를 쌍대단체표에 나타내면 〔표 2〕와 같다. 〔표 2〕에서 Y_{ij}는 각 마디쌍, X_{ij}는 각 호와 대응되는 변수이며, S_k는 각 제약식에 대한 여유변수이다.

〔표 3〕은 〔표 2〕로부터 구한 정수최적해이다. 이 해에 의하면 $X_{12}=X_{13}=X_{24}=X_{34}=X_{41}=1$로서, ①→②→④→① 의 환이 존재한다. 이 환을 제거하기 위해서 환제거식을 추가한다. 추가되는 환제거식은 $X_{12} + X_{24} + X_{41} \leq 2$이다. 이것을 〔표 3〕에 나타난 비기저 변수들로 표현하면 $-2S_{14}-S_{15}-S_{16}-3S_{17}-S_{18} \leq -1$와 같이 된다. 여기에 새로운 여유변수 S_{22}를 추가하여 〔표 3〕의 쌍대단체표의 제일 아래행에 나타내었다. 그리고 그 행으로부터 전정수절단평면식을 구하면, 선회열은 S_{16}열이고, $\lambda=1$이 되어 원래의 행이 그대로 전정수절단평면식으로 된다. 따라서 그대로 선회연산을 수행한다.

〔표 4〕는 〔표 3〕으로부터 선회연산하여 구한 것이다. 〔표 4〕의 정수해는 S_{13} 행에서 비가능이다. 마찬가지로 그 행으로부터 전정수 절단평면식을 구하면, 선회열은 S_{16} 열이고, $\lambda=1$이 되어 원래의 행이 그대로 전정수절단평면식으로 된다. 따라서 그대로 선회연산을 수행한다.

같은 방법으로 비가능인 행에 대해서 전정수절단평면식을 만들고 선회연산을 수행하는 과정을 반복하면 〔표 5〕와 같이 새로운 정수최적해가 구해진다. 이 해에 의하면 $X_{13}=X_{34}=1, X_{12}=X_{24}=X_{41}=0$이다. 이 해에서는 환이 존재하지 않음을 알 수있다. 즉 경로 ①→③→④가 최대 물동량 경로가 되고, 이때 경로의 물동량은 5이다.

네 트 워 크



마디간 물동량 f_{ij}

i \ j	2	3	4
1	2	1	1
2		2	1
3			3

[그림4] 예제

〈표 2〉 예제의 쌍대단체표

비기저 변수	1	$-Y_{12}$	$-Y_{13}$	$-Y_{14}$	$-Y_{23}$	$-Y_{24}$	$-Y_{34}$	$-X_{12}$	$-X_{13}$	$-X_{24}$	$-X_{34}$	$-X_{41}$
물동량	0	-2	-1	-1	-2	-1	-3	0	0	0	0	0
Y_{12}	0	-1										
Y_{13}	0		-1									
Y_{14}	0			-1								
Y_{23}	0				-1							
Y_{24}	0					-1						
Y_{34}	0						-1					
X_{12}	0							-1				
X_{13}	0								-1			
X_{24}	0									-1		
X_{34}	0										-1	
X_{41}	0											-1
S_1	0	1						-1	-1			
S_2	0		1					-1	-1			
S_3	0			1				-1	-1			
S_4	0				1					-1		
S_5	0					1				-1		
S_6	0						1				-1	
S_7	0	1						-1				
S_8	0		1						-1			
S_9	0			1					-1	-1	-1	
S_{10}	0				1							
S_{11}	0					1				-1	-1	
S_{12}	0						1			-1	-1	
S_{13}	1							1	1			-1
S_{14}	0							-1	-1	1		
S_{15}	0										1	
S_{16}	-1									-1	-1	1
S_{17}	1							1				
S_{18}	1								1			
S_{19}	1									1		
S_{20}	1										1	
S_{21}	1											1

〈표 3〉 초기의 정수최적해가 구해진 단체표

비기저 변수	1	$-S_3$	$-S_5$	$-S_6$	$-S_7$	$-S_8$	$-S_{10}$	$-S_{14}$	$-S_{15}$	$-S_{16}$	$-S_{17}$	$-S_{18}$
물동량	11	1	1	3	2	1	2	1	3	0	4	7
Y_{12}	1				1						1	
Y_{13}	1					1						1
Y_{14}	2	1					1				1	1
Y_{23}	1											1
Y_{24}	1		1					1			1	
Y_{34}	1			1					1			1
X_{12}	1										1	
X_{13}	1											1
X_{24}	1										1	
X_{34}	1							1	1			1
X_{41}	1							1	1	1	1	1
S_1	1				-1							1
S_2	1					-1					1	
S_3	0	-1										
S_4	0						-1	1			1	-1
S_5	0		-1									
S_6	0			-1								
S_7	0				-1							
S_8	0					-1						
S_9	0	-1						1	1			
S_{10}	0		-1				-1					
S_{11}	1			-1					1			1
S_{12}	1							1			1	
S_{13}	0							1	1	1		
S_{14}	0							-1				
S_{15}	0								-1			
S_{16}	0									-1		
S_{17}	0										-1	
S_{18}	0											-1
S_{19}	0							-1			-1	
S_{20}	0								-1			-1
S_{21}	0							-1	-1	-1	-1	-1
(S_{22})	-1							-2	-1	(-1)	-3	-1

S_{22} $\lambda=1$ 선회열

〈표 4〉 환제거식을 추가한 후의 단체표

비기저 변수	1	$-S_3$	$-S_5$	$-S_6$	$-S_7$	$-S_8$	$-S_{10}$	$-S_{14}$	$-S_{15}$	$-S_{16}$	$-S_{17}$	$-S_{18}$
물동량	11	1	1	3	2	1	2	1	3	0	4	7
Y_{12}	1				1						1	
Y_{13}	1					1						1
Y_{14}	2	1					1				1	1
Y_{23}	1											1
Y_{24}	1		1					1			1	
Y_{34}	1			1					1			1
X_{12}	1										1	
X_{13}	1											1
X_{24}	1										1	
X_{34}	1							1	1			1
X_{41}	0							1	1	1	-2	1
S_1	1				-1							1
S_2	1					-1					1	
S_3	0	-1										
S_4	0						-1	1			1	-1
S_5	0		-1									
S_6	0			-1								
S_7	0				-1							
S_8	0					-1						
S_9	0	-1						1	1			
S_{10}	0		-1				-1					
S_{11}	1			-1					1			1
S_{12}	1							1			1	
S_{13}	-1							(-1)		1	-3	-1
S_{14}	0							-1				
S_{15}	0								-1			
S_{16}	1							2	1	-1	3	1
S_{17}	0										-1	
S_{18}	0											-1
S_{19}	0							-1			-1	
S_{20}	0								-1			-1
S_{21}	1							-1		-1	-2	
S_{22}	0									-1		

S_{13} $\lambda=1$ ↑ 선회열

〈표 5〉 최대물동량 경로가 구해진 단체표

비기저 변수	1	$-S_3$	$-S_5$	$-S_6$	$-S_7$	$-S_8$	$-S_{10}$	$-S_{14}$	$-S_{15}$	$-S_{16}$	$-S_{17}$	$-S_{18}$
물동량	5	1	1	3	2	1	2	1	3	0	4	7
Y_{12}	0				1						1	-1
Y_{13}	1					1					1	1
Y_{14}	1	1									1	
Y_{23}	0						1	1			1	2
Y_{24}	0		1					1			1	2
Y_{34}	1			1					1			1
X_{12}	0										1	-1
X_{13}	1											1
X_{24}	0							1			1	2
X_{34}	1								1			1
X_{41}	0							1	1	1	1	
S_1	1				-1							1
S_2	0					-1					1	-1
S_3	0	-1										
S_4	0						-1					
S_5	0		-1									
S_6	0			-1								
S_7	0				-1							
S_8	0					-1						
S_9	2	-1						1	1			
S_{10}	1		-1				-1	-1			-1	-1
S_{11}	1			-1					1			1
S_{12}	2							1			1	-1
S_{13}	0							1	1	1		
S_{14}	0							-1				
S_{15}	0											
S_{16}	0								-1	-1		
S_{17}	1										-1	-3
S_{18}	0											-1
S_{19}	1							-1			-1	2
S_{20}	0								-1			-1
S_{21}	1							-1	-1	-1	-1	
S_{22}	2							-2	-1	-1	-3	2
S_{23}	0										-1	

최적해가 구해짐. $X_{13}=X_{34}=1, X_{12}=X_{24}=X_{41}=0.$

6 결론

버스나 지하철의 노선을 결정할 때는 전체지역들의 운송수요를 최대한으로 충족시키기 위해서 기술적, 지리적, 경제적 여건이 허용되는 범위내에서 전체지역간에 이동하는 물동량의 합이 최대가 되도록 해야 한다. 이러한 노선결정문제를 최대물동량경로문제라 하는데, 기존의 연구는 수송네트워크가 환을 가지지 않는 제한적인 경우만을 다루었다.

그런데 현실적으로는 수송네트워크가 환을 갖는 것이 더 일반적이다. 기존의 모형과 해법은 환이 존재하는 유방향 수송네트워크에는 적용될 수 없다. 본 연구에서는 일반적인 유방향 네트워크에서 최대물동량경로를 찾는 수리모형을 세우고, 쌍대전정수 알고리즘을 이용한 해법을 제시하였다. 이 해법은 주어진 수송네트워크가 환이 존재하지 않는 경우에 대해서도 사용할 수 있는데, 그 경우에는 환을 제거하기 위하여 환제거식을 추가할 필요가 없다.

본 연구에서 설정된 수송네트워크는 현실을 그대로 반영한 것이다. 따라서 본 논문에서 제시된 모형과 해법은 각종 수송수단의 운행노선을 결정하는데 실제적으로 유용하게 활용될 수 있을 것이다.

參 考 文 獻

〔1〕 박순달, 「OR(경영과학)」, 대영사, 1987.

〔2〕 성기석, "수송네트워크에서의 최대물동량경로에 관한 연구", 서울대학교 공학박사논문, 1990.

〔3〕 성기석, 박순달 "수송네트워크에서 최대물동량경로문제의 근사해법", 「대한산업공학회지」, 16권 2호 1990.

〔4〕 성기석, 박순달 "수송네트워크에서 최대물동량경로문제의 최적해법", 「한국경영과학회지」, 16권 1호 1991.

〔5〕 Ceder, A., N. H. M. Wilson, "Bus Network Design", *Transportation Research-B*, Vol. 20B, No. 4, 1986, pp. 331-344.

〔6〕 Current, J. R., C. S. Revelle, J. L. Cohon, "The Maximum Covering / Shortest Path Problem : A Multiobjective Network Design and Routing Formulation", *European J. of Operational Research*, Vol. 21, 1985, pp. 188-199.

〔7〕 Current, J. R., C. S. Revelle, J. L. Cohon, "The Median Shortest Path Problem : A Multiobjective Approach to Analyze Cost vs. Accessibility in the Design of Transportation Networks", *Transportation Science*, Vol. 21, No. 3, 1987, pp. 188-197.

〔8〕 Golden, B. L., A. A. Assad, Vehicle Routing : Methods and Studies, North-Holland,

1988.
〔9〕 Magnanti, T. L., R. T. Wong, "Network Design and Transportation Planning : Models and Algorithms", *Transportation Science*, Vol. 18, 1984, pp. 1-55.
〔10〕 Nguyen, S., E. Morello, S. Pallottino, "Discrete Time Dynamic Estimation Model for Passenger Origine Destination Transit Networks", *Transportation Research B*, Vol. 22B, No. 4, 1988, pp. 251-260.
〔11〕 Papadimitriou, C. H., K. Steiglitz, *Combinatorial Optimization - Algorithms and Complextiy*, Prentice-Hall, 1982.
〔12〕 Salkin, H. M., *Integer Programming*, Addison-Wesley, 1975.