韓國軍事運營分析學會誌
第18卷, 第2號, 1992. 12. 31.

퍼지최대흐름에 관한 연구
(A Study on The Fuzzy Maximal Flow)

愼宰煥*, 金禹烈**

Abstract

In the existing deterministic network, the capacity of each arc has been assumed to have a determined property. In reality it may have a property which cannot be determined, and even if it is determined, it contains many errors. Fuzzy theory is efficient in dealing with these kinds of properties.

The object of this study is to show that the capacity of each arc and the goal quantity have fuzziness and to develop a new method of determining the fuzzy maximal flow quantity.

1. 서론

결정적 네트워크(deterministic network)에서는 각 호의 용량이 결정적인 성질의 것이었지만 실제로 각 호의 용량은 결정될 수 없는 성질을 가질 수 있으며 결정된다 하더라도 많은 오차를 포함할 수 있다. 이러한 성질의 문제를 처리하기 위하여 퍼지이론(fuzzy theory)이 매우 적절하며, 입력자료를 퍼지이론으로 처리하면 모형과정에서 불확실성을 반영하고 이러한 불확실성을 포함하는 결론을 얻을 수 있다.

최근에는 퍼지이론이 발달하여 모호성(fuzziness)이 포함된 복잡하고 불분명한 시스템에 관한 연구가 가능하게 되었다. 퍼지이론을 이용한 네트워크에 관한 연구들을 살펴보면

* 명지대학교
** 동신대학교

Stefan Chanas와 Jerzy Kamburowski가 연구한 The Use of Fuzzy Variables in PERT(8)는 네트워크 모델내에 활동기간을 퍼지변수의 형태로 나타내어 완성기간 추정에 관한 방법을 제시하였고, Stefan Chanas와 Waldemar Kolodziejczyk의 Maximum Flow in a Network with Fuzzy Arc Capacities (9)는 네트워크 흐름의 비음정수인 호의 용량이 모호성을 가지고 모호성을 가진 목표와 함께 비퍼지 네트워크의 최대흐름량부터 최적치를 구하는 방법을 제시하였고, Real-Valued Flows in a Network with Fuzzy Arc Capacities(10)에서는 호의 용량이 실수일때 최적치의 방법을 제시하였다. Igor Gazdik의 Fuzzy Network Planning -FNET(7)는 퍼지이론을 이용한 네트워크에 있어서 Max-Min방법을 이용하여 최장경로를 찾는 방법을 제시하였고 Cerry M. Klein은 동적계획법을 도입하여 가능한 경로 중 최소의 소속함수를 갖는 경로를 구하는 방법을 제시하였다.

본 논문에서는 방향네트워크(directed network)에 있어서 각 호의 용량과 의사결정자의 목표량이 모호성을 가질때 퍼지이론을 이용하여 퍼지최대흐름의 최적량을 구하는 새로운 방법을 제시하고자 한다.

2. 퍼지최대흐름의 계산법

퍼지최대흐름의 문제를 해결하기 위하여 필요한 몇가지 용어를 정의하고 기본가정을 설정한 다음에 문제를 형성하고 이에 대한 해법을 제시하고자 한다.

2.1 퍼지집합의 소속함수

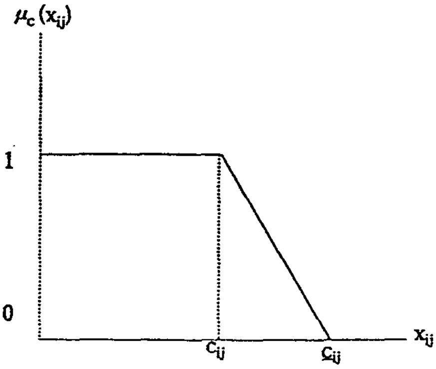
퍼지집합은 용량, 목표량, 결정량 집합의 세 종류로 구분한다.

2.1.1 용량의 소속함수

각 호의 용량이 모호성을 가지며 $0 \le x_{ij} \le C_{ij}$ 는 퍼지집합이다. 소속함수는 다음과 같다.

$$\mu_c(x_{ij}) = \begin{cases} 1 & \text{if } x_{ij} < c_{ij} \\ R(c_{ij}, c_{ij} : x_{ij}) & \text{if } c_{ij} \le x_{ij} \le c_{ij} \\ 0 & \text{if } x_{ij} > c_{ij} \end{cases} \qquad (2\text{-}1)$$

위의 소속함수는 〈그림 2-1〉과 같이 나타난다



〈그림 2-1〉 호(i, j)의 용량에 대한 소속함수

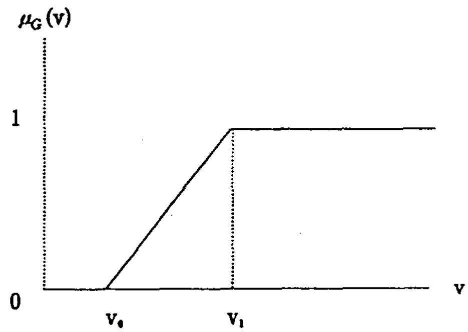
위 〈그림 2-1〉을 살펴보면 $x_{ij} < c_{ij}$ 이면 $\mu_c(x_{ij})$는 1의 값을 갖고, $x_{ij} > c_{ij}$ 이면 0의 값을 가지며, $R[\, c_{ij}, \underline{c}_{ij} : x_{ij}]$ 는 c_{ij} 에서 최대소속함수값 1이고 $\underline{c}_{ij}$ 에서는 소속함수값이 0인 사다리꼴 퍼지숫자이다. $x_{ij} < c_{ij}$ 의 $\mu_c(x_{ij})$ 값이 1이 되는 것은 호(i, j)에서 용량이 적어도 c_{ij} 만큼 보낼 수 있는 확률이 1이기 때문에 그보다 적은양을 보낼수 있는 확률은 당연히 1이 된다.

2.1.2 목표량의 소속함수

전체 네트워크에서 의사결정자가 만족할 수 있는 목표량 G는 퍼지집합이다. 목표량에 관한 소속함수는 다음과 같이 정의한다.

$$\mu_G(v) = \begin{cases} 0 & \text{if } v < v_0 \\ L[v_0, \; v_1 : v] & \text{if } v_0 \le v \le v_1 \\ 1 & \text{if } v > v_1 \end{cases} \qquad (2\text{-}2)$$

위의 소속함수는 〈그림 2-2〉와 같이 나타난다.



〈그림 2-2〉 목표량 G에 대한 v의 소속함수

〈그림 2-2〉을 보면 소속함수가 $v < v_0$ 는 0을, $v > v_1$ 은 1의 값을 가지며 $L(v_0, v_1 : v)$는 왼쪽 끝점이 v_0이고, v_1 이상이 최대소속함수값 1을 갖는 사다리꼴 퍼지숫자이다.

이는 의사결정자가 목표량이 v_1까지 만족할 수 있다는 뜻이며 그보다 더 많은 v의 양은 당연히 만족시킬 수 있어서 소속함수값이 1이 된다.

2.1.3 결정소속함수

문제해결을 위한 퍼지결정 D가 다음과 같다면 D는 전체 네트워크의 퍼지흐름량이다.

$$D = \bigcap_{(i,j)\in A} C_{ij} \in G$$

이때, D내의 소속함수 $\mu_c(v)$ 는 식(2-1)과 식(2-2)에 의거 다음과 같이 결정되며

$$\mu_D(v) = \mu_c(v) \wedge \mu_G(v)$$

위 $\mu_D(v)$ 값 중에서 최대값이 최적값이 된다.

$$\text{Max } \mu_D(v) = \text{최적값}$$

여기에서 $\mu_c(v)$ 는 모든 호의 흐름에서 도착마디에 도달한 양이 v가 되는 소속함수값이 된다.

2.2 문제형성

본 논문에서는 최대흐름계산의 성격상 비음정수만을 다루기로 하다.

2.2.1 최대흐름

기존의 최대흐름의 방법은 다음과 같다. 네트워크 $S = \langle N, A, C\rangle$ (출발지 $s \in N$과 도착지 $t \in N$일때)에서 최대흐름의 전형적인 형식이 형성된다고 하면, N은 마디의 집합이며 $i, j \in N$이라 정의하고, $A \subset N \times N$은 호의 집합 $c(i, j) = c_{ij} \in C$ 는 호$(i, j) \in A$의 용량이라 정의한다. 비음정수x_{ij} 는 네트워크의 호들에 관련있고 다음의 조건들을 만족한다.

(1) $0 \le x_{ij} \le c_{ij}$. $\forall\ i, j \in N$

(2) $$\sum_{i\in F} x_{ij} - \sum_{k\in F} x_{jk} = \begin{cases} -v & \text{for } j = s \\ 0 & \text{for } j = s,\ t, \\ v & \text{for } j = t \end{cases}$$

(3) max v

여기서 F는 j의 선행마디의 집합이고, F은 j의 후속마디의 집합이다.

2.2.2 최대흐름의 정의

정의 1. 최대화(Maximization)

$$\mu_{A \vee B}(z) = \bigvee_{x \vee y = z} [\mu_A(x) \vee \mu_B(y)], \quad z \in X$$

여기서 Z의 원소는 X와 Y원소의 한개 이상의 조합으로 구성된다. 이때 X와 Y의 소속함수를 비교하여 적은 값을 택한 뒤 그 값들 중 최대로 큰값이 Z의 소속함수가 된다.

정의 2. 최대값(Maximum Value)

집합 A에서 최대가 되는 값을 결정하는 방법은 다음과 같다.

$$\mu_A(x_0) = \underset{x}{\mathrm{Max}}\ \mu_A(x)$$

여기서 $\mu_A(x_0)$ 은 집합 A의 소속함수이고, $\mu_A(x)$ 가 최대가 되도록 해주는 원소가 x_0가 되는 것이다.

정의 3. 최대흐름

v가 네트워크상의 흐름량이고 v의 집합을 D라 할때 다음과 같은 조건에서 v 의 흐름이 최적흐름이다.

$$\mu_D(v^*) = \underset{v}{\mathrm{Max}}\ \mu_D(v)$$

정의 4. 절단(X, X)

비퍼지 네트워크에서 출발지 s와 도착지 t사이에 분리할 수 있는 절단$(\underline{X}, X)$가 존재하며 만약 v가 네트워크 S = (N, A, C) 내에서 최적흐름이라면 절단의 집합 $\underline{X}$와 집합 X사이에서 합집합은 $\underline{X} \cup X = N$이 되며, 교집합은 $\underline{X} \cap X = \phi$이 성립되고 네트워크 S는 다음 조건을 만족한다.

(1) $(i, j) \in (\underline{X}, X),\ i \in \underline{X},\ j \in X \rightarrow \mu_c(x_{ij}) \geq \mu_c(v)$

(2) $(i, j) \in (\underline{X}, X),\ i \in X,\ j \in \underline{X} \rightarrow x_{ij} = 0$

정의 4.에 나타난 절단$(\underline{X}, X)$는 비퍼지 최대흐름에서 병목의 형태를 이루는 절단를 최소절단이라 부른다. 각 호의 흐름량이 x_{ij}이고 전체 흐름량이 v일때 다음과 같은 등식을 얻을 수 있다.

$$v = \sum_{(\underline{X}, X)} x_{ij}$$

이와 같은 최소 절단의 개념은 본 논문의 해결기법에 중요한 영향을 끼치게 되며 퍼지최대흐름의 경우에서 네트워크내의 최적흐름은 최소절단의 지식없이 결정지을 수 없다.

2.3 퍼지최대흐름의 해결방법

문제의 해결방법은 용량의 제약을 만족시키면서 가능한 큰값과 가능한 최선의 방법이 되는 흐름을 찾는 것이다. 앞에서 논의된 정의들은 최적흐름의 결정을 위하여 연산방법의 구조내에서 이용된다.

〈연산방법〉

〈단계 1.〉 $\mu_c(x_{ij}) = 1$ 까지만 구성된 호용량 c_{ij} 가 포함된 비퍼지 네트워크 S = (N, A, C) 내에서 최대흐름 v을 찾는다. 만약 여기에서 $\mu_G(v) = 1$이면 이것이 최적량이 되며 끝난다. 아니면 다음단계로 간다.

〈단계 2.〉 최소절단(i, j)으로 이루어진 호용량들의 소속함수 $\mu_c(x_{ij})$ 를 다음과 같이 계산하여 $\mu_c(v_1)$ 를 구한다. $x_{ij} \in T$, T는 최소 절단(i, j)의 집합이다.

$$\mu_T(v_1) = \underset{x_{ij} \in T}{\text{Max Min}} \{\mu_T(x_{ij})\}$$

$\mu_T(v_1)$ 와 $=\mu_D(v_1)$ 의 최소값 중 최대값을 결정한다.

$$\mu_D(v_1) = \underset{v_1}{\text{Min}} [\mu_T(v_1), \mu_D(v_1)]$$

$$\mu_D(v_2) = \underset{v_1}{\text{Max}}\ \mu_D\ (v_1)$$

〈단계 3.〉 단계 2.에서 나온 v_2 값으로 최대로 용량제약을 만족하는 흐름을 다시 만들어 다음 조건을 검토한다

$$\mu_D(v_2) = \mu_C(v_2)$$

위의 조건이 성립하면 최적해가 되며 끝난다. 아니면 단계 4.로 간다.

〈단계 4.〉 $\mu_C(v_2) < \mu_G(v_2)$ 이면 $v_2 - 1 \rightarrow v_2$를 만든다. 전체 네트워크에서 v_2 양 만큼 최대로 용량을 만족하는 흐름을 다시 만든다. 아니면 단계 5.로 간다.

〈단계 5.〉 다음조건이 성립하면 v_2+1이 최적이다. 아니면 단계 4.로 간다.

$$\mu_C(v_2) > \mu_G(v2)$$

3. 예 제

〈그림3-1〉의 네트워크에서는 마디가 10개인 퍼지 네트워크 모형이다. 이때 퍼지최대흐름을 구하여 보자. 호 A, B, ..., S의 용량이 모호성을 가진다. 용량의 퍼지숫자는 〈표 3-1〉과 같다.

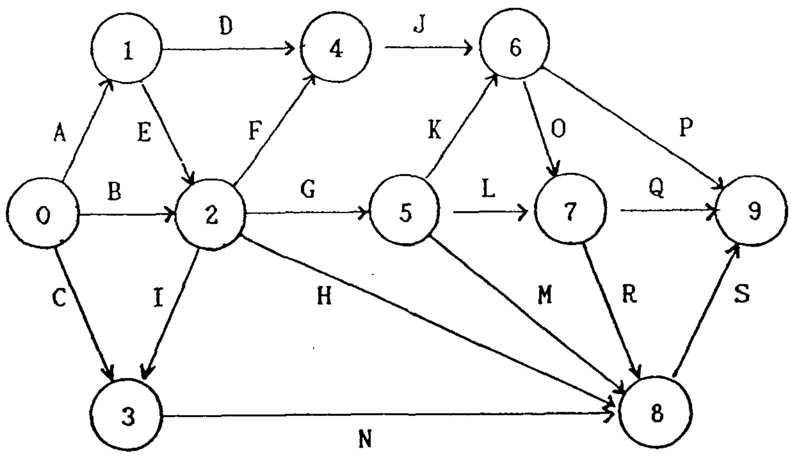
〈표 3-1〉 호의 퍼지용량

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
c_{ij}	4	20	13	4	5	7	7	2	15	7	9	7	15	8	5	10	15	6	11
$\underline{c}_{ij}$	10	30	23	8	11	17	14	3	15	13	17	7	31	24	8	10	32	15	16

목표량 G의 퍼지숫자는 〈표3-2〉와 같다.

〈표 3-2〉 목표량의 소속함수

v	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20
μ_G	1.0	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0



〈그림 3-1〉 퍼지 네트워크

〈단계 1.〉 기존의 최대흐름 방법으로 비퍼지최대흐름을 구하면 다음과 같다.

최소절단의 호(i, j)와 x_{ij} : (4, 6)→ 7, (2, 5)→ 7, (2, 8)→ 2, (3, 8)→ 8

최대흐름량 = 24

〈단계 2.〉 여기서 + 기호는 덧셈이 아니라 조합적 합계(combinatorial sum)를 뜻하며, 최소절단에 소속된 호의 소속함수로 Max-Min 계산을 한다. * 기호는 흐름량 v에서의 값이다.

24(v)

1. *

25(v)

(J) 0.8333

(G) 0.8571

(N) 0.9375 *

26(v)

(2J) 0.6667 (2G) 0.7143 (2N) 0.875 *

(J+G) 0.8333+0.8571=0.8333

(J+N) 0.8333+0.9375= 0.833

(G+N) 0.8571+0.9375=0.8571

소속함수값 0.875 (해당경로 2N)

27(v)

(3J) 0.5 (3G) 0.5714 (3N) 0.8125

(2J+G) 0.6667+0.8571=0.6667

(2J+N) 0.6667+0.9375=0.6667

(2G+J) 0.7143+0.8333=0.7143

(2G+N) 0.7143+0.9375=0.7143

(2N+J) 0.875+0.8333=0.8333

(2N+G) 0.875+0.8571=0.8571*

(J+G+N) 0.8333+0.8571+0.9375=0.8333

소속함수값 0.8571 (해당경로 2N+G)

28(v)

(4J) 0.3333 (4G) 0.4286 (4N) 0.75

(3J+G) 0.5+0.8571=0.5

(3J+N) 0.5+0.9375=0.5

(3G+J) 0.5714+0.8333=0.5714

(3G+N) 0.5714+0.9375=0.5714

(3N+J) 0.8125+0.8333 = 0.8125

(3N+G) 0.8125+0.8571=0.8125

(2J+2G) 0.6667+0.7143=0.6667

(2J+2N) 0.6667+0.875=0.6667

(2G+2N) 0.7143+0.875=0.7143

(2J+G+N) 0.6667+0.8571+0.9375=0.6667

(J+2G+N) 0.8333+0.7143+0.9375=0.7143

(J+G+2N) 0.8333+0.8751+0.875=0.8333 *

소속함수값 0.8333 (해당경로J+G+2N)

29(v)

(5J) 0.1667

(5G) 0.2857

(5N) 0.6875

(4J+G) 0.3333+0.8751=0.3333

(4J+N) 0.3333+0.9375=0.3333

(4G+J) 0.4286+0.8333=0.4286

(4G+N) 0.4286+0.9375=0.4286

(4N+J) 0.75+0.8333=0.75

(4N+G) 0.75+0.8571=0.75

(2J+2G+N) 0.6667+0.7143+0.9375=0.6667

(J+2G+2N) 0.8333+0.7143+0.875=0.7143

소속함수값 0.8125 (해당경로 J+G+3N)

(3J+2G) 0.5+0.7143=0.5

(3J+2N) 0.5 + 0.875 = 0.5

(3G+2J) 0.5714+0.6667=0.5714

(3G+2N) 0.5714+0.875=0.5714

(3N+2J) 0.8125+0.6667=0.6667

(3N+2G) 0.8125+0.7143=0.7143

(3J+G+N) 0.5+0.8571+0.9375=0.5

(J+3G+N) 0.8333+0.5714+0.9375=0.5714

(J+G+3N) 0.8333+0.8571+0.8125=0.8125*

(2J+G+2N) 0.6667+0.8571+0.875=0.6667

v의 적정값은 29가 되고 소속함수값은 0.8125가 된다.

〈단계 3.〉 $v = 29$에서 다시 퍼지최대흐름을 만들면 확률이 가장 적은 호 G가 0.7186이다. 단계 3.의 공식에서

$\mu_D(v_2) = 0.6 \neq \mu_C(v_2) = 0.7186$

이 성립하므로 최적값이 아니다.

단계 2.에서 Max-Min 연산에 의하여 구한 최소절단에 해당되는 호부분의 $\mu_D(v_2)$ 값과, 실제 $\mu_C(v_2)$ 값은 틀리다는 것을 알 수 있다. 즉 Max-Min 연산은 최소절단의 흐름에서만 연산을 한 것이고, 이때 실제 흐름에서 소속함수 $\mu_C(v_2)$ 값은 최소절단 이외에 다른 호의 소속함수에서 보다 작아질 수 있음을 알 수 있다.

〈단계 4.〉 단계 5.의 조건을 만족하지 않기 때문에 $v_2=29-1=28$이 되고 $\mu_C(v_2)=0.8$(호 S)이 된다

〈단계 5.〉 $\mu_c(v_2)=0.8 < \mu_G(v_2)=0.8$이 성립하지 않기 때문에 단계 4.로 간다.

〈단계 4.〉 단계 5.의 조건을 만족하지 않기 때문에 $v_2=28-1=27$이 된다.

〈단계 5.〉 $\mu_c(v_2)=0.8333 > \mu_G(v_2)=0.7$이 성립하기 때문에 $v=27+1=28$이 최적량이며 $\mu_c(v)=0.8$이다.

4. 결 론

기존의 네트워크 시스템에서는 결정적인 용량으로 계량화 모형을 이용하였으나 이러한 모형에서 각 호의 용량은 결정될 수 없는 성질이 있을 수 있으며 결정된다 하더라도 많은 오차를 포함할 수 있다.

따라서 본 연구에서는 퍼지집합론의 이론적 특성을 이용하여 주관적 판단을 포함하는 모호성을 각 호의 용량에 적용하여 퍼지최대흐름의 최적량에 대하여 새로운 방법을 제시하였다.

비퍼지 최대흐름량에서 목표량과 비교하면서 흐름량을 하나씩 증가시켜 최적량을 찾는다는 Stefan Chanas and Waldemar Kolodziejczyk방법은 흐름량을 하나씩 증가시키면서 똑같이 계속 반복 수행해야 하므로 량의 규모가 커짐에 따라 반복횟수가 또한 증가한다.

그러나 여기에서 제시된 방법은 최소절단부분의 호의 소속함수의 정도가 최소절단을 제외한 부분의 호의 소속함수 정도보다 크지 않다는 조건을 갖는다면 비퍼지흐름량을 구한 후 수차례 내지 수십차례의 반복연산을 하지 않고 단계 3.까지 단 한번의 Max-Min 퍼지연산으로 최적량을 구할 수 있다.

이런 조건 이외에 최소절단 이외의 호의 소

속함수의 정도가 최소절단의 호의 소속함수의 정도보다 적고 이러한 호들이 많이 있다면 비퍼지최대흐름 이후부터 흐름량을 하나씩 증가시켜 최적량을 찾는 방법과 여기에서 제시된 방법 중 어떤 것이 더 빨리 최적해를 찾을 수 있는 가를 밝히지 못하였으며 향후 이문제를 연구과제로 남긴다.

參考文獻

1. 박민용, 최항식, 「퍼지시스템의 응용입문」, 대영사, 1990.
2. 이광형, 오길록, 「퍼지이론 및 응용 : 1권 이론」, 홍릉과학출판사, 1991.
3. 이광형, 오길록, 「퍼지이론 및 응용 : 2권 응용」, 홍릉과학출판사, 1991.
4. 윤석철, 「계량경영학」, 경문사, 1982.
5. 신재환, "퍼지최대흐름에 관한 연구", 명지대학교대학원, 공학석사 학위논문, 1991.
6. Arnold Kaufmann and Modan M. Gupta, *Fuzzy Mathmatical Models in Engineering and Management Science*, North-Holand, 1988.
7. Cerry M. Klien, "Fuzzy shortest paths", *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 39, pp. 27-41, 1991.
8. Igor Gazdik, "Fuzzy Network Planning - FNET", *IEEE Transactions on Reliability*, Vol. R-32, pp. 304-313, 1983.
9. Stefan Chanas and Jerzy Kamburowski, "The Use of Fuzzy Variables in PERT", *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 5, pp. 11-19, 1981.
10. Stefan Chanas and Waldemar Kolodziejczyk, "Maximum Flow in a Network with Fuzzy Arc Capacities", *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 8, pp. 163-173, 1982.
11. Stefan Chanas and Jerzy Kamburowski, "Real-Valued Flows in a Network with Fuzzy Arc Capacities", *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 13, pp. 139-151, 1984.