韓國軍事運營分析學會誌
第18卷, 第1號, 1992. 6. 30.

FUZZY 할당모형 및 공격항공기의 표적 할당 문제에 대한 응용

(A Fuzzy Allocation Model and Its Application to Attacker Assignment Problem)

윤 석 준*, 고 순 주**

Abstract

A class of allocation problems can be modeled in a linear programming formulation. But in reality, the coefficient of both the cost and constraint equations can not be generally determined by crisp numbers due to the imprecision or fuzziness in the related parameters. To account for this, a fuzzy version is considered and solved by transforming to a conventional non-linear programming model. This gives a solution as well as the degree that the solution satisfies the objective and constraints simultaneously and hence will be very useful to a decision maker. An attacker assignment problem for multiple fixed targets has been modeled by a linear programming formulation by Lemus and David, in which the objective is to minimize the cost that might occur on attacker's losses during the mission. A fuzzy version of the model is formulated and solved by transforming it to a conventional nonlinear programming formulation following the Tanaka's approach. It is also expected that the fuzzy approach will have wide applicablity in general allocation problems

* 공군본부
** 國防大學院

I. 序 論

통상적으로 할당 문제(allocation or assignment problem)는 다음과 같은 수학적 프로그래밍(mathmatical programming)으로 공식화된다[1].

$$\text{Min (Max)} \quad Z = \vec{g}\,(x_1, x_2, x_3 \ldots x_n) \qquad \cdots\cdots\text{식 1)}$$

$$\text{st.} \quad \vec{c}\,(x_1, x_2, x_3 \cdots x_n) \geq (\leq)\, b$$

여기서 $x_1, x_2, x_3 \cdots\cdots x_n$은 決定變數로서 割當量을 나타내며 $\vec{g}$와 $\vec{c}$는 각각 目的函數와 制約式을 나타낸다. 이때 $\vec{g}$와 $\vec{c}$의 함수벡터 형태에 따라 선형 또는 비선형 프로그래밍으로 구분되고 이에 따라 解法이 달라지게 된다. 즉, $\vec{g}$와 $\vec{c}$가 선형함수벡터일 때 선형모델이 되며 이들중 일부 또는 전부가 非線形일 때 非線形 프로그램 문제가 된다. 이 외에 動的計劃法問題로 공식화하여 割當問題를 해결하는 경우도 있다.

여기서 불확실성이 내재된 경우 통상적으로 확률적 모델을 사용하거나 不確實性이 내포된 계수를 媒介變數(parameter)로 놓고 이들의 변화에 대하여 해가 어떻게 변화하는가를 分析하므로써 不確實性의 根源을 解消하는 방법이 있다. 그러나 불확실성은 확률적 불확실성(randomness)으로부터만 기인하는 것이 아니라 부정확하거나 부분적 정보만이 가용할 경우 또는 확율적으로 표현할 수 없는 애매성 등에 의해 기인할 수도 있다. 이와 같은 경우는 fuzzy mathmatical programming으로 문제가 공식화 되어야 한다.

본 논문은 식 1)로 공식화 되는 할당문제가 fuzzy linear programming인 경우 이에 대한 해법을 살펴보고 공격항공기의 표적할당 문제에 대한 응용을 살펴보는데 목적이 있다.

II. 퍼지수를 갖는 퍼지 線形計劃問題

여기서는 L.P문제의 係數와 不等號가 퍼지집합(fuzzy set)으로 모델링되는 Fuzzy L.P 문제와 이의 해법에 대하여 살펴본다.

가. Fuzzy Mathmatical Programming 문제

旣存의 mathematical programming 문제는 주어진 制約條件下에서 目的函數를 最大化(最小化)하는 것이다. 전형적인 線形計劃問題構成은 다음과 같이 주어진다.

$$\text{Max } a^t x = a^t x^*$$
$$\text{st. } Ax \leq b$$
$$x \geq 0$$

실제적인 문제에서는 目標槪念이 어떤 目的函數를 최대 또는 최소화하는 것보다도 유용할 경우가 있다. 왜냐하면 대부분의 경우 滿足度基準(satisfaction criterion)을 目標集合으로 描寫하기 때문이다. 먼저 通常的인 集合으로 주어지는 目的式과 制約式이 있을 때 決定變數 x는 目的式과 制約式을 동시에 만족해야 하는 변수이므로 이러한 의미에서 目標와 制約式을 구분하지 않고 다음과 같은 형태의 線形計劃模型을 구성할 수 있다.

$$a_{01}x_1+a_{02}x_2+\cdots\cdots a_{0n}x_n \geq b_0 \text{ (goal)}$$
$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots a_{1n}x_n \geq b_1 \text{ (constraints)}$$
$$\vert \qquad \vert \qquad\qquad \vert \quad \vert$$
$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots\cdots a_{in}x_n \geq b_i \qquad \cdots\cdots \text{식 2)}$$
$$\vert \qquad \vert \qquad\qquad \vert \quad \vert$$
$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots\cdots a_{mn}x_n \geq b_m$$

그러나 實際 適用問題에서 보면 制約條件의 係數와 不等號가 퍼지집합으로 표현되어야 할 경우가 있으며 目的函數 또한 퍼지집합으로 記述되는 경우가 있게 된다. 이와 같은 경우 目的式과 制約式을 각각 퍼지집합 $\tilde{G}$와 $\tilde{C}$라고 하면 이들 퍼지집합은 멤버쉽함$\mu_G(x)$와 $\mu_C(x)$로 특성 지워지게 되며 이 때 퍼지결정(fuzzy decision)은 목표 $\tilde{G}$와 제약 $\tilde{C}$를 동시에 만족해야 하므로 의사결정(decision making) D는 $G^{\sim}$와 $\tilde{C}$의 교집합으로부터 구할 수 있게 된다. 즉,

$$\tilde{D}=\tilde{C}\text{高}\tilde{G}, \quad \mu_D(x)=\mu_C(x)\wedge\mu_G(x) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{식 3)}$$

단, $a\wedge b=\mathrm{Min}(a, b)$

따라서 퍼지 mathematical programming 問題는 다음을 만족하는 最適解 x^*를 導出하는 문제가 된다.

$$\underset{x}{\mathrm{Max}} \ \mu_D(x)=\mu_D(x^*) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{식 4)}$$

Zimmerman[3]은 아래와 같은 特殊한 形態의 문제를 다루었다.

$$\text{goal} \qquad : c^t x \tilde{\geq} k$$
$$\text{constraint} : A x \tilde{\geq} b, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{식 5)}$$

여기서 파라메터행렬 A와 벡터 c는 퍼지수가 아닌 실수 행렬과 벡터이며, 목표와 제약식의 $\tilde{\geq}k$와 $\tilde{\geq}b$는 각각 "essentially greater than k"와 "essentially less than b"를 나타내는 fuzzy 부등호이다.

Negoita, Minoiu 그리고 Stan[4]은 행렬 A와 벡터 C가 퍼지수이고 부등호가 "greater than or equal to" 또는 "less than or equal to"와 같은 통상적인 부등호로 구성되는 Fuzzy L.P 문제를 고려하였다.

위의 두가지 경우를 일반화시켜 부등호와 제약식 그리고 목적식의 계수들이 모두 퍼지수로 표현될 경우 식 2)는 다음과 같은 Fuzzy L.P 모델이 된다[4].

$$\tilde{Y}_0=\tilde{B}_0x_0+\tilde{A}_{01}x_1+\cdots\cdots\tilde{A}_{0n}x_n\tilde{>}0 \qquad \cdots\cdots \text{식 6)}$$
$$\tilde{Y}_1=\tilde{B}_1x_0+\tilde{A}_{11}x_1+\cdots\cdots\tilde{A}_{1n}x_n\tilde{>}0$$
$$\vert \qquad \vert \qquad\qquad \vert$$
$$\tilde{Y}_m=\tilde{B}_mx_0+\tilde{A}_{m1}x_1+\cdots\cdots\tilde{A}_{mn}x_n\tilde{>}0$$

여기서 $x_0=1$ 이며 퍼지不等號 $\tilde{>}0$는 "거의 陽數"라는 개념이다.

식 6)을 행열형태로 다시 쓰면

$$\tilde{Y}=\tilde{A} \ \ x \ \tilde{>} \ 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{식 7)}$$

즉

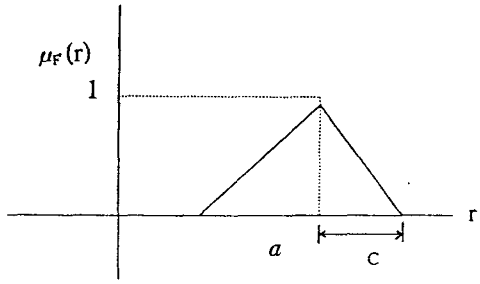
$$\begin{bmatrix} \tilde{Y}_0 \\ \vert \\ \tilde{Y}_m \end{bmatrix} \begin{matrix} = \\ \\ = \end{matrix} \begin{bmatrix} \tilde{B}_0 & \tilde{A}_{01}\cdots\cdots\tilde{A}_{0n} \\ \vert & \vert \qquad\quad \vert \\ \tilde{B}_m & \tilde{A}_{m1}\cdots\cdots\tilde{A}_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_0 \\ \vert \\ \tilde{x}_n \end{bmatrix} \tilde{>} \ 0$$

이 된다.

나. Fuzzy L.P의 Non-L.P로의 전환

R 상에 정의된 어떤 퍼지집합 F가 퍼지수(fuzzy number)이며 이 퍼지집합의 멤버쉽 함수 $\mu_F(r)$, $r\in R$ 이 다음과 같이 이등변 삼각형 형태일 때 이 멤버쉽 함수의 값이 '1'이 되는 r의 값을 a라 하고 폭을 c 라 하면 F는

두 파라메타 a와 c에 의해 간단히 정의 할 수 있으며 $F=(a, c)$로 표현 할 수 있다.



〈그림 1〉 이등변 삼각형 형태의 멤버쉽 함수

식 7)의 $\tilde{A}$의 j번째행 $\tilde{A}_j$는

$\tilde{A}_j=(\tilde{B}_j,\ \tilde{A}_{j1},\ \tilde{A}_{j2}, \cdots\cdots \tilde{A}_{jn})$,

$j=1, 2, \cdots\cdots, m$ ………………식 8)

이 되며 퍼지행열 의 모든 원소들이 퍼지수 이고 이등변삼각형 형태의 멤버쉽 함수를 갖는다면

$\tilde{B}_j=(a_{j0},\ c_{j0})$

$\tilde{A}_{jk}=(a_{jk},\ c_{jk})\quad k=1, 2, \cdots\cdots, n$

라 표시할 수 있으며

$\tilde{A}_j=(\ a_j,\ c_j)$

여기서 $a_j=(a_{j0},\ a_{j1}, \cdots\cdots,\ a_{jn})^t$

$c_j=(c_{j0},\ c_{j1},\ \cdots\cdots,\ c_{jn})^t$

로 표시할 수가 있다.

그리고 식 7)에서 $\tilde{Y}_i$, $i = 0, 1, 2, \cdots\cdots, m$ 는 이등변삼각형 멤버쉽 함수들을 갖는 퍼지수들의 일차 함수이므로 확장원리(extension principle)에 의해 이등변 삼각형 형태의 멤버쉽 함수를 갖는 퍼지수가 되며

$\tilde{Y}_i = (a_i^t x,\ c_i^t x)$ ……………식 9)

로 표현된다.

즉 $\mu_{Y_i}(r)=1-\dfrac{|r-a^t\ x|}{c_i^t x}$ ………식 10)

을 멤버쉽 함수로 갖는 퍼지수가 된다.

식 7)의 Fuzzy부등호 "$\tilde{>}$0"는 "거의 양수"이다 라는 개념이며 "$\tilde{Y}_i \tilde{>} 0$"은 "$\tilde{Y}_i$가 거의 양수(almost positive)"라는 표현이며

$\tilde{Y}_i \tilde{>} 0 \langle=\rangle \mu_{Y_i}(0) \langle 1-h,\ a_i^t x \rangle 0$ …식 11)

와 같이 정의된다. 이때 h는 $\tilde{Y}_i \tilde{>} 0$ 인 정도를 나타내게 된다(그림 2 참조).

〈그림 2〉에서

$S= \int_0^{\infty} \mu_{Y_i}(r)\,dr \ /\ \int_{-\infty}^{\infty}\mu_{Y_i}(r)\,dr$

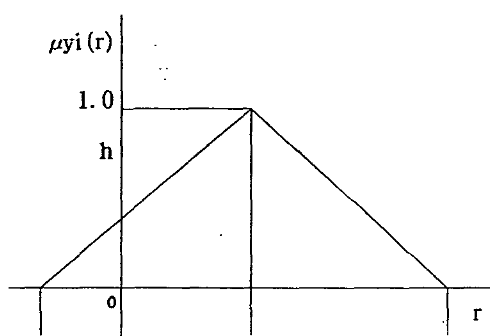
…………식 12)

라고 정의하면 S는 멤버쉽함수 $\mu_{Y_i}(y)$의 전체 면적에 대해 양수부분의 면적비율을 나타낸다. 따라서 $\mu_{Y_i}(r)$가 線形函數일 때 $S = 0.5+h-0.5h^2$으로 계산되고 예를 들어 $h=0.6$이면 $S=0.92$가 되어 양수일 정도가 0.92라는 意味를 지닌다.

식 11)과 같이 "$\tilde{Y}_i \tilde{>} 0$ "를 정의할 때 식 6)은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{array}{l}
\mu_{y_0}(0)=1-\dfrac{a_0^t x}{c_0^t x}\leq 1-h,\quad a_0^t x\geq 0\\
\quad\vdots\\
\mu_{y_m}(0)=1-\dfrac{a_m^t x}{c_m^t x}\leq 1-h,\ a_m^t x\geq 0 \text{ 단, } x>0
\end{array}$$

……………식 13)



〈그림 2〉 Y 〉 0 의 圖解

식 13)을 다시 整理하면 다음과 같이 간단히 표현된다.

$(a_0\text{-}hc_0)^t x \geq 0, \cdots (a_i\text{-}hc_i)^t x \geq 0,$

$\cdots (a_m\text{-}hc_m)^t x \geq 0.$ ··················식 14)

따라서 식 11)을 만족하는 x를 구하는 문제는 식 14)을 만족하는 벡터중 h를 최대로 하는 Vector x*를 찾는 문제로 代置될 수 있다. 그러므로 식 14)는 다음과 같이 공식화 될 수 있다.

Max h = h* ·····················식 15)

st. $(a_j\text{-}hc_j)^t x \geq 0\,(j=0, 1, \cdots m),\ \ 0 \leq h \leq 1$

여기서 제약식은 h와 x의 非線形式이므로 Non L.P 문제가 된다.

따라서 식 (6)의 퍼지문제는 파라메터들이 삼각꼴의 소속함수를 가질 때 식 15)와 같은 전통적인 非線形計劃法으로 轉換된다. 식 15)의 Non L.P를 해결하는 알고리즘은 다음과 같다[4].

ALGORITHM

1) 식 15)을 滿足하는 許容可能集合(admissible set)이 存在하도록 작은 h를 初期置로 選定한다.

2) 1)에서 선정한 初期置 h로부터 시작하여 증분 △(> 0)만큼씩 증가시키면서 식 15)의 不等式이 만족되는 許容集合이 存在하지 않게 되는 직전의 h값을 구한다.

3) 2)에서 구한 h를 식 14)에 대입하여 許容集合을 구한 후 여기서 가장 核心이 되는 不等式을 취한다. 이를 j번째 不等式이라 하면 이 不等式의 左邊을 目的函數

$J = a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots a_{jn}x_n$

로 취한다. 나머지 不等式

$(a_j\text{-}(h+k\triangle)_{cj})^t x \geq\ 0,\ \ j=0, 1, 2, \cdots m$

을 制約式으로 하여 J를 최대로 하는 x*를 구한다.

위의 알고리즘은 h가 커질수록 작은 許容集合을 얻게 된다는 다음 命題에 基礎하며 이 증명은 식 14)로부터 바로 구할 수 있다.

命題 : h가 주어질 때 식 14)에 의해 구성되는 許容集合을 X_{h^*}라고 하면,

$h_1 < h_2 \Rightarrow X_{h1^*} \supset X_{h2^*}$

가 된다.

Ⅲ. 공격항공기 표적할당 모형

가. Lemus & David 모형

Lemus와 David의 전통적인 표적할당 L.P 모형은 다음과 같다[5]. 이 모형은 Lemus와 David의 線形 標的割當모델은 가용한 공격소티수(식16)의 A_i) 내에서 우군의 攻擊能力(식 16) 의 D_{2j})을 일정한 수준 이상으로 유지하면서 우군의 損失費用(식 16)의 C_{ij})을 最小化하는 線形計劃모델이며 이때의 目的式과 制約式의 係數와 不等號는 모두 전통적인 實數와 不等號로 구성된다.

$$\begin{aligned}
&\text{Min. } Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} C_{ij} \times X_{ij} \\
&\sum_{i=1}^{n} L_{ij} \times X_{ij} \geq D_{2j},\ j=1, 2, \cdots m \\
&\sum_{j=1}^{m} X_{ij} \leq A_i \qquad i=1, 2, \cdots n \\
&X_{ij} \geq 0,\ \text{integer. for all } i, j
\end{aligned}$$

··················식 16)

여기서

X_{ij} : i기종이 j표적에 할당되는 소티수로 결정 변수

C_{ij} : i機種이 j標的을 攻擊時 i機種의 被擊率을 고려한 單位 損失費用

A_i : i機種의 總 出擊可能 소티수

L_{ij} : j 표적에 할당되는 i 기종의 기종 2에 대한 상대적인 효과로 승수 비율

을 나타낸다.

그리고

AC_i : i기종의 航空機 購入單價

BC_k : k기종의 爆彈 單價

N_{ijk} : i機種이 j目標를 攻擊時 k種의 爆彈裝着數

FC_i : i 기종 항공기의 1回飛行(任務)를 위해 所要되는 費用(平均 部隊整備費, 廠整備費, 修理部屬費, 燃料費)

EQC_i : i機種에 支援되는 補助支援裝備 單價

라 할 때 Cij는 다음과 같이 계산된다.

$$C_{ij} = \{AC_i + (2 \times EQC_i)\} \times PH_{ij} + \sum_k N_{ijk} \times BC_k + FC_i \qquad \cdots\cdots\text{식 } 17)$$

여기서

$$PH_{ij} = PA_{ij} + (1-PA_{ij}) \times PB_{ij} + [1-(PA_{ij} + (1-PA_{ij}) \times PB_{ij})] \times PC_{ij}$$

이다.

D_{2j}는

$$D_{2j} = [\frac{\log(1-PK_j)}{\log(1-(PR_{2j} \times PD_{2j}))}]$$

로 계산되며 여기서 PA_{ij}, PB_{ij}, PC_{ij}는 기종 i가 목표 j에 진입, 공격, 귀환단계에서 피격될 확률이며, D_{2j}의 PK_{2j}, PR_j, PD_{2j} 는 각각 목표 j에 대한 요망파괴수준, 기종 2의 목표도달확률과 공격시의 목표 파괴확률을 각각 나타낸다.

나. 標的割當模型의 符號와 係數들의 曖昧性(Fuzziness)

Lemus와 David의 模型에서는 모든 파라메터와 不等號가 Fuzzy하지 않은 모형이다. 그러나 실제 문제에 있어서는 관련 파라메터들이 한 숫자로 측정되기 어려울 경우가 있으며 또한 不等號들도 단정적으로 '크다' 또는 '작다'라고 표현하기 어려운 경우가 있을 수 있다. 實際的으로 軍의 意思決定者들은 대체로 斷定的이기보다는 曖昧한 狀況에서 航空機 割當에 대한 決心을 하게 된다. 따라서 이 경우 퍼지數로 표현되어야 할 파라메터와 퍼지화해야 할 不等號들을 檢討하여 이들을 퍼지수로 모델링할 필요가 있게 된다.

1) 航空機 單價 (ACi)의 不確實性.

항공기의 가격이란 通常的으로 명확한 가격을 한 숫자로 제시할 수 없으며, 따라서 「대략 xx원 정도이다」 라는 퍼지수로 표현하는 것이 적합할 수가 있다. 이때 멤버쉽함수는 xx원을 중심으로 하고 最低豫想價와 最高豫想價의 차이를 폭으로 하는 삼각꼴 함수로 모델링될 수 있다.

2) 操縱士 損失費用의 不確實性($\widetilde{F}_{ij}$).

조종사가 손실될 경우 損失費用은 조종사의 技倆程度에 따라 달라지게 되는데 이는 손실된

조종사를 대체하는데 所要되는 費用이며 操縱士 費用에 따른 養成費用도 역시 「대략 xx 원 정도이다」라는 퍼지수로 표현하는 것이 적합하다. 여기서도 平均 養成費用을 중심으로 最低와 最高費用의 차를 폭으로 하는 삼각꼴 멤버쉽 함수($\tilde{F}_{ij}$)로 모델링될 수가 있다.

3) 1회 出擊時 消耗되는 運用費와 武裝費用의 不確實性($\tilde{M}_{ij}$)

운용비와 무장비는 通常 航空機價格의 x % 를 넘지 않는다고 본다. 따라서 항공기 가격이 퍼지수이므로 M_{ij}도 역시 퍼지수가 된다. 따라서 i기종이 標的 j에 投入되어 任務遂行中 損失될 境遇의 損失費用 $\tilde{C}_{ij}$는 다음과 같이 표현된다.

$$\tilde{C}_{ij}=(\tilde{A}C_i\times p_{ij}+\tilde{F}_{ij}p_{ij})+\ \tilde{M}_{ij} \quad \cdots\cdots\cdots \text{식 } 18)$$

여기서

$\tilde{A}C_i$: i기종의 航空機 損失費用(퍼지수)

$\tilde{F}C_{ij}$: i기종의 操縱士로서 標的 j에 攻擊任務 遂行中 被擊時 損失費用(퍼지수)

$\tilde{M}C_{ij}$: i기종의 j 標的 攻擊에 投入時 武裝 및 運用費用(퍼지수)

$\tilde{P}C_{ij}$: i기종이 標的 j 攻擊에 投入時 被擊될 確率

4) 乘數置의 標準化比率(L_{ij})의 不確實性($\tilde{S}M_{ij}$).

Lemus와 David 모형의 L_{ij}는 기종 2를 기준하였을 때 j표적에 할당되는 i기종의 상대적인 효과를 나타내는 승수비용으로 퍼지한 부분을 고려하지 않고 있다. 여기서 特定 機種을 基準으로 한 i기종의 표적 j에 대한 效果比率 L_{ij}를 任務遂行可能性으로 대치할 수가 있다. 그러나 임무수행 가능성은 操縱士의 기량과 航空機 의 性能에 따라 달라지며 이들 요소들은 역시 퍼지수로 표현이 가능하므로 임무수행 가능성도 퍼지수로 모델링할 수 있다.

여기서 $\tilde{S}M_{ij}$, $\tilde{s}k_{ij}$, $\tilde{a}p_{ij}$를 각각 다음과 같이 정의하면

$$\tilde{S}M_{ij}=\mathrm{Min}[\tilde{s}k_{ij},\ \tilde{a}p_{ij}] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{식 } 19)$$

로 표현할 수 있다.

$\tilde{S}M_{ij}$: i 기종의 표적 j에 대한 임무수행 가능성

$\tilde{s}k_{ij}$: 표적 j에 할당되는 기종 i의 조종사의 기량

$\tilde{a}p_{ij}$: 표적 j에 할당되는 기종 i의 성능

5) 要望 破壞水準을 達成시키기 위한 總割當出擊數의 不確實性.

Lemus와 David의 모델에서 D2j는 식 16)에서와 같이

$$D_{2j}=\left[\frac{\log(1\text{-}PK_j)}{\log(1\text{-}(PR_{2j}\times PD_{2j}))}\right]$$

에 의해 구한다. 그러나 여기서 標的 j의 要望破壞水準 Pk_j를 제외하고는 기종2가 標的에 도달될 확률 PR_{2j}, 그리고 표적 j를 파괴할 확률 PD_{2j}는 적의 防空能力 그리고 표적의 防護狀態에 따라 달라지므로 이들에 대한 정확한 평가 없이는 산출이 불가능하므로 D_{2j}자체는 전문가 또는 지휘관의 판단에 따른 直觀的 숫자로 주어지게 되므로 퍼지수로 표현되게 된다. 즉 專門家의 판단이나 사례분석을 통해 平均置를 구하고 이를 중심으로 삼각형멤버쉽함수를 갖는 퍼지수로 하는 것이 합당할 수가 있

다.

6) 航空機의 總出擊 소티數(Ai)의 不確實性.

Lemus와 David의 모형에서 항공기의 총출격가능 소티수는 최초의 作戰計劃에서와 같이 고정된 값을 가질 수는 없다. 初期 K대의 出擊航空機가 生存하여 歸還 후 再出擊(3회) 할 수 있는 總出擊可能소티는 식 20)에 의해 계산된다.

$$A_i = K + K(1-PH) + K(1-PH)^2 \quad \cdots\cdots \text{식 } 20)$$

여기서 P는 아 기종의 被擊率로서 進入, 攻擊, 歸還段階에서의 격추율에 관계되므로 적군의 對空能力에 크게 좌우된다. 따라서 적의 對空能力을 한 숫자 P로 표현하기 어려우며 여기에 不確實性이 內在되게 된다. 그러므로 Ai가 "정확하게 몇 대"라고 정의하기 보다는 "약 몇 대 정도"로 표현하는 것이 타당하므로 퍼지수로 모델링이 가능하게 된다.

다. 퍼지 標的割當線形計劃模型

따라서 위와 같이 기존의 Lemus와 David의 모형에 파라메터들을 퍼지화 시킬 때 다음과 같은 퍼지 L.P 모형으로 전환된다.

Fuzzy part

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \tilde{C}_{ij} \times X_{ij} \tilde{\geq} \tilde{z} \ : \text{목표}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \tilde{S}M_{ij} \times X_{ij} \geq \tilde{D}_i \ : \text{제약}$$

$$\sum_{j=1}^{m} X_{ij} \tilde{\leq} \tilde{A}_i \quad i = 1, 2, \cdots n$$

Crisp part

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ij} \geq 2 \quad j = 1, 2, \cdots m$$

$$X_{ij} \geq 0, \ \text{even integer. for all } i, j$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{식 } 21)$$

여기서 Crisp Part인

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ij} \geq 2 \quad j = 1, 2, \cdots m$$

$$X_{ij} \geq 0, \ \text{even integer. for all } i, j$$

는 指揮官의 意見이나 決心에 따라 一部 또는 모든 標的에 航空機 割當의 制限을 附與하는 경우를 假定하였으며 공군의 편대 단위를 반영하여 모든 표적에 1개 편대(2소티) 이상 割當되도록 모델링하였다.

라. 퍼지 L.P의 NLP로의 轉換과 알고리즘

앞에서 $\tilde{C}_{ij}$, $\tilde{S}M_{ij}$, $\tilde{D}_i$, $\tilde{A}_i$들의 파라메터가 삼각꼴 멤버쉽함수를 갖는 퍼지수로 모델링됨을 보았다. 따라서 이들 파라메터는

$$\tilde{C}_{ij} = (C\alpha_{ij},\ C\omega_{ij})$$

$$\tilde{S}M_{ij} = (SM\alpha_{ij},\ SM\omega_{ij})$$

$$\tilde{D}_i = (D\alpha_i,\ D\omega_i)$$

$$\tilde{A}_i = (A\alpha_i,\ A\omega_i)$$

로 표현 가능하다. 여기서

$C\alpha_{ij}$, $SM\alpha_{ij}$, $D\alpha_i$, $A\alpha_i$는 삼각꼴 멤버쉽함수의 중심이며 $C\omega_{ij}$, $SM\omega_{ij}$, $D\omega_i$, $A\omega_i$은 삼각꼴 멤버쉽함수의 폭이다.

그리고 식 21)의 $\tilde{z}$를 같은 방법으로

$$\tilde{Z} = (Z\alpha,\ Z\omega)1$$

와 같이 표현하고 식 21)의 標的割當 선형프로그램을 Tanaka의 방법에 따라 변환하면 다음과 같이 NLP로 변환된다.

$$
\begin{aligned}
&\text{MAX } Z = h^* \\
&\text{s.t.} -(Za - h \cdot Z\omega) + \\
&\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} (Ca_{ij} - h \cdot C\omega_{ij}) x_{ij} \geq 0 \\
&-(Da_i - h \cdot D\omega_i) + \\
&\sum_{j=1}^{m} (SMa_{ij} - h \cdot SM\omega_{ij}) x_{ij} \geq 0 \\
&(Aa_i - h \cdot A\omega_i) - \sum_{j=1}^{m} X_{ij} \geq 0 \ (i = 1, 2, \cdots n) \\
&\sum_{i=1}^{n} X_{ij} \geq 2 \quad j = 1, 2, \cdots m \\
&X_{ij} \geq 0, \ \text{even integer}
\end{aligned}
$$

………………식 22)

ALGORITHM

위의 非線形프로그램의 解를 구하기 위한 알고리즘은 II절의 알고리즘에서 실수해가 아닌 짝수정수해를 구하기 위한 節次를 補完하면 다음과 같이 구해진다.

1) 식 22)을 滿足하는 許容可能集合이 存在하도록 작은 h를 初期置로 選定한다.

2) 1)에서 선정한 初期置 h로부터 시작하여 증분 △(>0)만큼씩 증가시키면서 식 22)의 부등식이 만족되는 許容集合이 存在하지 않게 되는 직전의 h값을 구한다.

3) 2)에서 구한 h를 식 22)에 대입하여 許容集合을 구한 후 식 22)의 첫 制約式의 左邊式을 目的函數로 두고 나머지를 제약식으로 두어 이 目的函數를 최대로 하는 Xij*를 구한다.

4) 위에서 구한 X_{ij}*가 實數置이면 여기서 가장 가까운 짝수정수격자점을 취한다.

IV. 퍼지 표적할당모형의 적용예

가. 例 題

oo 飛行團에 敵의 飛行場施設 4개소(T_1, T_2, T_3, T_4)와 한개의 SAM Site (T_5)에 대한 破壞命令이 내려졌다. 여기에 2개의 機種을 投入하고 操縱士의 投入은 技倆이 다른 操縱士들로 無作爲로 選定하려 한다. 航空機 性能은 機種에 따라 차이가 있으나 단일 機種間에는 차이가 없다. 作戰參謀의 판단에 의하면 機種1과 機種2의 總 可用소티수($\widetilde{A}_i$)는 각각 「대략 15회 정도」와 「대략 22회 정도」로 판단되고 있으며 주어진 任務를 달성하는데 필요한 機種別 소티수는 각각 「15회 정도」와 「20회 정도」가 所要되리라 判斷되고 있다. 또한 i기종이 標的 j 에 投入時 被擊確率은 〈표 1〉과 같이 判斷되었다. 問題는 損失을 最小로 하면서 任務를 成功시키기 위해서는 標的 T_1, T_2, T_3, T_4, T_5에 어느 機種의 航空機를 몇 소티 投入할 것인가(x_{ij})를 決定하고자 한다.

〈표 1〉 機種別 任務遂行時 目標에 따른 被擊確率

Pij	T 1	T 2	T 3	T 4	T 5
i=1	.0034	.0036	.0036	.0037	.0045
i=2	.0028	.0027	.0027	.0035	.0040

여기서 航空機 機種 1과 機種 2의 損失費用은

$\widetilde{A}C_1 = (13.12, 5.78)$ $\widetilde{A}C_2 = (13.95, 4.95)$

로 算定하였으며, 操縱士의 選定結果 기종1의 경우 T_1은 요기, T_2, T_3에는 분대장, T_4, T_5에

는 교관자격의 操縱士가 割當되었고 기종2의 경우 T_1, T_3에는 분대장, T_2에는 요기, T_4에는 편대장, T_5에는 교관자격의 操縱士가 割當되었다고 가정하며 조종사의 損失費用을 아래와 같이 算定하였다.

$\widetilde{F}_{ij}=$

$$\begin{pmatrix} (0.5000, 0.012142), (3.3000, 1.50000) \\ (2.2500, 0.034666), (1.5000, 2.20000) \\ (2.2500, 0.034666), (3.3000, 1.50000) \\ (4.0000, 0.540000), (4.2700, 1.50000) \\ (4.0000, 0.540000), (7.1000, 3.20000) \end{pmatrix}^t$$

여기서 t는 전치행렬.

그리고 $\widetilde{M}_{ij}$는 標的에 關係없이 投入되는 機種의 10%를 一律的으로 적용하였다.

즉 $\widetilde{M}_{ij}=0.1 \cdot \widetilde{A}C_i, \quad A_j$

따라서 $\widetilde{C}_{ij}$는 식 17)을 이용하여 퍼지集合間의 演算을 통해 다음과 같이 구해진다.

$\widetilde{C}_{ij}=$

$$\begin{pmatrix} (0.133690, 0.052207), (0.032817, 0.022526) \\ (0.020455, 0.056179), (0.039089, 0.025344) \\ (0.020455, 0.056178), (0.035089, 0.023454) \\ (0.027498, 0.058664), (0.039325, 0.025193) \\ (0.033444, 0.071348), (0.034266, 0.037055) \end{pmatrix}^t$$

操縱士技倆의 멤버쉽함수는 空軍의 作戰運用指針에 의한 IPQC 技倆等級判定을 사용하여 크게 技倆水準을 4分類(요기, 분대장, 편대장, 교관)로 하여 각 등급의 水準에 대한 平均置를 중심으로, 그리고 각 수준에 속하는 最小等級點數와 最大等級點數의 차를 폭으로 하여 아래와 같이 삼각꼴 퍼지수로 표현하였다.

$\widetilde{S}K_{ij}=$

$$\begin{pmatrix} (0.650000, 0.830000), (0.700000, 0.40000) \\ (0.750000, 0.830000), (0.600000, 0.40000) \\ (0.750000, 0.750000), (0.600000, 0.50000) \\ (0.950000, 0.870000), (0.200000, 0.20000) \\ (0.950000, 0.850000), (0.200000, 0.20000) \end{pmatrix}^t$$

기종의 성능 $\widetilde{a}p_{ij}$는 單一 機種間에는 差異가 없다고 하였으므로 機種別 性能은 다음과 같이 假定하였다.

$\widetilde{a}p_{ij}=$

$$\begin{pmatrix} (0.31, 0.1801), (1, 0.2185) \\ (0.31, 0.1801), (1, 0.2185) \\ (0.31, 0.1801), (1, 0.2185) \\ (0.31, 0.1801), (1, 0.2185) \\ (0.31, 0.1801), (1, 0.2185) \end{pmatrix}^t$$

$\widetilde{S}M_{ij}$을 구하기 위해 식 19)로부터 이등변삼각꼴멤버쉽함수들의 Min을 구하면 다음과 같은 誘導式을 구할 수 있다.

$\widetilde{S}M = MIN\{(a_1, c_1), (a_2, c_2)\}$

$$= \begin{cases} \{a_1, \min(c_1, c_2)\} & \text{if } a_1 = a_2 \\ W \cdot \left[\dfrac{a_2 \cdot c_1 + a_1 c_2}{c_1 + c_2}, \dfrac{\min(c_1 \cdot c_2) \cdot \|a_1 a_2\|}{c_1 + c_2}\right] & \text{if } a_1 \neq a_2 \\ \text{여기서} & \\ W = \dfrac{c_1 + c_2}{c_1 + c_2 + \|a_1 - a_2\|} & \end{cases} \quad \cdots\cdots \text{식 } 23)$$

따라서 식 23)으로부터 $\widetilde{S}M_{ij}$를 구하면 다음과 같다.

$\widetilde{S}M_{ij}=$

$$\begin{pmatrix} (0.379576, 0.293974), (0.249576, 0.294526) \\ (0.411582, 0.939943), (0.281682, 0.278557) \\ (0.512570, 0.932127), (0.382676, 0.262127) \\ (0.613247, 0.921685), (0.483347, 0.271685) \\ (0.411582, 0.921685), (0.281682, 0.271685) \end{pmatrix}^t$$

또한, 가정사항에서 $\widetilde{D}_1$, $\widetilde{D}_2$는 「대략 15회 정도」와 「대략 20회 정도」가 되었으므로

$\widetilde{D}_1 = (15, 8)$

$\widetilde{D}_2 = (20, 9)$

로 적용하였다.

A_i값도 퍼지수로 부여되어야 하며 D_{2j}와 동일한 방법으로 멤버쉽함수의 부여가 가능하다. 따라서 $\widetilde{A}_1$, $\widetilde{A}_2$는 「22회 정도」와 「20회 정

〈표 2〉 퍼지 L.P의 해

h^*	Z의 계산치	X^*_{11}	X^*_{12}	X^*_{13}	X^*_{14}	X^*_{15}	X^*_{21}	X^*_{22}	X^*_{23}	X^*_{24}	X^*_{25}
0.7142	0.2777945	2	2	2	0	2	0	0	0	2	0

도」로 가정하였으므로

$$\tilde{A}_1 = (22, 14) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{식 24)}$$

$$\tilde{A}_2 = (20, 14)$$

가 된다.

나. 適用結果

이와 같은 형태의 構成으로 앞 장에서 언급한 알고리즘을 이용하여 해를 구하면 목표 j에 대한 i기종의 최적할당 소티수는 〈표 2〉와 같이 구해진다.

다. 感度分析

1) 멤버쉽함수 $\tilde{Z}$의 變化

위의 예제로부터 $\tilde{Z}$의 범위를 (3, 1.5)로부터 (1, 0.25)까지 바꾸어 해를 구하여 보았다. 〈표 3〉은 $\tilde{Z}$의 변화에 따른 MAX h^*, x_{ij^*}와 이 h^*, x_{ij^*}에 의해 만족되는 Z값을 보여주고 있다. 즉, 이 Z값은 j표적에 i기종을 x_{ij^*}로 割當하였을 때 損失되는 費用의 上限線을 의미한다고 할 수 있다.

다음 〈표 3〉에서 보는 바와 같이 $\tilde{Z}$ 멤버쉽함수의 폭(support set)이 감소하고 중심값이 작을 수록 h^*와 Z값이 감소함을 알 수 있다. 여기서 h^*가 Z의 폭이 적어지고 중심값이 작을수록 감소하는 것은 손실 비용의 한계를 작게 또한 덜 fuzzy하게 잡을수록 x_{ij^*}가 目的과 制約式을 만족시키는 정도가 작아진다는 것을 보여주고 있다. 意思決定者는 確信의 程度(h^*)와 費用은 trade off를 감안해야 한다는 것을 알 수 있다.

〈표 3〉 Z의 멤버쉽함수에 따른 최대 h^*와 Z의 변화

멤버쉽함수 $\tilde{Z}$	Max h^*	X^*_{11}	X^*_{12}	X^*_{13}	X^*_{14}	X^*_{15}	X^*_{21}	X^*_{22}	X^*_{23}	X^*_{24}	X^*_{25}	Z
(3,1.5)	0.7142	2	2	0	2	2	0	0	2	0	0	0.2386381
(2.75,1.5)	0.7142	0	2	0	2	2	2	0	2	0	0	0.2386381
(2.5,1.5)	0.7142	2	2	2	0	2	0	0	0	2	0	0.2777949
(2.25,1.5)	0.7139	0	2	0	2	2	2	0	2	0	0	0.2386775
(2.0,1.5)	0.7134	0	2	0	2	2	2	0	2	0	0	0.2386380
(1.5,1.5)	0.7114	2	2	2	2	2	0	0	0	0	0	0.2695770

2) 制約條件의 影響

위 문제에서 制約條件은 4가지이다. 이 4가지의 制約條件에서 관심있게 보아야 하는 요소는 右邊項의 퍼지수이다. 우변항은 4가지의 제약요소에 대한 범위를 설정하고 있고 우변항의 퍼지수 특성에 따라 허용집합의 크기와 가능해가 달라지기 때문이다. 〈표 4〉는 제약식 3의 우변항 움직임에 따른 허용집합의 크기와 x_{ij}의 변화를 보여준다.

〈표 4〉 제약조건 우변항의 변화에 따른 해의 변화

$\tilde{A}_1=(18,16)$

멤버쉽함수 $\tilde{A}_2$	허용집합의크기	X^*_{11}	X^*_{12}	X^*_{13}	X^*_{14}	X^*_{15}	X^*_{21}	X^*_{22}	X^*_{23}	X^*_{24}	X^*_{25}	Z	Max h*
(14,14)	7	0	2	0	2	2	2	0	2	0	0	.2386775	.713
(15,15)	10	0	2	0	2	2	2	0	2	0	0	.2355520	.730
(16,16)	10	0	2	0	2	2	2	0	2	0	0	.2315740	.750
(17,17)	10	0	2	0	2	2	2	0	2	0	0	.2315740	.750

$\tilde{A}_1=(20,18)$

멤버쉽함수 $\tilde{A}_2$	허용집합의크기	X^*_{11}	X^*_{12}	X^*_{13}	X^*_{14}	X^*_{15}	X^*_{21}	X^*_{22}	X^*_{23}	X^*_{24}	X^*_{25}	Z	Max h*
(14,14)	7	0	2	0	2	2	2	0	2	0	0	.2386387	.714
(15,15)	10	0	2	0	2	2	2	0	2	0	0	.2355204	.730
(16,16)	10	0	2	0	2	2	2	0	2	0	0	.2315740	.750
(17,17)	10	0	2	0	2	2	2	0	2	0	0	.2296008	.775

$\tilde{A}_1=(22,20)$

멤버쉽함수 $\tilde{A}_2$	허용집합의크기	X^*_{11}	X^*_{12}	X^*_{13}	X^*_{14}	X^*_{15}	X^*_{21}	X^*_{22}	X^*_{23}	X^*_{24}	X^*_{25}	Z	Max h*
(14,14)	7	0	2	0	2	2	2	0	2	0	0	.2386775	.713
(15,15)	10	0	2	0	2	2	2	0	2	0	0	.2348692	.733
(16,16)	10	0	2	0	2	2	2	0	2	0	0	.2315740	.750
(17,17)	10	2	2	2	0	0	0	0	0	2	2	.2478512	.760

$A_1=(24,22)$

멤버쉽함수 $\tilde{A}_2$	허용집합 의크기	X_{11}^*	X_{12}^*	X_{13}^*	X_{14}^*	X_{15}^*	X_{21}^*	X_{22}^*	X_{23}^*	X_{24}^*	X_{25}^*	Z	Max h*
(14,14)	7	0	2	0	2	2	2	0	2	0	0	.2386224	.713
(15,15)	10	0	2	0	2	2	2	0	2	0	0	.2355204	.715
(16,16)	10	0	2	0	2	2	2	0	2	0	0	.2311574	.750
(17,17)	10	0	2	0	0	2	2	0	2	0	0	.2296008	.760

여기서 觀察할 수 있듯이 機種1의 가용소티수 (A_1)가 일정할 때 기종 2의 가용소티수 (A_2)를 증가시키는 것이 목적과 제약식을 만족하는 정도가 커짐을 알 수 있어 목적달성의 확신이 커지게 됨을 의미한다.

Ⅵ. 結 論

지금까지 일반적으로 공식화된 할당모형에서는 현실을 模型化할 때 여러 假定事項으로 인하여 실세계를 충분히 반영하지 못하는 경우가 있다. 이러한 원인은 현실문제에 있어서 모형자체가 불완전하거나 상황이 명확하지 않은 퍼지한 경우로 나타나기 때문이다. 즉, 기존의 표적할당모형에서의 파라메터나 부등호는 결정형으로, 한 숫자로 표현될 수 있어야 하고 「크다」 「작다」와 같이 확실하게 표현해야 한다는 제한점이 있어 현실문제를 다루는데 어려움이 남아 있었다.

그럼에도 불구하고 의사결정자들, 특히 군의 지휘관은 결정대안에 대해 명확한 해를 요구하는 경우가 빈번히 발생된다. 따라서 본 논문에서는 이러한 단점을 보완하는 퍼지 선형계획법을 적용하여 할당문제에 접근하여 보았다.

퍼지 선형계획법은 불확실한 파라메터를 멤버쉽함수로 처리하여 불확실성을 다루고 있으며 이러한 방법은 결과적으로 제약식과 목적식을 동시에 만족시켜 주는 해의 확신도(h*)를 알 수 있게 한다. 일반적으로 군의 지휘관은 애매한 상황에서 의사결정을 해야하는 경우가 있을 수 있다. 이러한 경우에 지휘관(전문가)이 생각하는 관련계수에 대한 판단이나 의견을 멤버쉽함수로 정의되는 파라메터로 처리하게 되면 구해지는 결정변수의 목표와 제약에 만족되어지는 정도를 알 수 있게 되며 의사결정에 도움을 주게 된다.

그러나 선형계획은 파라메터와 결정변수사이에 반드시 선형관계가 있어야 하나 현실세계의 실제적인 문제를 다루는데는 비선형관계로 이루어지는 문제가 빈번하므로 이를 효과적으로 반영하기 위해서는 퍼지 비선형계획법이나 퍼지 동적계획법 등에 의한 연구가 지속적으로 이루어져야 할 것이다.

참 고 문 헌

〔1〕 민계료 외, 資源配分의 最適化 技法에 관한 研究, 國防大學院 연구보고서, pp.55, 1989

〔2〕 Zimmermann, H.j., "Descion and Optimization of Fuzzy Systems", *International J. General Systems* 2, pp.209-215, 1979

〔3〕 Zimermann, H.J., "Decision and Optimization Linear Programming with Several Objective Functions", *Fuzzy Set and Ststem*, Vol.1, pp.45-56, 1976

〔4〕 Tanaka, H., Asai, K., "Fuzzy Linear Programming Problems with Fuzzy Numbers", *Fuzzy sets and Systems*, Vol.13, pp.1-10, 1982

〔5〕 Lemus, F., David, K.H., "An Optimum Allocation of Different Weapon to Target Complex", *Operations Research* , vol.11, 1983