

2차원 직각좌표계에서 DEM을 이용한 ray effect의 해석

최호신 · 김종경*

한국 원자력 안전기술원, *한양대학교

요 약

입자 수송방정식에서 각변수(angular variable)를 각분할근사법으로 해석할 때 나타나는 이상 현상인 ray effect를 치유할 수 있는 방법의 하나로써, 유한 분할각(discrete angle quadrature)을 입자속의 공간적 분포로써 조종하는 방법인 각분할요소법(discrete elements method)을 근거로 하여 2차원 직각좌표계에서의 입자 수송 해석 프로그램(TWODET)을 개발하였다.

평판형 등방적 고정선원이 존재하는 균질 사각형 흡수체에 대해 TWODET로 해석한 결과, 각 요소가 K-2, L-3인 경우에도 DOT 4.3(S-10)에서보다 ray effect 치유에 더 효과가 있음을 확인하였다. 그러나, 계산시간은 기존의 각분할법에서보다 약 4배 더 소비되었다. 선원에서 바로 진공(vacuum boundary)으로 떨어지는 구조의 경우, TWODET의 결과에서도 심한 왜곡을 보이고 있는데 선원과 바로 이웃한 진공 간의 급격한 불연속성으로 인함으로 추측된다. 고정선원이 있는 매질에 강한 흡수체가 추가된 구조의 경우에서도 TWODET(K-3, L-4)로 DOT 4.3(S-10)보다 좋은 결과를 보였다.

Key words : ray effect, 각분할법, 각요소법, 각입자속 가중평균 방향, Gauss Legendre approximation rule, 공간 차분방정식, 사방균질 흡수체

서 론

각입자속(angular flux)을 수치해석적으로 구하는 방법중 하나인 각분할법(DOM)은 이미 잘 알려진 바 대로 비교적 간단히 그리고 빠른 계산시간으로 상당히 정확하게 입자 수송 방정식을 풀 수 있다. 그러나 계산 대상의 기하학적 구조가 복잡한 문제에서는 이 각분할법의 사용에 어려움이 따른다. 각분할법에서는 입자 수송 방정식을 각분할할 때 점방향들의 집합으로 분할 하는데, 이 점 방향들의 집합은 고정된 값으로 선택되고 입자속의 공간분포나 대상 문제에

독립적이다. 이로 말미암아 실제로 입자속의 변화가 심한 부분의 해석에 어려움이 있고, 특히 2차원 이상의 문제에서 서로 다른 매질의 경계 부분 등에서 ray effect가 나타난다[1,2,3]. 이는 수송방정식의 각의존성을 몇개의 고정된 방향에 대해서만 고려하므로써 제한된 각들에 의해 입자의 흐름(streaming)을 제한적으로 밖에 묘사할 수 없음을 기인한다. 다시 말해서 전 공간각적인(rotationally invariant) 수송방정식을 각분할법에서는 기껏 제한된 공간각(ray)에서만 해당되는 한정된 수송방정식의 집합으로 묘사하는 것이 DOM으로, 여기서 야기되는 공간적 손

실(loss of rotational invariance)이 ray effect의 원인이다[4]. 예로서, 순수하게 흡수 단면적만 존재하는 매질에서 등방 선형 선원을 고려할 때 선원으로부터 나온 입자의 각입자속을 선원 관점에서 본다면 전 방향으로 대칭(azimuthal symmetry)되어야 할 것이다. 그러나 이를 DOM에서 풀면 한정된 방향으로만 선원이 나갈 것이므로 이 방향으로만 δ -함수적인 각입자속이 나타나서 이 방향에서는 해가 만족스럽겠지만, 공간적으로 볼 때 이 방향에 있지 않은 많은 부분(mesh cell)들에서는 외부선원에 의한 효과는 없고 또 매질이 순수 흡수체라고 보았기에 산란 선원함도 없어 각입자속이 영이 될 수밖에 없다. 따라서 DOM에서는 한정된 방향에서의 δ -함수적인 값들의 집합으로부터 각입자속을 균일하게 근사하게 되므로, 이러한 상황에서는 각분할 근사가 만족스럽지 못한 결과를 가져온다.

각분할된 입체각방향의 방향여현 성분들(분할각)과 이들이 단위구에서 차지하는 미소 입체각분율 및 각입자속으로 표시되는 입자선속을 정확히 구해 내기 위해서는 이 분할각과 입체각분율(quadrature set)을 얼마나 적절히 선택하는가에 크게 좌우된다. 그러나 각분할법에서는 quadrature set을 어떻게 선택하더라도, 위에서 언급한 바와 같이, 입체각이 고정된 방향으로만 제한되므로 말미암아 이로부터 야기되는 문제는 계속 존재할 수밖에 없다[5]. 이를 보완하는 한 방법으로서 입체각을 고정하지 않고 입체각에 각입자속의 공간의존성을 고려하여 정하는 방법(scheme)을 생각한다.

각입자속 가중평균 방향[6,7]

에너지 E를 가진 입자가 위치 \underline{r} 에서 $\underline{\Omega}_m$ 방향으로 움직일 때의 입체각을 각입자속에 대해서 다음과 같이 정의한다.

$$\underline{\Omega}_m = \frac{\int_{D_m} \underline{\Omega} \Psi(\underline{r}, E, \underline{\Omega}) d\Omega}{\int_{D_m} \Psi(\underline{r}, E, \underline{\Omega}) d\Omega}$$

이때 입체각 $\underline{\Omega}_m$ 은 고정점방향 개념이 아니고 단위구를 썰기(wedge or cone)모양의 영역($D_m, m=1, \dots, M$)으로 분할하여 영역 D_m 에서 각입자속으로 가중되는 '조종각(steered angle)'이다.

시간독립 입자 수송방정식을 입체각 $\underline{\Omega}_m$ 의 영역 D_m 에서 적분하면 다음과 같다.

$$\underline{\Omega}_m \cdot \nabla \Psi(\underline{r}, E, \underline{\Omega}_m) + \Sigma_t(\underline{r}, E) \Psi(\underline{r}, E, \underline{\Omega}_m) = q(\underline{r}, E, \underline{\Omega}_m)$$

여기서,

$$\Psi(\underline{r}, E, \underline{\Omega}_m) = \frac{\int_{D_m} \Psi(\underline{r}, E, \underline{\Omega}) d\Omega}{\int_{D_m} d\Omega}$$

$$J(\underline{r}, E, \underline{\Omega}_m) = \frac{\int_{D_m} \underline{\Omega} \Psi(\underline{r}, E, \underline{\Omega}) d\Omega}{\int_{D_m} d\Omega}$$

$$q(\underline{r}, E, \underline{\Omega}_m) = \frac{\int_{D_m} q(\underline{r}, E, \underline{\Omega}) d\Omega}{\int_{D_m} d\Omega}$$

$$q(\underline{r}, E, \underline{\Omega}) = \int dE' \int d\Omega' \Sigma_s(\underline{r}, E' \rightarrow E, \underline{\Omega}' \rightarrow \underline{\Omega}) \Psi(\underline{r}', E, \underline{\Omega}') + S(\underline{r}, E, \underline{\Omega})$$

(x,y,z)좌표계에서 임의의 입체각 $\underline{\Omega}$ 가 z축으로부터 측정되는 극각(polar angle)을 θ 라 하고, x축으로부터 y축으로 측정되는 방위각(azimuthal angle)을 φ 라 하면, $\underline{\Omega}$ 의 z방향, x방향 및 y방향의 방향여현들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \xi &= \cos \theta \\ \mu &= \sqrt{1 - \xi^2} \cos \varphi \\ \eta &= \sqrt{1 - \xi^2} \sin \varphi \end{aligned}$$

여기서 (ξ, φ)좌표계를 도입하면, 이 좌표계에서 단위구에 대한 ξ, φ 의 영역은 각각 [-1,1], [0,2 π]이다. 그런데, 입체각 $\underline{\Omega}$ 의 x축 방향여현과 y축 방향여현이 $\xi, \cos \varphi$ 또는 $\sin \varphi$ 로 표시되는데, ξ 는 영역 [-1,0]과 [0,1]에서 부호만 반대인 반대칭성을 유지하고 있고, $\cos \varphi$ 와

$\sin \varphi$ 는 φ 의 영역 $[0, \pi/2]$, $[\pi/2, \pi]$, $[\pi, 3\pi/2]$ 및 $[3\pi/2, 2\pi]$ 서 부호가 바뀌지만, 그 값도 대칭성을 유지하고 있다. 따라서 입체각 Ω 를 각분할할 때 각 좌표를 대칭되게 선택하면 계산대상의 분할각수를 줄일 수 있다. 다시말해서 단위구를 각분할하는데 있어서 X-Y 평면의 위쪽 상반구인 Z축의 양의 방향, 즉 ξ 의 $[0, 1]$ 에 대해서만 ξ 를 선택하고, φ 는 $[0, \pi/2]$ 에서 선택하여 $[0, 2\pi]$ 에 대칭되게 값을 부여하므로써 정해지는 각요소들에 대하여 각입자속을 구하면 상반구에 대한 각 입자속들이 결정되고, 하반구에 대해서는 이와 대칭되는 각입자속을 적용하므로써 단위구 전체에 대한 각입자속이 구해진다.

(ξ, φ) 좌표계에서 $\Omega_m = \xi_m \hat{e}_\xi + \varphi_m \hat{e}_\varphi$ 로 표시할 수 있다. 이를 증명하기 위하여 $\psi(\Omega) = f(\xi) g(\varphi)$ 가 변수분리가 가능하다고 가정하면, 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} \Omega_m &= \frac{\int_{D_m^\xi} \int_{D_m^\varphi} (\xi \hat{e}_\xi + \varphi \hat{e}_\varphi) f(\xi) g(\varphi) d\xi d\varphi}{\int_{D_m^\xi} \int_{D_m^\varphi} f(\xi) g(\varphi) d\xi d\varphi} \\ &= \xi_m \hat{e}_\xi + \varphi_m \hat{e}_\varphi \end{aligned}$$

그리고 여기서 ξ_m, φ_m 을 각각 ξ, φ 좌표계에서 각입자속에 대한 가중평균 흐름방향(flux-weighted mean streaming direction)이라 부르고 이들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \xi_m &= \frac{\int_{D_m^\xi} \xi f(\xi) d\xi}{\int_{D_m^\xi} f(\xi) d\xi} \\ \varphi_m &= \frac{\int_{D_m^\varphi} \varphi g(\varphi) d\varphi}{\int_{D_m^\varphi} g(\varphi) d\varphi} \end{aligned}$$

ξ, φ 를 각분할하는 데는 여러 방법을 생각할 수 있는데, 여기서는 ξ 를 $[0, 1]$ 에서 균일하게 K 등분하고, φ 를 $[0, \pi/2]$ 에서 균일하게 L 등분한다. 그러면 입체각요소 $\Omega_m = \xi_m \hat{e}_\xi + \varphi_m \hat{e}_\varphi$

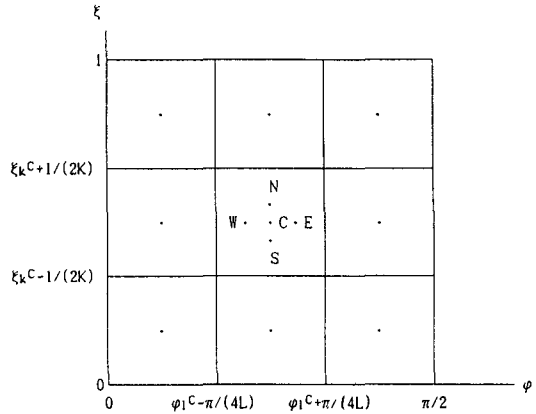


Fig. 1. Discrete Element Auxiliary Directions for 3 Point Gauss-Legendre Rule

의 ξ 좌표 영역 D_m^ξ 은 $[\xi_k - 1/(2K), \xi_k + 1/(2K)]$ 이고, φ 좌표 영역 D_m^φ 는 $[\varphi_l - \pi/(4L), \varphi_l + \pi/(4L)]$ 이 되며, 요소 ξ_m, φ_m 을 이 영역에서 위 식들로부터 구할 수 있다.

3-point Gauss-Legendre approximation rule [8]을 이용하여 위 식을 간단히 하면, 각입자속 가중평균 흐름방향은 3개의 고정된 방향변수에 의한 수치적분형태로 표시할 수 있다. 그림 1은 (ξ, φ) 좌표계의 영역 D_m 에서 상기 고정 방향들의 집합에 대한 개략적 위치를 보여주고 있다. 영역 $[\xi_k - 1/(2K), \xi_k + 1/(2K)]$ 에서 수치적분형태의 가중평균 방향 ξ_m 은 다음식으로 표시된다.

$$\xi_m = \xi_k^C + (bh) \frac{f(\xi_k^C + bh) - f(\xi_k^C - bh)}{f(\xi_k^C + bh) + 1.6f(\xi_k^C) + f(\xi_k^C - bh)}$$

여기서 'b'는 이웃간 간격인자(associated point interval)로 $\sqrt{0.6}$ 이고, 'h'는 분할각메시(discrete angular mesh)의 반에 해당하는 값으로써 ξ 방향에서는 $1/(2K)$ 이 된다. 마찬가지로, φ_m 은 영역 $[\varphi_l - \pi/(4L), \varphi_l + \pi/(4L)]$ 에서

$$\varphi_m = \varphi_l^C + (bh) \frac{f(\varphi_l^C + bh) - f(\varphi_l^C - bh)}{f(\varphi_l^C + bh) + 1.6f(\varphi_l^C) + f(\varphi_l^C - bh)}$$

여기서, $b = \sqrt{0.6}$, $h = \pi/(4L)$ 이다.

3 point Gauss-Legendre rule를 써서 이와 같이 각입자속 가중평균 방향을 구할 수 있으며, 이 방향은 분할각메시 안에서 취한 임의의 한 점(angle)으로부터 'b'와 'h'의 곱에 해당하는 정도 떨어진, 다음과 같은 이웃 점들(associated angles)로 표현된다.

$$\begin{aligned} \xi_k^c &= \left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{K}, \quad k=1,2,\dots,K \\ \xi_k^N &= \xi_k^c + \sqrt{0.6} \frac{1}{2K} \\ \xi_k^S &= \xi_k^c - \sqrt{0.6} \frac{1}{2K} \\ \varphi_l^c &= \left(l - \frac{1}{2}\right) \frac{2\pi}{4L}, \quad l=1,2,\dots,L \\ \varphi_l^E &= \varphi_l^c + \frac{\pi\sqrt{0.6}}{4L} \\ \varphi_l^W &= \varphi_l^c - \frac{\pi\sqrt{0.6}}{4L} \end{aligned}$$

각 요소법에서도 각분할법에서도 마찬가지로 각요소 Ω_m 이 단위구에서 차지하는 표면적의 비율을 "weight"로 정의한다.

$$\begin{aligned} W_m &= 1/(4\pi) \int_{D_m} d\Omega \\ &= 1/(4\pi) \int_{D_m^E} d\xi \int_{D_m^W} d\varphi \end{aligned}$$

그런데, 여기서는 각요소 ξ 를 영역 $[0,1]$ 에서 K등분, φ 를 영역 $[0,2\pi]$ 에서 4L 등분하므로 'weight'는 상수로 $1/(4KL)$ 이 된다.

$\psi_m(\underline{r}, E) = \psi(\underline{r}, E, \Omega_m)$, $\underline{J}_m(\underline{r}, E) = \underline{J}(\underline{r}, E, \Omega_m)$, 및 $q_m(\underline{r}, E) = q(\underline{r}, E, \Omega_m)$ 으로 표시하면 입자선속 (scalar flux) $\phi(\underline{r}, E)$ 과 current의 x 및 y 방향으로 scalar 성분 J_x, J_y 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \phi_m(\underline{r}, E) &= 2\pi \sum_{m=1}^M \psi_m(\underline{r}, E) W_m \\ J_x(\underline{r}, E) &= 2\pi \sum_{m=1}^M \mu_m(\underline{r}) \psi_m(\underline{r}, E) W_m \\ J_y(\underline{r}, E) &= 2\pi \sum_{m=1}^M \eta_m(\underline{r}) \psi_m(\underline{r}, E) W_m \end{aligned}$$

여기서 W_m 은 앞에서 기술한 바와 같이 상수로 주어지고 $M=4KL$ 이다.

공간 차분방정식 (Spatial Discretization)[9]

z방향으로는 net current가 없다고 가정하면 입자의 방향성에서 z방향을 고려하지 않아도 되고 각좌표계를 x축 방향여현과 y축 방향여현만으로 표현할 수 있다.

따라서 2-D 직각좌표계에서 수송방정식은 다음과 같이 간단히 나타낼 수 있다.

$$\mu_m \frac{\partial \psi_m}{\partial x} + \eta_m \frac{\partial \psi_m}{\partial y} + \sum_t \psi_m = q_m$$

여기서, 각방향 μ_m, η_m 는 각입자속 가중평균 방향 ξ_m, φ_m 로부터 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} \mu_m &= \sqrt{1 - \xi_m^2} \cos \varphi_m \\ \xi_m &= \sqrt{1 - \xi_m^2} \sin \varphi_m \end{aligned}$$

우선 각방향 μ_m, η_m 의 양의 방향에 대해서, 또 임의의 단위세포(unit cell)로 들어오고 나가는 각입자속을 다음 그림 2와 같이 표시하고, 세포로 들어오는 각입자속을 안다고 할 때 세포 밖으로 나가는 각입자속은 공간 차분법(spatial differencing scheme : SDS)에 의해 구할 수 있다. 여기서는 SDS중에서 비교적 정확한 다이아몬드 차분법(diamond difference[DD] scheme)

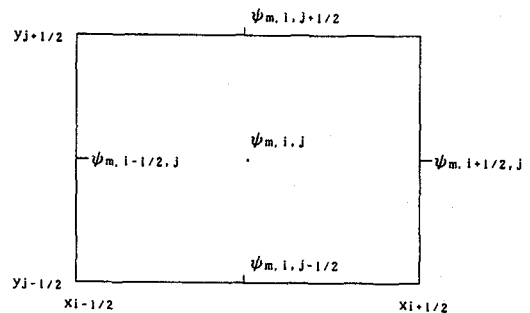


Fig. 2. Two-Dimensional Spatial discretized Mesh Cell.

을 적용한다. DDS를 이용해서 세포 가운데서 각입자속(angular flux)과 입자선속(scalar flux)을 먼저 구하면 다음과 같다.

$$\psi_{m,i,j} = \frac{q_{m,i,j} / (2\sum_{l,j} \mu_{l,j}) + (1/\alpha) \psi_{m,i-1/2,j} + (1+\beta) \psi_{m,i,j-1/2}}{0.5 + (1/\alpha) + (1/\beta)}$$

$$\phi_{i,j} = 4\pi \sum_{m=1}^M \psi_{m,i,j} W_m$$

여기서 α, β 는 "optical thickness"라 부르고 다음과 같이 정의된다.

$$\alpha = \frac{\sum_{l,j} \Delta x_l}{\mu_m}$$

$$\beta = \frac{\sum_{l,j} \Delta y_l}{\eta_m}$$

그리고, 등방산란만 고려하면 선원항은 다음과 같다.

$$q_{m,i,j} = S_{m,i,j} + (1/4\pi) \sum_{s,i,j} \phi_{s,i,j}$$

다음 세포의 계산을 위해, DDS를 이용해서 세포 밖으로 나가는 각입자속을 예측하면,

$$\psi_{m,i+1/2,j} = 2\psi_{m,i,j} - \psi_{m,i-1/2,j}$$

$$\psi_{m,i,j+1/2} = 2\psi_{m,i,j} - \psi_{m,i,j-1/2}$$

각방향 μ_m 또는 η_m 의 방향이 음인 경우에는 세포로 들어오고 나가는 입자속들이 서로 바뀌게 된다. 따라서 각 경우에 대해 별도의 SDS를 적용해야 한다.

각입자속 가중평균 방향 ξ_m, φ_m 을 구하는데 필요한 보조방향에서의 각입자속을 구할 때에도 같은 방법이 적용된다.

입자의 보존성

다음 두 조건이 부합되면 입자의 보존성이 유지된다. 첫째 조건으로서, 공간차분 방정식이 완전히 밸런스방정식(balance equation)에 근거를 두어야 한다. 즉, 매 공간 메시세포에서 입자가 보존됨을 보장해야 한다. 실제로 공간 차분

방정식은 임의의 세포안에서의 밸런스방정식을 정확히 유지한다. 둘째 조건으로서는, 입자들이 세포경계를 지날 때 보존되어야 한다. 다시 말해서 세포의 법선방향 current가 변하지 않아야 한다. DOM에서는 분할각(direction quadrature)이 고정된 값이므로 세포간 입자선속의 연속성은 충분하다. 그런데 DEM의 경우, 각입자속 가중평균방향을 위한 보조 각입자속을 구하는 단계에서는 각방향들이 고정되어 있고 모든 세포에서 동일하게 적용되고 있으므로 DOM에서와 마찬가지로 임의의 세포 안에서 입자의 보존성과 세포 간 입자의 연속성이 유지된다. 또한 본 입자선속을 구하는 단계에서도 공간차분방정식은 밸런스방정식에 근거하고 있어 세포 안에서의 입자의 보존성은 유지된다. 그러나, 세포 간 입자의 보존성은 각입자속 가중평균방향이 고정된 값이 아니고 보조 각입자속에 의해 조종되어 세포 간에 서로 달라질 수 있으므로 보장된다고 볼 수 없다.

그런데, 법선방향의 current를 같게 하면 가능하다. 즉 임의의 세포에서 나가는 법선방향의 current를 다음 세포의 법선방향의 current로 사용하므로써 세포 간 입자의 연속성도 유지된다. 이를 수식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^M \mu_{m,i-1,j} \psi_{m,(i-1)+1/2,j} W_{m,i-1,j} \\ &= \sum_{m=1}^M \mu_{m,i,j} \psi_{m,i-1/2,j} W_{m,i,j} \end{aligned}$$

여기서 $W_{m,i-1,j} = W_{m,i,j}$ 이므로, 세포 간 입자의 보존성이 유지되는 임의의 세포에서 나가는 각입자속은 다음과 같다.

$$\sum_{m=1}^M \left(\psi_{m,i-1/2,j} = \frac{\mu_{m,i-1,j}}{\mu_{m,i,j}} \psi_{m,(i-1)+1/2,j} \right)$$

$\psi_{m,(i-1)+1/2,j}$ 는 $i-1$ 세포에서 DDS로 구한 각입자속이다. y 방향으로도 똑같은 개념을 적용하여 구할 수 있다.

프로그램 알고리즘

각요소법의 프로그램 알고리즘은 가능한 한 각분할법에 기초한다. 각분할법의 기본은 반복 계산과정(iterative scheme)에서 각분할(angular quadrature)과 공간차분(spatial quadrature)을 분리하는 것이다. 그리고 선원항 q_m 은 첫 계산(iteration)에서는 예측(guess)되나 이후에는 전 계산에서 구해진 값이 이용된다. DOM 계산과정은 다음과 같이 진행된다. 먼저, 각분할의 고정된 방향으로 SDS가 수행되어 각입자속이 구해진다. 이후 각 세포의 입자 선속이 계산되고 선원항도 다음 반복계산을 위해서 새로운 값으로 대체된다.

DEM에서도 근본적으로 이와 같은 알고리즘의 골격을 유지하고 있다. 다만 각분할에서 각 방향이 고정되지 아니하고 각입자속에 의해 조종되므로 이 단계가 추가된다. 이 조종 가중평균 방향은 3-point Gauss-Legendre rule을 이용하여 구하는데, 먼저 3-point를 Gauss-Legendre approximation의 'b'와 'h'의 곱으로 정하고 이들—즉 각방향들—로써 SDS를 수행하여 보조 각입자속을 구하여서 각입자속으로 조종된 가중평균 방향을 3-point Gauss-Legendre approximation식에 대입하여 구한다. 이후 이 가중평균 방향에서 다시 SDS가 수행되어 DOM에서와 같은 단계들이 진행된다. 다만 DEM에서는 세포 간에 연속성이 유지되도록 세포 법선방향의 current를 구해서 다음 세포의 법선방향의 current로 적용하는 단계가 추가된다. 이를 요약하면 다음과 같다.

- 1) 경계면(boundary cell)에서 출발하여 고정된 방향으로 3-point를 구한다.
- 2) SDS를 써서 보조 각입자속을 구한다.
- 3) 가중평균방향을 구한다.
- 4) SDS를 써서 각입자속을 구한다.
- 5) 다음 세포에서 2),3) 단계를 반복한다.
- 6) 세포 간 입자의 보존성을 유지하기 위한 보정계산을 한다.

- 7) 단계 4),5)를 반복하여 각입자속을 구한다.
- 8) 단계 2) 내지 7)을 전체 구조(geometry)에 반복한다.
- 9) 경계에 도달하면 알려진 경계조건으로 반대 방향으로의 각입자속을 구한다.
- 10) 전 방향(여기서는 반구)에 대해서 각입자속이 구해지면 각 세포에서의 입자선속과 선원항을 구한다.
- 11) 수렴조건(convergence criterion)과 비교한다.
- 12) 수렴조건에 도달할 때까지 11)에서 구한 선원항을 새 선원항으로 대체하여 단계 2)로 가서 반복 계산한다.

수치해석 결과 및 논의

Lathrop[1]은 외부선원이 있는 사방형 매질을 2차원 DOM으로 풀었을 때 매질 끝부분에서 나타나는 입자선속의 ray effect를 소개하고 있고 Abu-Shumays는 여러 종류의 분할자들을 DOM에 이용하였을 때 나타나는 ray effect의 치유효과를 제시하였다[5]. 여기서도 동일한 문제를 DEM으로 해석할 때 ray effect가 어떻게 치유되는가 본다.

문제 대상은 정 4각형의 균질 흡수체 안에 평판형 고정선원이 존재하는 표 1과 같은 구조이다. 선원은 단일 에너지의 시간 불변적이고 선원매질에 균질하며 등방적이고 세기는 1.0이다. 산란특성은 에너지 독립적이고 등방적인(P_0) 것으로만 가정한다.

Case 1의 경우(그림 3) 문제의 특성이 사방대칭이므로 선원 중심에서 4등분하여 1/4만 계산 대상으로 하고 선원 쪽 변에 대해서는 반사 경계조건(reflecting boundary condition)을, 그 반대쪽 변에서는 진공경계조건(vacuum boundary condition)을 주면된다. 그리고 Lathrop[1], Abu-Shumays[5] 및 Mathews[6]는 각변의 공간메시를 균일하게 30등분하여 DOM으로 계산하였다. 여기서도 똑같은 상황에서 비교하

기 위해 동일하게 공간분할한다. 그림 3에서 C는 Σ_s/Σ_t 로 주어지는 값이다.

계산도구로는 80387 math-coprocessor가 내장되어 있는 PC-386(33MHz)에, Lahey FORTRAN Compiler version 2.22와 Microsoft(R) 8086 Linker version 3.05를 사용한다.

DEM에 의한 입자방정식의 해의 정확성은 DOM에서와 마찬가지로 각요소(quadrature set)의 수에 따라 변하고 각요소의 수가 많을수록 정확한 해를 구할 수 있다. 그렇다고 해서 각요소의 수를 한정없이 증가시키기에는 이로 말미암은 계산도구의 용량과 계산시간의 증가로 불가능하다. 각요소의 갯수를 변화하면서 case 1의 edge flux($y=1.967\text{cm}$ 의 입자속)를 계산한 결과를 그림 4에 나타내었다. 그림에서 보는 바와 같이 K-2, L-3의 경우에도 edge flux의 ray effect가 없어지고 있다. 다만 edge flux가 선원으로로부터 멀어질수록 감소하는 모양이 매끄럽지 못하다. 이는 K-2, L-3의 경우 단위구를 48등분한 것으로써 2차원 구조를 해석하는데 분할각수가 너무 적음에 기인하는 현상이다. 각요소의 수가 증가하면서 훨씬 매끄러워지고 있는데 k-4, L-5에서는 거의 완전한 모습을 보이고 있다.

DOM에 의한 계산프로그램으로써 널리 이용되고 있는 DOT 4.3[10]을 사용하여 앞에서 언급한 동일한 문제를 해석하여 DEM해석 결과와 비교하였다. 그림 5는 DOT 4.3에 의한 결과인데 S-4의 경우 ray effect가 현저하게 나타나고 있고 분할각수가 늘어나면서 점점 ray effect는 줄어드나 S-10의 경우에도 아직 ray effect가 보인다.(계산도구[PC-386]의 용량한계로 S-10까지만 계산하였다.) DEM계산결과와 비교해볼 때(그림 6) ray effect 치유면에서는 DOT 4.3의 S-10보다도 DEM의 K-2, L-3에서 더 좋은 결과를 보이고 있다. 각분할면에서 보면 DOT의 S-10이 단위구를 140등분한 것에 비교하여 DEM K-2, L-3는 48등분이다. 그런데 계산시간 면에서 볼 때 DEM에서 훨씬 많은 계산

Table 1. Cross Sections for All Problems

Cross Sections	CASE 1/2/3	CASE 4		CASE 5	
		Region 1	Region 2	Region 1	Region 2
Σ_a	0.25	0.50	0.10	0.50	0.90
$\nu\Sigma_f$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
Σ_t	0.75	0.75	1.00	0.75	1.00
Σ_s	0.50	0.25	0.90	0.25	0.10
S	1.0*	1.0*		1.0*	

S=1.0 in lower left 1.0 by 1.0 square of region 1

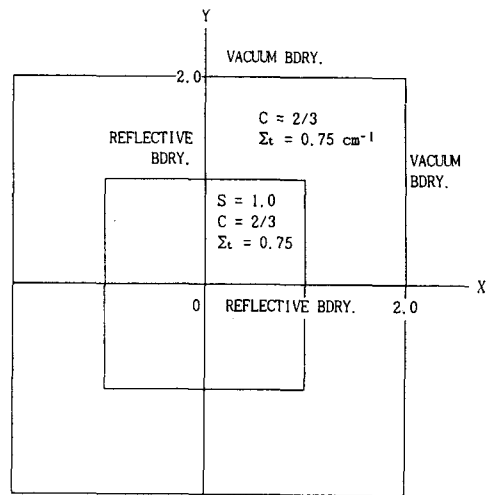


Fig. 3. Geometrical Illustration of the Test Case 1

시간이 걸리고 있다. 표 2에서 보는 바와 같이 각요소의 수가 늘어 남에 따라 계산시간이 거의 선형적으로 증가하고 있다. 보다 정확한 계산결과를 얻기 위해서는 각요소의 수를 많게 하여야 하나 선형적으로 증가하는 계산시간 상의 어려움으로 적절한 선에서 선택되어야 한다. Case 1의 경우는 K-3, L-4 정도이면 이상적인 결과를 기대할 수 있다. DOM과 비교해 볼 때 비슷한 분할 각 수에서 DEM이 약 4배의 많은 시간이 소요된다. 이는 DEM의 경우 하나의 분할각요소를 구하는데 5회의 SDS로 5개의 보조 각입

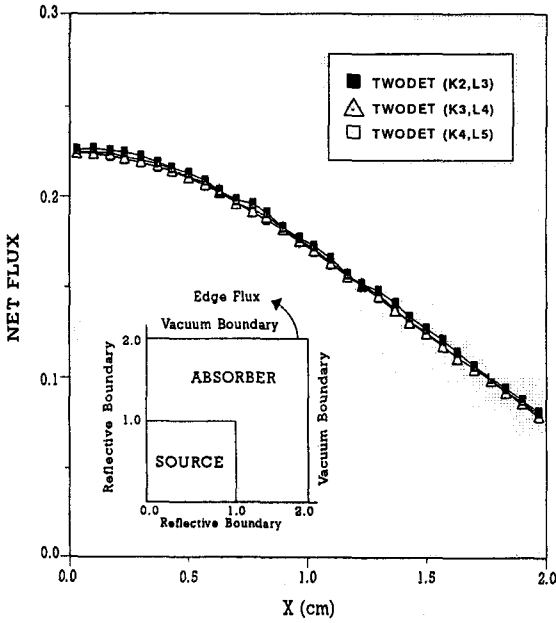


Fig. 4. Net Flux at $Y=1.967$ cm Using TWODET for the Case 1 ($C=2/3$)

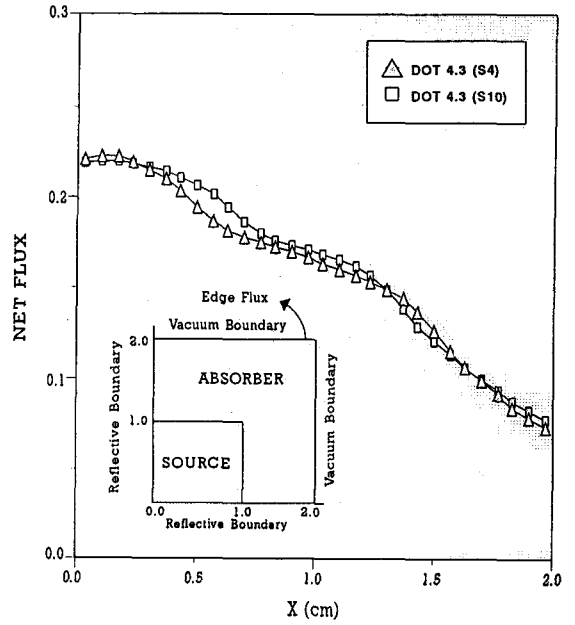


Fig. 5. Net Flux at $Y=1.967$ cm Using DOT 4.3 for the Case 1 ($C=2/3$)

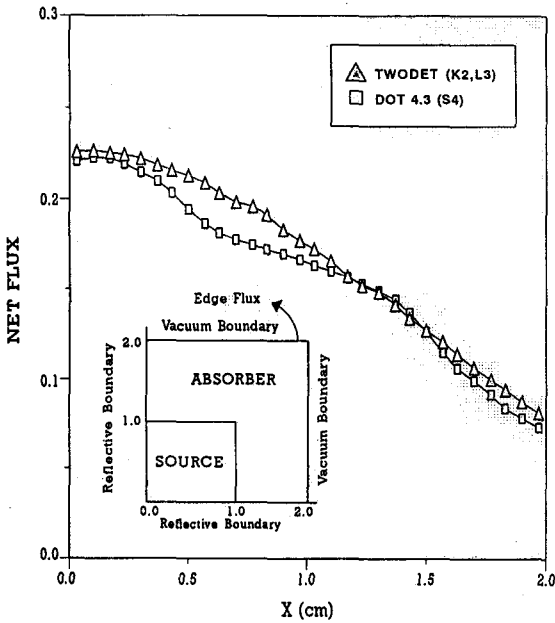


Fig. 6. Comparison of Net Flux at $Y=1.967$ cm between TWODET and DOT 4.3 Calculations for the Case 1 ($C=2/3$)

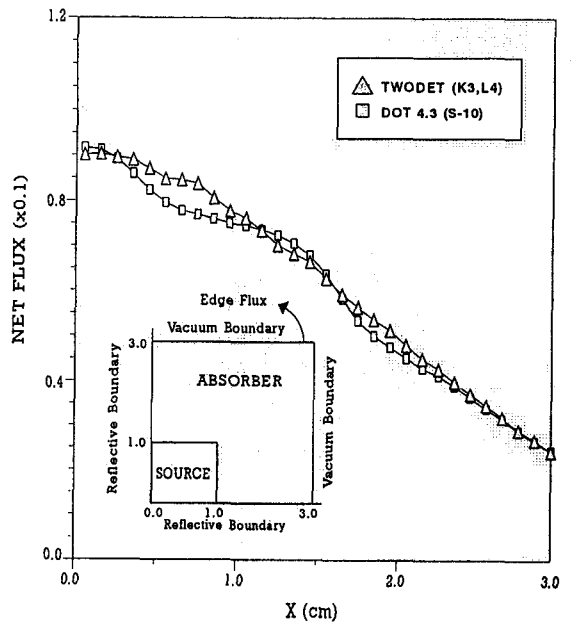


Fig. 7. Comparison of Net Flux at $Y=2.95$ cm between TWODET and DOT 4.3 Calculations for the Case 2 ($C=2/3$)

자속을 먼저 구하고 또 참 각입자속(main flux)- 보조 각입자속이 아닌 -를 구하는데 추가로 한번더 SDS를 수행하여, 즉 한분할각요소에서 6회의 SDS를 수행하기 때문이고, DOM의 경우 1회의 SDS로 참 각입자속을 구하는 것과 비교해 볼 때 당연하다. 물론 반복계산 과정에서 분할각요소를 각입자속을 이용하여 조종하므로써 보다 나은 분할각을 구하게 되므로 따라서 SDS에 더 나은 분할각요소가 이용되고 더 좋은 결과를 얻게 됨은 이미 언급하였다. 반복계산의 횟수도 DEM에서 더 많은데 반복계산 때마다 분할각요소가 약간씩 변하므로 말미암아 각입자속의 값도 따라서 약간 변하게 되므로 나타나는 현상으로 보인다.

Case 1에서 변의 길이를 3cm로 하여 edge flux를 계산한 결과를 그림 7에 나타내었다. DEM 계산결과를 보면 $Y=1.967\text{cm}$ 에서 보다 분포가 매끄럽지 못하다. 산란매질 부분이 많으므로 선원에서 출발한 입자가 edge 까지 가는 과정에서 더 많은 산란과정을 거치게 되고 흡수되는 edge flux가 낮아질 뿐만아니라, 입자의 분할각들의 집합으로 각입자속의 각분포를 기술하는데 더 많은 각들을 요구하게 된다. 그런데 여기서는 $Y=1.967\text{cm}$ 와 $Y=2.95\text{cm}$ 에서 똑같은 각수를 적용하므로 $Y=2.95\text{cm}$ 의 경우 각입자속의 분포를 정확히 기술하지 못하고 결과적으로 입자속의 분포가 매끄럽지 못하게 나타나고 있다. DOT 4.3(S10)을 이용하여 동일한 문제를 해석하여 DEM 결과와 비교해보면 $Y=1.967\text{cm}$ 에서 보다 더 심한 ray effect를 보이고 있다.

앞에서 언급한 바와 같이 선원에서 멀어질수록 한정된 분할각들로서 각입자속을 효과적으로 기술하지 못함에 기인하고, 특히 DOM에서는 각이 고정됨으로 말미암아 선원에서 멀어질수록 선원에서 출발한 입자가 edge에 도달한 입자들의 각분포를 제대로 표현하지 못하고 있음을 알 수 있다.

Case 3의 경우는, 그림 8에서 보여주듯이 반사경계조건 대신 진공경계조건으로 대체시킨 경우이다. 그림 9는 DEM에 의한 계산결과이며 edge flux의 분포가 매끄럽지 못하고 변화가 심하게 나타나고 있음을 알 수 있다. 분할각수를 증가할 수록 다소 수그러드나 K-4, L-5에서도 아직도 왜곡현상이 남아있다. 동일한 경우의 DOT 4.3계산결과를 그림 10에 나타내었다.

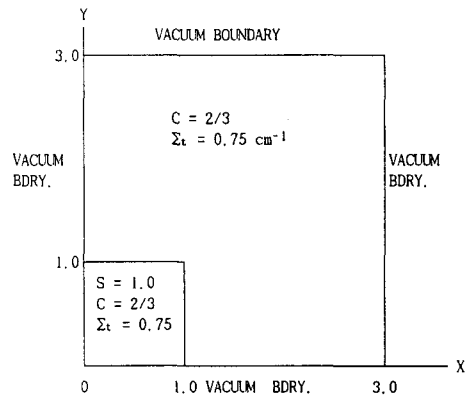


Fig. 8. Geometrical Illustration of the Test Case 3

Table 2. Comparison of Calculation Results between DEM and DOM in Case of Problem 1

# of ANGLE QUADRATURES	M6 (K-2, L-3)	M12 (K-3, L-4)	M16 (K-4, L-4)	M20 (K-4, L-5)	DOT4.3 (S10)
# of ANGLES	24	48	64	80	70
# of ITERATIONS	11	12	12	12	5
MX. FX. DV.	9.56E-4	5.06E-4	5.30E-4	5.36E-4	4.35E-4
CPU Time(S)	201	435	579	722	152

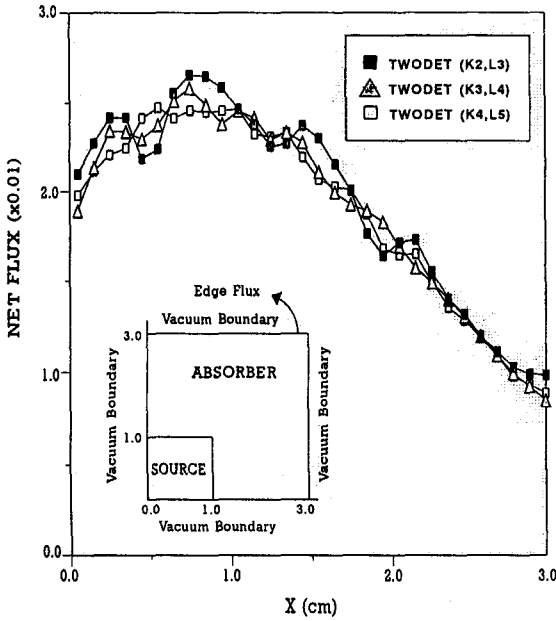


Fig. 9. Net Flux at Y=2.95 cm Using TWODT for the Case 3(C=2/3)

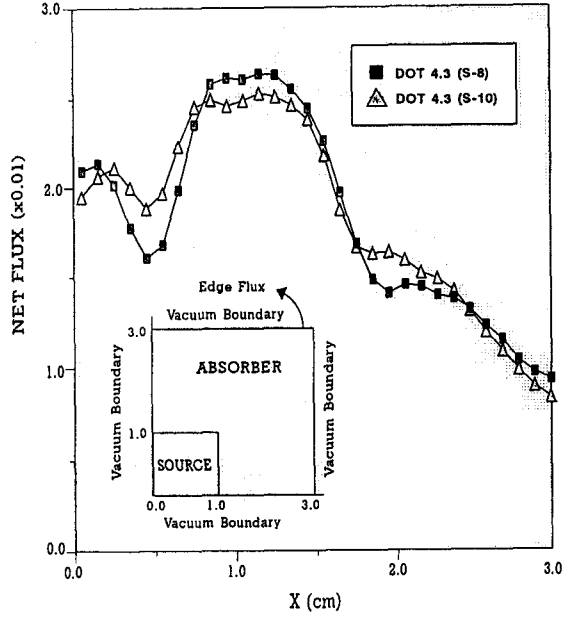


Fig. 10. Net Flux at Y=2.95 cm Using DOT 4.3 for the Case 3(C=2/3)

DOT의 계산결과에서도 마찬가지로 edge flux 분포가 심하게 변하고 있는데 S-8보다는 S-10에서 나온 분포를 보여주고 있다. 두 방법에서 계산결과 크기의 차이는 큰 차이를 보이지 않고 비슷하나, flux의 분포는 상당히 다르다(그림 11참조). flux분포에서 두 방법 모두 이렇게 심한 변화를 보이는 것은 선원이 위치한 변을 진공경계조건으로 처리함으로써 말미암아 선원에서 바로 완전흡수체(black body)로 바뀌는 급격한 매질 변화로 인한인데 각분할법의 한계성이다.

Case 4의 경우로, 좀더 복잡한 기하학적 구조인 산란매질 상단에 매우 높은 산란(high scattering) 영역을 가진 경우를 생각해본다[2, 3,5,11](그림 12). 이 문제는 Latrop[2]이 제시하고 Miller[3]등이 ray effect 치유 해석의 한 모델로 삼았던 구조이다. 선원이 위치한 변을 진공경계조건으로 처리할 때는 그림 9에서 잘 보여주듯이 DEM의 경우 최소한 K-3, L-4이상

으로 각 분할해야 만족할만한 해를 기대할 수 있어, DEM K-3, L-4의 해석결과와 DOT 4.3의 S-10과 비교하였다. 그림 13에서 보는 바와 같이 DEM의 결과에서는 높은 산란특성을 가진 영역의 영향으로 상단 왼편, 즉 선원이 위치하는 변쪽에서 높은 선속분포를 보여주고 있다. DOT 4.3의 경우 높은 산란특성을 가진 영역에 의한 영향과 진공경계조건에 의한 영향이 겹쳐져서 정확한 선속분포를 나타내주지 못하고 있음을 알 수 있다.

Case 5의 경우로, 그림 12의 고산란매질 대신에 고 흡수체(high absorbing region)을 고려하고(그림 14) 선원이 위치한 변들을 반사경계조건으로 하였을 때 계산결과가 그림 15이다. DEM(K-3, L-4) 계산결과와 DOT 4.3(S-10)의 계산결과가 잘 근사하며, 흡수체 영역에 의한 영향이 DOT 4.3에서 보다 DEM에서 더욱 선명히 나타나고 있음을 볼 수 있다.

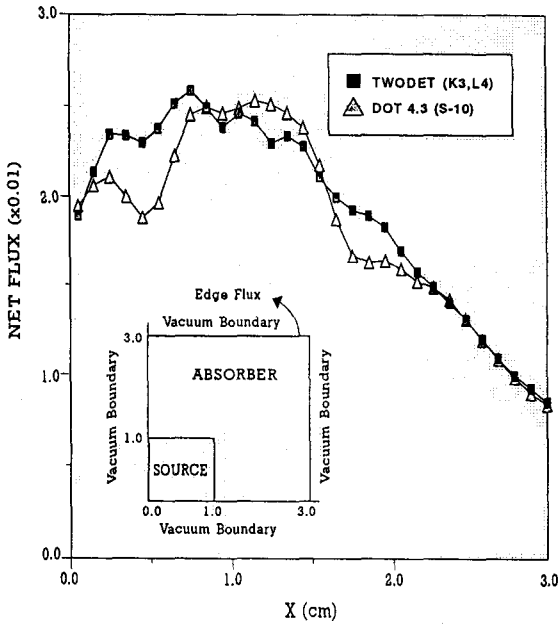


Fig. 11. Comparison of Net Flux at $Y=2.95$ cm between TWODET and DOT 4.3 Calculations for the Case 3($C=2.3$)

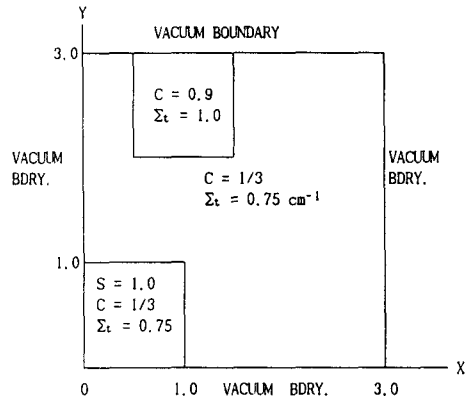


Fig. 12. Geometrical Illustration of the Test Case 4

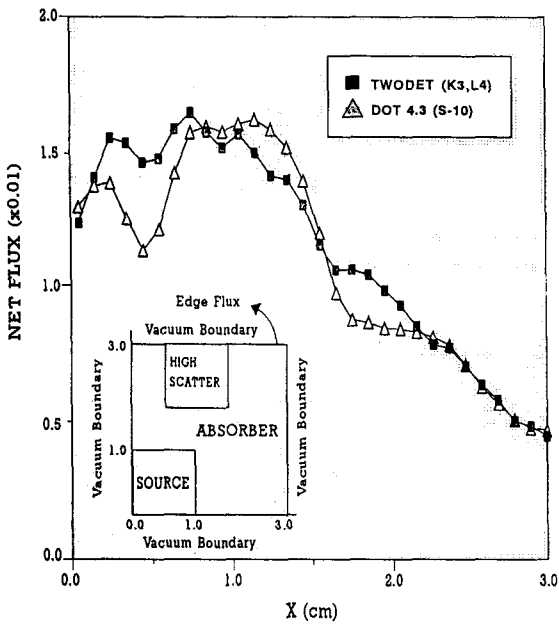


Fig. 13. Comparison of Net Flux at $Y=2.95$ cm between TWODET and DOT 4.3 Calculations for the Case 4($C=1/3, 9/10$)

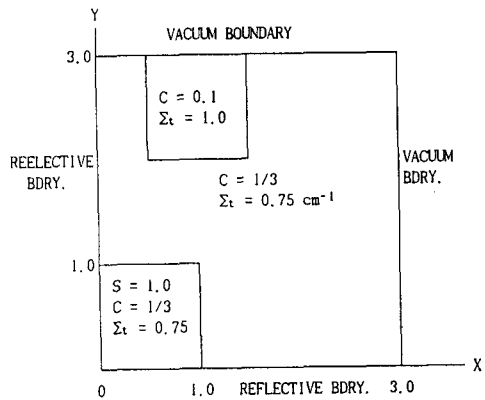


Fig. 14. Geometrical Illustration of the Test Case 5

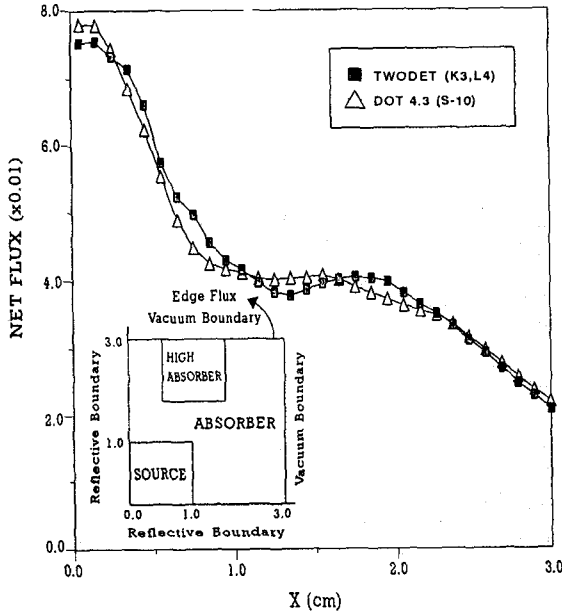


Fig. 15. Comparison of Net Flux at $Y=2.95$ cm
between TWODET and DOT 4.3
Calculations for the Case 5($C=2/3$, $1/10$)

결 론

일반적인 기하학적 구조에서는 DEM에 의한 계산이 DOM에 의한 계산보다 월등히 나은 ray effect 치유효과를 보이고 있음을 알 수 있다.

그러나 계산시간 면에서 볼 때 DEM에 의한 계산이 더 많은 시간을 소비하고 있다. DEM에 의한 계산 프로그램이 아직까지 계산시간을 가장 효과적으로 단축할 수 있도록 정리된 상태가 아님을 감안하더라도 DOM에 의한 계산에서 보다 더 많은 시간이 소요되는 DEM에 의한 계산 시 한개의 분할각에서 6회의 SDS를 수행하여야 하는 것 만으로도 당연하다.

또한 각분할 방법에 있어서, 좌표의 전 요소에 공히 ϕ 좌표의 요소 갯수를 갈게 분할하므로써, 단위구에서 볼 때 양극 쪽에 집중적으로 많

은 각요소를 할당하는 결과가 되어 비능률적인 일면을 내포하고 있다[12]. 그렇지만 각분할의 갯수가 적은 경우 이 점이 별로 문제되지 않을 것이고, K-2, L-3 정도의 각분할에서도 이미 ray effect 치유면에서 효과적임을 알 수 있다.

선원에서 바로 진공경계면으로 떨어지는 구조의 경우에는 edge flux에 심한 진동(ray effect)을 보인다. 선원을 바로 이웃하여 진공경계조건을 두게 되면 선원부분과 진공 간에 급격한 불연속 경계를 야기하여 정상적인 해석이 불가능하게 되고 이로 말미암아 edge flux 분포에 심한 ray effect를 보이게 된다. 이러한 불연속성이 심한 문제를 각분할법으로 해석하는데는 어려움이 있다. 그러나, 이와 같은 문제의 구조는 실제 거의 없고, 존재 가능한 구조로서 강한 흡수체가 있는 구조를 가정하여 해석한 결과 좋은 flux분포를 보여주고 있다.

본 논문은 DEM에 의한 입자수송방정식 해석 프로그램 개발의 시작 단계로 아직도 비등방 산란효과나 다중 에너지군을 고려하지 못하고 있다. 따라서 실제적인 문제에 의한 검증계산이 현단계에서는 불가능하여, DOT 4.3과의 비교계산 및 ray effect 치유에 관한 여러 논문의 해석 결과와 비교되었다.

참 고 문 헌

1. K.D.Lathrop, *Nucl. Sci. Eng.*, **32**, 357 (1968)
2. K.D.Lathrop, *Nucl. Sci. Eng.*, **45**, 255 (1971)
3. W.F.Miller, Jr. and Wm. H.Reed, *Nucl. Sci. Eng.*, **62**, 391(1973)
4. James J. Duderstadt and William R. Martin, "Transport Theory", Chapt. 8 (1978)
5. I.K. Abu-Shumays, *Nucl. Sci. Eng.*, **64**, 299(1977)
6. Kirk A. Mathews, *Nucl. Sci. Eng.*, **98**, 41(1988)

7. B.C.Na, "An Application of the Discrete Elements Method in Neutron Transport Problems" (1989)
8. Shan S.Kuo, "Computer Applications of Numerical Methods", Chapt. 12 (1972)
9. R.D.O'Dell and R.E. Alcouffe, "Transport Calculations for Nuclear Analyses": *Theory and Guidelines for Effective Use of Transport Codes*, LA-10983-MS, Los Alamos Scientific Laboratory (1987)
10. W.A.Rhoades and R.L.Childs, "DOT 4.3, One-and Two-Dimensional Discrete Ordinates Transport Code", ORNL-5851 (1982)
11. M.P.Hong and J.K.Kim, *Journal of Korean Nuclear Society*, **22**, No.3, (1990)
12. E.E. Lewis and W.F.Miller, "Computational Methods of Neutron Transport", Chapt. 4 (1984)

Ray Effect Analysis Using the Discrete Elements Method in X-Y Geometry

Ho Sin Choi · Jong Kyung Kim*

*Korea Institute of Nuclear Safety, *Hanyang University*

ABSTRACTS

As one of the methods to ameliorate the ray effects which are the nature of anomalous computational effects due to the discretization of the angular variable in discrete ordinates approximations, a computational program, named TWODET (TWO dimensional Discrete Element Transport), has developed in 2 dimensional cartesian coordinates system using the discrete elements method, in which the discrete angle quadratures are steered by the spatially dependent angular fluxes.

The results of the TWODET calculation with K-2, L-3 discrete angular quadratures, in the problem of a centrally located, isotropically emitting flat source in an absorbing square, are shown to be more accurate than that of the DOT 4.3 calculation with S-10 full symmetry angular quadratures, in remedy of the ray effect at the edge flux distributions of the square. But the computing time of the TWODET is about 4 times more than that of the DOT 4.3. In the problem of vacuum boundaries just outside of the source region in an absorbing square, the results of the TWODET calculation are shown severely anomalous ray effects, due to the sudden discontinuity between the source and the vacuum, like as the results of the DOT 4.3 calculation. In the problem of an external source in an absorbing square in which a highly absorbing medium is added, the results of the TWODET calculation with K-3, L-4 show a good ones like as, somewhat more than, that of the DOT 4.3 calculation with S-10.